

초기 유도용 수동 추적 필터  
(A Passive Tracking Filter in a Capture Guidance Mode)

°엄 태 윤      안 조 영      송 택 렬  
( Tae Yoon Um, Jo Young Ahn, Taek L. Song)

대 전 기 계 창

A practical filter is suggested for ground-based missile tracking in a capture guidance mode, utilizing angle-only measurements from a passive sensor and its performance is evaluated by a realistic system simulation study. Also suggested is a missile acceleration model that provides inputs to the filter. The suggested filter has a decoupled structure of independent azimuth and elevation channels with efficiency in computation time and memory requirements.

1. 서 론

Beam riding 및 CLOS(command to line-of-sight) 유도기법을 사용하는 지대공 유도탄 무기체계의 유도단계는 보통 4단계, 자유비행구간, 초기유도, 중기 및 말기유도로 이루어진다. 자유비행구간은 유도탄의 공력을 충분히 형성 하는 단계이며, 초기유도는 유도탄을 주추적 빔내로 유도하는 단계이고, 중기 및 말기유도는 주추적 빔내에 항상 유도탄을 유지시켜 주는 단계 및 목표물 적중을 위한 단계이다.

자유비행구간 후 유도탄이 주추적 빔내에 있기가 어렵으므로 주추적 빔보다 FOV (field-of-view)가 큰 TV, Camera 및 IR localizer 같은 수동 추적기 (passive tracker) 및 목표물 추적기로 부터 얻은 정보로 초기유도를 수행한다. 수동 추적기의 측정치는 방위각, 고각으로 이루어져 있고, 유도탄까지의 거리 정보는 포함되지 않는다. 초기유도는 추진제의 연소중에 수행되므로 연소 중 발생하는 물질 및 환경에 따른 요인으로 측정치에는 잡음성분이 포함되어 있으므로, 초기유도를 위해서는 유도탄 추적필터가 요구된다.

측정 샘플링 주기내에 목표물 추적, 유도탄 추적, 추적기서보 제어 및 유도를 위한 많은 계산을 해야 하므로, 되도록 계산 시간이 적은 유도탄 추적필터가 필요하다. 본 논문에서는 극 좌표계에 표시된 단순한 추적 역학과 근사화한 유도탄 가속도 식으로부터 필터 모델을 선정하였다. 필터모델은 방위각 및 고각채널이 서로 독립되어 있으며, 각각 상태변수가 2차인

시스템이다. 모델에 필요한 유도탄까지 거리 및 거리의 변화율은 유도탄의 추진력 및 drag 항을 고려하여 선정하였으며, 유도탄의 가속도 역학식은 1차로 근사화된 형태를 사용하였다. 또, 예상치 않은 잡음하에서의 필터의 유도탄 위치 및 속도의 예측성능을 분석하기 위하여, 수동추적기 측정치와 필터의 추정치를 이용한 correlation gate 를 설정했으며, 측정치 거부를 효과적으로 분석하기 위해 일정구간에 모델보다 큰 분산치를 가지는 측정잡음을 시뮬레이션에 이용하였다.

2. 유도탄 추적 필터

(1) 추적기 역학 [1]

TA (tracker antenna) 좌표계는 추적기를 원점으로 하는 좌표계로서,  $X^{TA}$  축은 추적기의 안테나 방향 벡터로 정하고,  $Y^{TA}$  축은 지표면 위의 벡터로서  $X^{TA}$  축과 수직인 오른쪽 성분으로,  $Z^{TA}$  축은 오른손 법칙에 따라 정한다. 또, MLOS (missile line of sight) 는 추적기와 유도탄을 잇는 벡터로서, TA 좌표계를 방위각 (azimuth angle) 및 고각 (elevation angle)으로 회전 변환하면  $X^{TA}$  와 MLOS 의 방향벡터는 일치한다. 이때의 좌표계를 MLOS 좌표계라 정의한다.

