

# 여유자유도를 가진 로봇의 Pre-multiplier 모델에 관한 연구

(A Study on the pre-multiplier model for redundant manipulator)

정 완균\*, 김 진오\*\*, P. Khosla\*\*

(W.K. CHUNG, J.O. KIM)

\* 포항공과대학 기계공학과 (POSTECH, Dept. of Mech. Eng.)

\*\* Robotics Institute, Carnegie-Mellon University

The redundant manipulator extends the application fields of classical nonredundant manipulators. In this paper, we propose Premultiplier Model that describes the static behavior of redundant manipulator. This model provides insight and intuition about algebra and physics related to redundant manipulators. Active operational space stiffness control of redundant manipulators is proved to be always unstable and we propose a technique, based on our methodology, to make stiffness control stable.

## 1. 서론

현재 많이 사용되고 있는 non-redundant 로봇의 여러가지 제약 조건을 극복 하고자 필요한 자유도 이외에 여유 자유도를 가진 로봇에 대한 연구가 많이 진행되고 있다. 여유자유도가 없는 로봇의 경우 공간상에 정해진 위치에 대해서 로봇의 형상이 바뀔 수 없는데 비해 여유자유도를 가진 로봇은 무한대의 형상을 가질 수 있게 된다. 이러한 여유자유도는 여러가지의 목적을 위하여 다양한 조건을 만족시키도록 이용되어지고있으나 로봇에 상당한 유연성을 주는 이 여유자유도는 그 해석과 제어가 복잡해지는 어려운 면이었다.

여유자유도를 가진 로봇이 취할수 있는 다양한 형상(Configuration) 중에서 하나의 최적의 형상을 찾는 것은 적용대상에 따라 달라지며 Nakamura Hanafusa<sup>[1][2]</sup>는 pseudo-inverse를 이용하여 task priority based redundancy control을 하여 여유 자유도를 주어진 성능지수를 최적화하는데 사용하였다. 공간상에서의 위치제어에 있어서 여러가지의 성능지수가 제안되었는데 Yoshikawa<sup>[3]</sup>는 joint limit와 manipulability measure를 증가시키는데 redundancy를 이용하였다. 이러한 kinematic 조건과는 달리 판성항렬을 가증한 generalized inverse를 이용하여 kinetic energy를 최소화하는 조건도 시도되었다. Whitney<sup>[4]</sup>와 Khatib<sup>[5]</sup>는 이러한 kinetic energy를 최소화하였고 Hollerbach와 Suh<sup>[6][7]</sup>는 torque의 한계가 있는 조인트의 torque를 최소화하였다.

위의 대부분의 예들은 공간상의 위치제어에 대한 연구들이며 본

논문에서는 여유자유도를 힘제어를 위하여 이용하기 위한 방법에 대해 기술하고자 한다.

여유자유도가 없는 로봇에 대한 힘 제어 연구는 소위 Active Stiffness control<sup>[8]</sup>, damping control<sup>[9]</sup> 및 Hybrid position/Force control<sup>[10]</sup>등 상당히 많이 연구되었으나 여유자유도 로봇에 대한 힘 제어 방법은 아직 연구가 많이 되어 있지 못하고 있다.

본 논문에서는 여유자유도를 force control에 이용하기 위한 Pre-multiplier model 을 제안하였다. 이에 대한 응용으로써 작업공간에서의 stiffness control을 행하여 stable한 해를 얻었다. 본 연구의 여유자유도를 가진 로봇의 모델은 그림 1. 에 나타내었다. 여기서  $l_1 : l_2 : l_3 = 5 : 3 : 2$  로 정하였다<sup>[11]</sup>.

## 2. Generalized Inverse

먼저 일반적인 rectangular 행렬에 대한 generalized inverse에 대해 언급하고자 한다. 선형계는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$A X = b \tag{1}$$

여기서  $A \in R^{m \times n}$ ,  $b \in R^n$ ,  $X \in R^m$  이고  $rank(A) = K < \min(m,n)$ 이다. 만일  $m = n = k$  이면 다음의 유일해가 존재한다.

$$x = A^{-1} b \tag{2}$$

A 가 singular square이거나 rectangular인 경우  $X = G b$  의 형태인 해를 유도할 수 있는데 만일  $X = G b$  가 식(1)을 consistent하게 하는 어떤 b 에 대해서도 식(1)의 해라면 G는 A 의

inverse의 성질을 가지며  $A$ 의 generalized inverse라 부른다<sup>[12]</sup>. 이 행렬  $G$ 가  $A$ 의 pseudo-inverse가 되기 위해서는 다음의 4조건을 만족시켜야 한다.

$$A G A = A \quad (3)$$

$$G A G = G \quad (4)$$

$$(A G) = A G \quad (5)$$

$$(G A) = G A \quad (6)$$

이제 generalized inverse를  $A$ 로 표시하기로 하고 몇가지의 generalized inverse에 대해 설명 하고자 한다.