위 정의에 따라 관성좌표계 (inertial frame) 에 대한 MLOS 및 TA 좌표계의 각속도의 관계식은 좌표변환을 사용하여 얻어진다.

$$\begin{aligned} \underline{\omega}_R^{MLOS} &= C(\varepsilon_E) C(\varepsilon_A) \underline{\omega}_A^{TA} + C(\varepsilon_E) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varepsilon}_A \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\varepsilon}_E \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{식 1})$$

여기서

$$\underline{\omega}_R^{MLOS} = [\omega_x, \omega_{el}, \omega_{az}]^T$$

: MLOS 좌표계로 표시된 관성좌표계에 대한 MLOS 좌표계의 각속도

$$\underline{\omega}_A^{TA} = [\omega_{x'}, \omega_{el'}, \omega_{az'}]^T$$

: TA 좌표계로 표시된 관성좌표계에 대한 TA 좌표계의 각속도

$$\varepsilon_A, \varepsilon_E$$

:  $\chi^{TA}$  로 부터 벗어난 유도탄의 방위각 및 고각

$C(\cdot)$  : 좌표변환 행렬

$\varepsilon_A$  및  $\varepsilon_E$  는 유도 (guidance) 를 위한 정보로서 유도가 적절히 되면  $\varepsilon_A$  및  $\varepsilon_E$  는 작은 각이 되며, 비선형항을 무시하여 식(1)을 정리하면 상태변수  $\varepsilon_A$  및  $\varepsilon_E$  에 관한 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_A &= \omega_{az} - \omega_{az'} - \varepsilon_E \omega_{x'} \\ \dot{\varepsilon}_E &= \omega_{el} - \omega_{el'} + \varepsilon_A \omega_{x'} \end{aligned} \quad (\text{식 2})$$

또  $\omega_{az}$  및  $\omega_{el}$  의 변화율에 대한 식은 MLOS 의 정의 및 MLOS 와 I 좌표계사이의 가속도식에 의해서 얻어진다.

가속도 식을 표시하면

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{R}}_I^{MLOS} &= \ddot{\underline{R}}_R^{MLOS} + 2 \cdot \underline{\omega}_R^{MLOS} \times \dot{\underline{R}}_R^{MLOS} + \dot{\underline{\omega}}_R^{MLOS} \times \underline{R}_R^{MLOS} \\ &+ \underline{\omega}_R^{MLOS} \times (\underline{\omega}_R^{MLOS} \times \underline{R}_R^{MLOS}) \end{aligned} \quad (\text{식 3})$$

여기서  $\underline{R}$  은 MLOS 벡터,  $\underline{B}_A^B$  는 A 좌표계에서 미분한 벡터를 B 좌표계에 표시한 것을 나타내며,  $\ddot{\underline{R}}_I^{MLOS} = [a_x, a_y, a_z]^T$  를 나타낸다.  $\omega_x = \omega_{x'}$  라 가정하면 식 3으로부터  $\omega_{az}$  및  $\omega_{el}$  의 변화율에 대한 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{az} &= -2 \omega_{az} \frac{\dot{R}_m}{R_m} - \omega_{x'} \omega_{el} + \frac{a_y}{R_m} \\ \dot{\omega}_{el} &= -2 \omega_{el} \frac{\dot{R}_m}{R_m} + \omega_{x'} \omega_{az} - \frac{a_z}{R_m} \end{aligned} \quad (\text{식 4})$$

식 2 및 식 4 로 부터 4개의 상태변수에 대한 상태식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_E \\ \dot{\omega}_{el} \\ \dot{\varepsilon}_A \\ \dot{\omega}_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \omega_{x'} & 0 \\ 0 & -\frac{2\dot{R}_m}{R_m} & 0 & \omega_{x'} \\ -\omega_{x'} & 0 & 0 & \frac{1}{R_m} \\ 0 & -\omega_{x'} & 0 & -\frac{2\dot{R}_m}{R_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_E \\ \omega_{el} \\ \varepsilon_A \\ \omega_{az} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega_{el}' \\ -\frac{a_z}{R_m} \\ -\omega_{az}' \\ \frac{a_y}{R_m} \end{bmatrix} \quad (\text{식 5})$$

$R_m, \dot{R}_m$  는 추적기와 유도탄 사이의 거리 및 거리 변화율을 나타낸다. 또,  $\omega_{el}'$  및  $\omega_{az}'$  는 레이더 추적기 서보 (radar tracker servo) 에서 공급되는 정보이며,  $\varepsilon_E$  및  $\varepsilon_A$  는 초기 유도시 passive tracker 에서 공급되는 정보이다. 또  $a_y$  및  $a_z$  는 유도탄의 가속도로서 MLOS 좌표계에 표시된 양이다.

## (2) 필터 모델

식(5)에 표시된 상태방정식은 4개의 상태변수간에 coupling 되어 있다. 지상에서 사용되는 컴퓨터는 측정치의 주기안에 유도 (guidance), 목표물 추적, 유도탄 추적 및 기타 여러가지 계산을 하므로 가능한 계산량의 절감을 요구한다. 따라서, 4개의 상태변수보다 2개의 상태변수를 갖는 2개의필터를 사용함이 유리하다.

저고도 목표물일 경우  $\omega_{x'}$  는 작은 양이므로  $\omega_{x'} = 0$  라 가정한다. 또, 대부분 초기유도는 유도탄의 추진제가 연소할 동안에 수행되므로, 유도탄의 추진력 및 drag 를 고려하여  $R_m$  및  $\dot{R}_m$  를 구할 수 있다. 식 6 은 방위각 및 고각에 대한 선형 시변 시스템으로 표시된 시스템 모델을 나타낸다

$$\begin{aligned} \dot{\underline{X}}_1(t) &= A(t) \underline{X}_1(t) + B(t) \underline{U}_1(t) + \underline{W}_1(t) \\ \dot{\underline{X}}_2(t) &= A(t) \underline{X}_2(t) + B'(t) \underline{U}_2(t) + \underline{W}_2(t) \\ y_1(t_i) &= C \underline{X}_1(t_i) + \underline{V}_1(t_i) \\ y_2(t_i) &= C \underline{X}_2(t_i) + \underline{V}_2(t_i) \end{aligned} \quad (\text{식 6})$$

여기서

$$\underline{X1}(t) = [ \varepsilon_e(t), \omega_{e1}(t) ]^T$$

$$\underline{X2}(t) = [ \varepsilon_A(t), \omega_{az}(t) ]^T$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{4}{t} \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \text{diag} [-1, -1]$$

$$B'(t) = \text{diag} [-1, 1]$$

$$C = [1, 0]$$

$$\underline{U1}(t) = [ \omega_{e1}'(t), 2a_z(t)/at^2 ]$$

$$\underline{U2}(t) = [ \omega_{az}'(t), 2a_y(t)/at^2 ]$$

$$a = \frac{T - D}{m}$$

T, D : 추진력 및 drag

m : 유도탄 질량

식(6)의  $\underline{w1}(t)$ ,  $\underline{w2}(t)$  및  $V1(t_i)$ ,  $V2(t_i)$ 는 공정 잡음 및 측정잡음으로서 정규분포 (gaussian distribution) 를 갖는 백색잡음으로서 서로 uncorrelation 되어 있으며, 각각의 공분산 (covariance) 은 아래와 같다.

$$E[\underline{w1}(t) \underline{w1}^T(\tau)] = \text{diag} [Q11(t) \delta(t-\tau), Q12(t) \delta(t-\tau)]$$

$$E[\underline{w2}(t) \underline{w2}^T(\tau)] = \text{diag}[Q21(t) \delta(t-\tau), Q22(t) \delta(t-\tau)]$$

$$E[V1(t_i) V1(t_j)] = R1(t_i) \delta_{ij}$$

$$E[V2(t_i) V2(t_j)] = R2(t_i) \delta_{ij}$$

공정잡음은 시스템 모델 오차, Rn, Rm 및  $a_y$ ,  $a_z$  의 불확실성을 포함하는 항이다.