### 2-1. Minimum Norm Solution

식(1)이 consistent하면  $K = m < n$ 인 경우를 제외하고는 무한개의 엄밀해를 가진다. 그 중에서 Minimum norm solution은 1개 있으며  $k < m < n$ 의 경우 일반해는 다음과 같이 주어진다.

$$x = G_m b + (I - G_m A) z, \quad z : \text{arbitrary} \quad (7)$$

$$x_p = G_m b \quad (8)$$

$$x_h = (I - G_m A) z \quad (9)$$

$$G_m = A (A A^T)^{-1}, \quad G_{N,m} = N^{-1} A^T (A N^{-1} A^T)^{-1} \quad (10)$$

여기서  $G_m \in R^{n \times m}$ 은 Minimum Norm g-inverse이며  $x_p$ 는  $x_h$ 를 최소화하는 particular solution이고  $x_h$ 는  $A$ 의 null space에 있는 homogeneous solution이 된다. 즉 주어진  $b$ 에 대해 유일한  $x_p$ 가 있고  $x_p$ 에 수직인 무한개의  $x_h$ 가 있게 된다. 이때의 generalized inverse는 식(3)(6)을 만족시킨다.  $G_{N,m}$ 은  $N$  weighted Minimum norm generalized inverse이다.

### 2-2 Least Square Solution

식(1)이 inconsistent하면 엄밀해가 존재하지 않고 이 경우 다음의 residual vector

$$r = b - A x \quad (11)$$

의 적당한 norm으로 근사해를 구할 수 있다. residual vector의 Euclidean norm을 최소화하는 vector는 least square 해가 되며 이때의 일반해는

$$x = G_l b + (I - G_l A) z, \quad z : \text{arbitrary} \quad (12)$$

$$G_l = (A^T A)^{-1} A \quad (13)$$

$$G_{l,M} = (A^T M A)^{-1} A^T M \quad (14)$$

로 주어진다. 만일  $k = n < m$ 인 경우, least square solution은 유일하게 된다. 이때의 g-inverse는 식 (3), (5)를 만족시킨다.  $G_{l,M}$ 은 M-weighted least square g-inverse이다.

### 2.3 Minimum Norm-Least Square solution

식(1)이 inconsistent하면 우리는 least square solution중 가장 근사한 해를 찾을 수 있으며 이때의 g-inverse는 minimum norm-least square solution이 되고  $A^+$ 로 나타내며 Moore-Penrose Pseudo-inverse라고 불린다. 이때  $A^+$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$A^+ = G_m A G_l \quad (15)$$

Minimum N-norm M-least square g-inverse  $A^{+MN}$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$A^{+MN} = G_{m,N} A G_{l,M} \quad (16)$$

### 3. Premultiplier model

각 조인트의 변위가 아주 작은 경우 손끝의 속도는 작업 좌표계에서의 작은 변위로 근사되어지며 이것은 힘 또는 토크로 강성행렬에 의해 관계지어진다. 이들의 관계는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\delta x = J \delta \theta \quad (17)$$

$$\tau = J^T F \quad (18)$$

$$\tau = K_\theta \delta \theta \quad (19)$$

$$F = K \delta x \quad (20)$$

여기서 각 항의 차원은 보통의 관계에 따른다. 이 식들은 서로  $J$  또는  $J^T, K$ 와  $K_\theta$ 에 의해 관련되며 이들 관계는 그림 2에 나타내었다.

주어진  $\delta x$ 에서  $\delta \theta$ 를 구하기 위하여 우리는  $J^{-}$  대신  $\delta x \rightarrow F \rightarrow \tau \rightarrow \delta \theta$ 로 돌아가는 통로를 택하여 premultiply하면서  $J^{-}$ 를 구할 수 있으며 이와 같은 이유로 pre-multiplier model이라 부르기로 한다. 예를 들어 주어진  $K$ 에서  $K_\theta$ 를 구하기 위하여 다음과 같은 경로를 택한다.  $path 2 - 7 - 4 = path 1$

$$\tau = J^T F = J^T K \delta x = J^T K J \delta \theta = K_\theta \delta \theta \quad (21)$$

$$K_\theta = J^T K J \quad (22)$$

를 쉽게 얻게 된다. 이러한 premultiplier model의 장점은  $J$ 의 inverse를 구하지 않고 다른 항들로 표현할 수 있다는 점이며 또한 위의 네식들(17-20)의 관계를 보다 직관적으로 보게 해준다는 점에 있다.

#### 3.1. Nonsingular $K_\theta$ 의 유도

작업좌표계에서 주어진 강성  $K$ 에 대해 각 조인트에 필요한

조인트 강성  $K_0$  를 구하는 문제를 생각해 보자. Salisbury [8] 는 non-redundant 로봇에 대해서 주어진  $K$ 에 대해  $K_0$  를 구함으로써 작업좌표계의 강성을 제어하는 방법을 제안하였다. 그러나 여유자유도가 있는 경우 ( $n > m$ ) 주어진 positive definite 강성  $K$  에 대해  $K_0$  는 항상 singular 하게 된다. 즉  $K_0$  는 positive semi-definite 이며 redundancy의 자유도 만큼 0 의 고유치를 갖는다. 이 positive semi-definite 강성행렬은 진동에서는 rigid body 운동과 관련되고 제어에서는 불안정성과 관련된다. 더우기 식(10)에서 가중 행렬  $N$ 을  $K_0$  로 두어 물리적인 의미를 주었을 경우 식(10)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$G_{m,N} = K_0^{-1} J^T (J K_0^{-1} J^T)^{-1} \quad (23)$$

이 경우 주어진  $K$ 에 대해 구한  $K_0$  가 singular 하므로  $G_{m,N}$  은 정의되지 못하게 되며 여유자유도를 가진 로봇의 경우 Salisbury가 제안한 Active stiffness control은 불안정해져서 사용할 수가 없게 된다. 이 문제를 해결하기 위하여 주어진 대칭 positive definite  $K \in R^{2 \times 2}$  에 대해 non-singular  $K_0 \in R^{3 \times 3}$  를 다음과 같이 유도한다.

식(22)로 부터 구해지는  $J^T K J$  즉  $K_0$  는 singular하며 이것은  $K_{0p}$  라 부르기도 한다. Similarity transform으로 부터 우리는 diagonal 행렬  $D_{0p}$  를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$D_{0p} = E^T K_{0p} E = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

여기서  $E$ 는  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  의 eigenvector로 구성되는 orthonormal 행렬이며 항상

$$\lambda_3 = 0 \quad (25)$$

가 된다. 우리가  $\lambda_3$  를 어떤 값으로 변화를 시켜도  $E$ 의 orthogonality는 변하지 않으며 이를 이용하여 새로운 행렬  $D_0$  를 다음과 같이 구할 수 있다<sup>[13]</sup>.

$$D_0 = D_{0p} + D_{0h} \quad (26)$$

$$= E^T K_{0p} E + h I_3 \quad (h : scalar) \quad (27)$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

이때 새로운 nonsingular 행렬  $K_0$ 는

$$\begin{aligned} K_0 &= E D_0 E^T \\ &= E D_{0p} E^T + E D_{0h} E^T \\ &= J^T k J + h \hat{e}^T \hat{e} \\ &= K_{0p} + K_{0h} \end{aligned} \quad (29)$$

로 구해진다. 여기서  $\hat{e}$ 는  $\lambda_3$ 에 대한 eigenvector이다. 이 행렬  $\hat{e}^T \hat{e}$ 는  $K_{0p}$ 의 평면에 수직인 0이 아닌 고유치를 주게 되며 이렇게 얻어진  $K_0$ 에 대해서 이제 식(23)을 비롯한 inverse가 정의될 수 있게 된다.

### 3.2 Active Stiffness 제어

윗절의 결과를 이용하여 평면 3자유도계 로봇의 active 강성제어를 행하였다. Simulation에 이용된 식은 regulator 문제로 다음과 같이 주어진다.

$$\delta \dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -H^{-1} K_0 & -H^{-1} D \end{bmatrix} \delta q \quad (30)$$

시스템의 안정성은 새로운 고유치를 지정해줌에 의해 불안정한 계를 안정화할 수 있었으며 그 결과를 그림3(a,b)에 나타내었다.  $K_{0p}$ 의 경우 각 joint angle은 발산하였으나 새로운  $K_0$ 를 이용한 경우 그림 3(b)처럼 0으로 regulation 되었다.

### 4. 결론

여유자유도를 가진 로봇의 Jacobian의 generalized inverse 및 redundancy를 표현하는데 Pre-multiplier model을 제안하였다. 이 Pre-multiplier model은 조인트 영역과 작업좌표영역과의 변수들의 관계에 대한 직관적인 해석을 가능하게 해주며 계산양이 많은 행렬의 역변환을 피할 수 있는 길을 제공해준다. 이에 기본을 두어 여유자유도를 갖는 로봇의 active stiffness 제어를 행하였다. Nonredundant manipulator의 경우에 stable한 active 강성제어는 여유자유도를 갖는 로봇에 적용한 경우 항상 불안정해짐을 보였고 이를 해결하기 위하여 새로운 양의 고유치를 주어 안정화시킬 수 있음을 보였다.