본 논문에서는 식 6 의 시스템 모델을 이산화 (discretization) 하여, 상태변수 및 추정상태변수의 오차분산을 최소화 하는 최적필터인 칼만필터 알고리즘으로 표현한다. [2]

### (3) 유도탄 가속도 모델

유도탄의 롤각의 측정 및 안정화를 위해 2 DOF free gyro 를 사용한다. Vertical gyro 의 회전축이 항상 지표면과 수직을 이루고 있는 반면에 2 DOF 의 회전축은 발

사각에 따라 결정되어 진다. 유도탄의 단순화 역학을 위해 GG (Gyro Gimbal) 좌표계를 정한다. 원점을 gyro 의 회전자 (rotor) 의 중심으로,  $X^{GG}$  축은 유도탄의 앞방 향으로 정한다. 또,  $Z^{GG}$  축은  $X^{GG}$  와 회전축을 포함하는 평 면위에 있으며  $X^{GG}$  축과 수직인 성분으로,  $Y^{GG}$  축은 오른손법칙 에 따라 정한다.

유도탄의 역학은 비행역학, 자동조종장치 및 actuator 로 구성되어 있다. 복잡한 역학을 단순화한 역학으로 표시하기 위해, 유도탄의 y 및 z 축의 특성이 같다고 가정하여 식7 과 같이 설정하였다.

$$\dot{a}(t) = -\frac{1}{\tau(t)} a(t) + \frac{1}{\tau(t)} a_c(t) \quad (\text{식 7})$$

$a_c$  및  $a$  는 GG 좌표계에서 표시된 가속도로서, 지상에서 전송된 지시가속도 및 성취가속도를 나타내며,  $\tau(t)$  는 비행환경에 따라 결정되는 시변함수이다. 또,  $X$  축의 역학 은 유도탄의 추진력과 같은 방향이므로 1로 설정한다.

식6에 표시된  $a_y$  및  $a_z$  는 MLOS 좌표계에서 표시된 가 속도이므로, 식7에서 구한 성취가속도의 좌표변환을 요구한다. 좌표변환식은 식8과 같다.

$$\underline{a}^{MLOS} = C_{TA}^{MLOS} C_I^{TA} \left[ C_{GG}^I \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}^{GG} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \right] \quad (\text{식 8})$$

$C_{GG}^I$  는 관성좌표계와 GG 좌표계 사이의 변환 행렬로서, 유도탄 속도벡터와 GG 좌표계 사이의 공격각 (angle of attack), 횡전각 (side slip angle) 및 롤각, 유도탄 속도벡터의 방 위각 및 고각으로 구성되어 있다. 공격각 및 횡전각은 유도 탄 질량, 동압력, 속력 및 성취 가속도로 부터 구한다. 또, MLOS 위에 유도탄이 놓여 있으므로 관성좌표계와 MLOS 좌표 계사이의 속도식 및 유도탄 속력으로부터 방위각 및 고각을 얻는다. 롤각은 gyro 회전축이 관성좌표계에서 고정되어 있는 특성으로 부터 얻어진다.

또  $C_I^{TA}$  는 케이더 추적 서보에서 얻어지고,  $C_{TA}^{MLOS}$  는 필터의 추정치로 부터 얻어진다.

$\underline{a}^{MLOS}$  의 y 축 및 z 축의 성분은 식6의 필터 모델을 위해 사용되어 진다.