#### 참고문헌

- [1] Nakamura Y. and Hanafusa H., "Task priority based Redundancy Control of Robot Manipulator", Robotics Research: the second int. Symp., pp. 155-162, 1985
- [2] Nakamura Y., Kinematical studies on the trajectory control of Robot manipulator, Ph.D. thesis, Kyoto University, 1985

- [3] Yoshikawa T., "Analysis and Control of Robot Manipulators with Redundancy", Robotics Research: the first int. symp., pp 735-747, 1984
- [4] Whitney D.E., "Historical perspective and state of the Art in Robot Force Control", The international Journal of Robotics Research, MIT pp.3-14, vol.6, 1987
- [5] Khatib O., "Dynamic Control of Manipulators in Operational Space", 6th IFToMM Congress on theory of Machines and Mechanisms, pp 1128-1131, 1983
- [6] Hollerbach J.M. and Suh K.C., "Redundancy resolution of manipulator through Torque optimization", IEEE Conf. on Robotics and Automation, pp. 1016-1021, 1985
- [7] Suh K.C. and Hollerbach J.M., "Local and Global Optimization of Redundant manipulator", IEEE Conf. on Robotics and Automation, pp 619-623, 1987
- [8] Salisbury J.K. "Active Stiffness Control of a Manipulator in Cartesian Coordinate", IEEE Conf. on Decision and control, pp 95-100, 1980
- [9] Whitney D.E., "Force feedback control of manipulator fine motion", ASME J. of Dyn. Sys. Meas. and Cont. pp 91-97, 1977
- [10] Raibert M.H. and Craig J.J., "Hybrid position/force Control of manipulators", Trans ASME J. of Dyn. Sys. Meas. and Cont., vol. 102, pp 126-133, 1981
- [11] 정 완균, 이 재우, 장 석훈, 조 동우, 엄 영일, " 7 자유도 직접구동로봇의 몸체 설계", 1989 춘계 기계학회 초록집, pp.474-478
- [12] Rao C.R. and Mitra S.K. Generalized Inverse of Matrices and its application, John Wiley and Sons, 1971

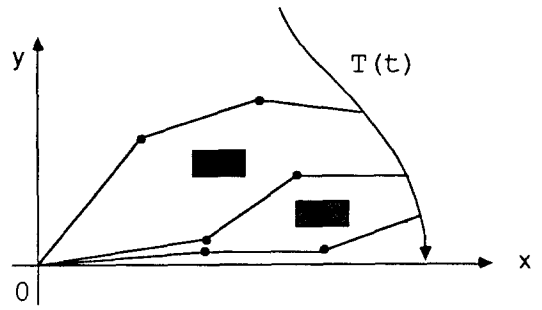


그림 1. 여유자유도 로봇 모델

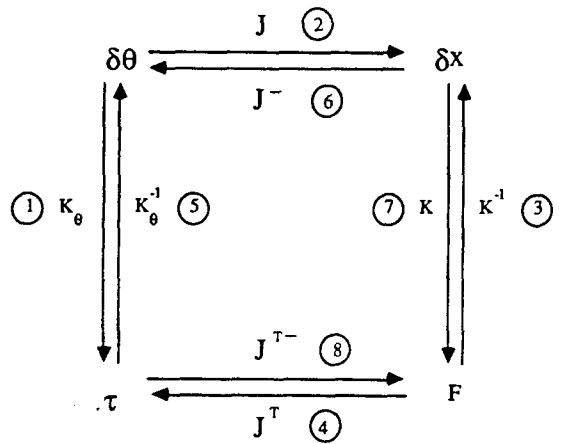


그림 2. pre-multiplier model

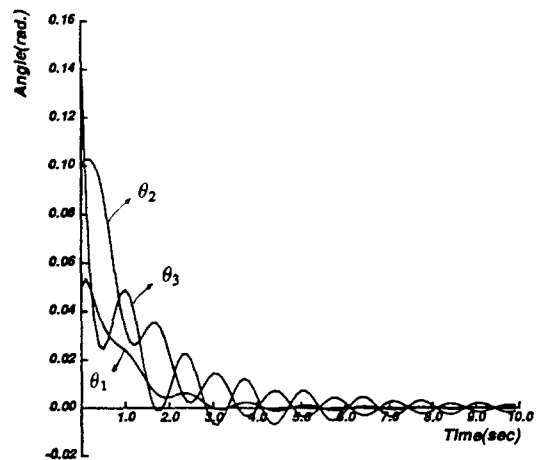


그림 3. 능동 강성제어