(4) 필터 초기화

칼만필터 초기화동안, 목표물 추적용 위한 추적 안테나 및 유도탄 추적용 위한 MLOS 각속도가 일정하다고 가정하면, 식 6으로부터 TA 에서 벗어난 방위각 및 고각의 변화율도 일정하다. 위 가정에 의해 각 시각에서의 측정치를 가장 최근의 방위각으로 표시하면 측정오차를 포함하는 형태를 갖는다.

$$Z_I = H X + V \quad (\text{식 9})$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -(t_{n-1} - t_0) \\ 1 & -(t_{n-1} - t_1) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (n \geq 2)$$

$Z_I$  는 n 개의 시각에서 얻은 측정치들의 벡터로서,  $Z_I = [y_2(t_0), y_2(t_1), \dots, y_1(t_{n-1})]^T$  이며,  $H^T$  는 2 x n 행렬,  $X = [\varepsilon_A(t_{n-1}), \omega_{az}(t_{n-1}) - \omega_{az}'(t_{n-1})]^T$   $V$  는 측정치 오차를 나타낸다. 측정치 오차는 정규분포를 갖는 백색잡음으로서, 평균은 0이며 공분산은  $R_2$  를 성분으로하는 대각행렬  $R (= R_2 I)$ 이다.

측정치와 추정치의 오차를 최소화 하는 식 10의 목적함수로 부터 얻은 추정치  $\hat{X}$  로 부터 필터의 상태변수 초기값 및 초기 공분산을 얻는다.

$$J = \min_{\hat{X}} [Z_I - H \hat{X}]^T R^{-1} [Z_I - H \hat{X}] \quad (\text{식 10})$$

식 10의 해는 [3]

$$\hat{X} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} Z_I$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_A(t_{n-1}) \\ \hat{\omega}_{az}(t_{n-1}) \end{bmatrix} = (H^T H)^{-1} H^T Z_I + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{az}'(t_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{식 11})$$

또,  $e_A = [\varepsilon_A - \hat{\varepsilon}_A, \omega_{az} - \hat{\omega}_{az}]^T$  이라 하면 상태변수의 공분산은 아래와 같이 표시된다.

$$E \begin{bmatrix} e_A & e_A^T \\ A & A \end{bmatrix} = R_2 (H^T H)^{-1} \quad (\text{식 12})$$

식 11, 12는 방위각 필터 초기값 및 초기 공분산이며, 고각에 관한 초기치도 위와같은 방법으로 구한다.

3. 시뮬레이션 및 결과

이산 칼만필터의 샘플링 주기는 0.05 초로서, 이산 공정 잡음의 공분산은 연속공정잡음의 공분산에 샘플링 주기를 곱한 형태를 갖으며 이들의 분산은 표 1에 나타내었다. 또, nominal 측정잡음의 분산은  $4 \times 10^{-6} (\text{rad})^2$  이고, 시각에 따른 분산은 그림 6과 같다.

측정치 오차모델로 선정된 잡음 ( nominal 측정잡음)의 정도와 다른 종류의 잡음이 측정치에 포함되었을 경우, 필터 성능의 저하를 막기 위해 측정치를 제거 (rejection) 시키는 판단기준을 선정하였다.

$$R = \alpha \frac{m^2}{\sigma_m^2} + \frac{n^2}{\sigma_n^2} \quad (\text{식 13})$$

$$m = y(t_{i-1}) - C \hat{X}(t_{i-1} | t_{i-2})$$

$$n = y(t_i) - C \hat{X}(t_i | t_{i-1})$$

$$\sigma_m^2 = P(t_{i-1} | t_{i-2}) + R_2$$

$$\sigma_n^2 = P(t_i | t_{i-1}) + R_2$$

m 및 n 은 innovation process 로서 평균치가 0이고 분산이  $\sigma_m^2$  과  $\sigma_n^2$  을 갖는 정규분포이다. Nominal 잡음을 nominal 잡음으로 판단하지 않을 확률인 PFA(probability of false alarm) 는

$$P(R > \lambda) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{1+\alpha}{4\alpha} R\right) I_0\left(\frac{1-\alpha}{4\alpha} R\right) dR \quad (\text{식 14})$$

로 나타낸다.[4,5] 윗식의  $I_0(\cdot)$  는 modified bessel function[6] 으로서 아래의 형태를 가지며,  $\lambda$  는 threshold 값을 뜻한다.

$$I_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \quad (\text{식 15})$$

시뮬레이션에서 가중치  $\alpha$  를 0.1 로, PFA가 0.5 % 가 되게  $\lambda$  를 선정하였다. Modified bessel function 은 30개항까지 전개한 값을 사용하여, 수치적 적분으로  $\lambda = 7.976$  을 선정하였다. Chi-square 확률분포를 갖는

random variable 의 개수가 1 ( $\alpha = 0$ ) 또는 2 ( $\alpha = 1$ ) 개 일때 0.5% 확률값을 갖는 threshold 는 7.88 및 10.60으로서 [7], 선정된  $\lambda$ 는 두 값 사이에 위치한다.

시뮬레이션을 위한 목표물 운동은 일정한 고도, 속도를 가지며, 지표면에 투사한 초기위치 및 속도를 그림 1에 도시하였다.

그림 2-5는 Monte carlo 시뮬레이션을 100번 수행한 결과로서, 상태변수의 평균치(——) 및 실제값(-----)을 도시하였다. 그림 2 및 3은 TA 좌표계에서 벗어난 고각 및 방위각을, 그림 4 및 5는 MLOS 의 각속도를 도시하였다. 또, 그림 6은 측정기 잡음의 분산을 도시하였다.

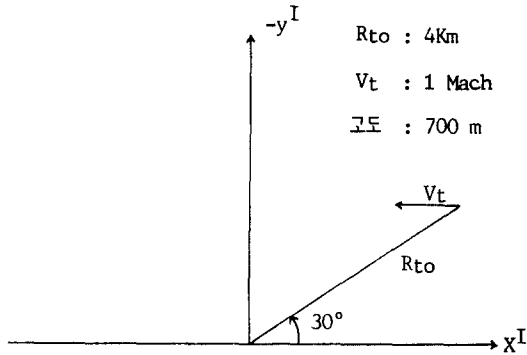


그림 1 목표물 운동 형태

표 1. 공정잡음의 분산

분산의 종류	값
$Q_{11}(t) \cdot \Delta t$	$2.5 \times 10^{-8} \text{ (rad)}^2$
$Q_{12}(t) \cdot \Delta t$	$2.0 \times 10^{-5} \text{ (rad/sec)}^2$
$Q_{21}(t) \cdot \Delta t$	$1.6 \times 10^{-8} \text{ (rad)}^2$
$Q_{22}(t) \cdot \Delta t$	$2.0 \times 10^{-5} \text{ (rad/sec)}^2$

#### 4. 결 론

제안된 유도탄 추적 필터는 방위각 및 고각 모델이 독립된 (decoupling) 형태를 갖고, 각각 2차의 상태변수를 가지므로, 계산량을 절감할 수 있고, 측정치의 형태를 직접 사용할 수 있다.

예상되지 못한 측정치 잡음하에서 필터의 성능을 알아보기 위해, Monte carlo 시뮬레이션을 100번 수행한 결과, 제안된 추적필터의 성능은 측정치 제거하에서도 좋은 성능을 유지하였다.

#### 5. 참 고 문 헌

- (1) John B. Pearson, III & Edwin B. Stear, "Kalman Filter Applications In Airborne Radar Tracking," IEEE Trans. Aerospace & Electrical Systems, Vol. AES-10 NO.3, 1974 May
- (2) Peter S. Maybeck, Stochastic model, Estimation, and Control, Academic Press Inc., 1979
- (3) Ljung & Soderstrom, Theory and Practice of Recursive Identification, MIT Press., 1983
- (4) Wilbur B. Davenport, JR., Probability and Random Processes, McGraw-Hill, 1970.
- (5) George R. Pitman, JR., Inertial Guidance, John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- (6) G.N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1948.
- (7) J.S. Bendat & A.G. Piersol, Random Data : Analysis & Measurement Procedures, Wiley-Interscience, 1971.

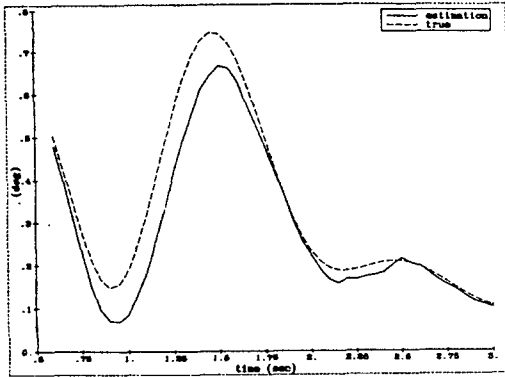


그림 2. TA 좌표계에서 벗어난 고각

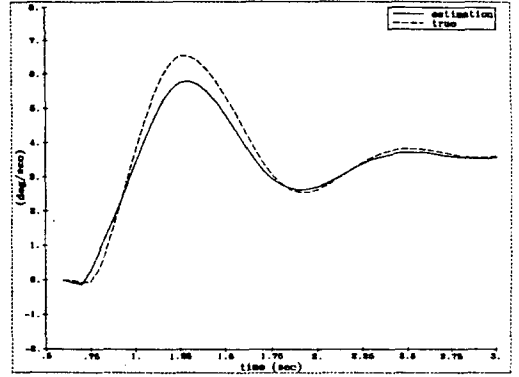


그림 5. MLOS 좌표계의 z 축 각속도

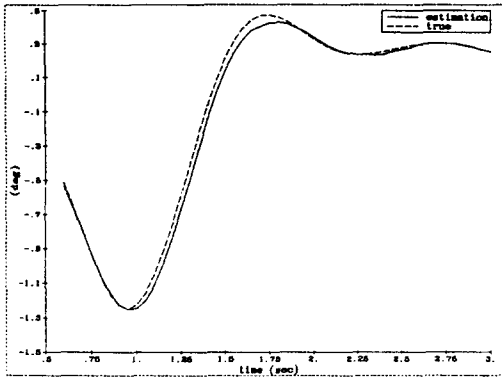


그림 3. TA 좌표계에서 벗어난 방위각

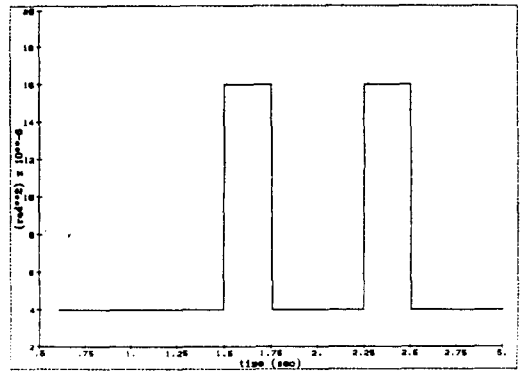


그림 6. 측정치 오차 분산

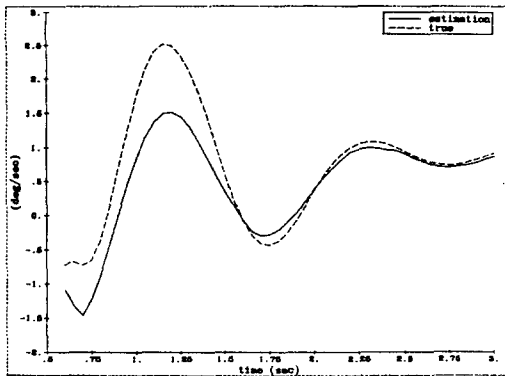


그림 4. MLOS 좌표계의 y 축 각속도