

비선형 유압 서보 시스템의 비선형 변환  
및 이에 대한 선형제어에 관한 연구

(Application of the Nonlinear Transformation and Linear State Feedback Control to Nonlinear Hydraulic Servo System)

○ 김 영준\*    장 효환\*\*

\* 고려대학교 기계공학과 대학원  
\*\* 고려대학교 기계공학과

In this paper feedback linearization of valve-controlled nonlinear hydraulic velocity control system is studied. The  $C^\infty$  nonlinear transformation  $T$  is obtained, and it is shown that this transformation is global one. Linear equivalence of nonlinear hydraulic velocity control system is obtained by this global nonlinear transformation, and linear state feedback control law is applied to this linear model. It is shown that this transformation method is superior to the linear approximation by simulation study.

1. 서    론

유압 서보시스템은 비선형 시스템이므로 이를 해석하기 위하여는 선형화가 필요한데 일반적으로 작동점 부근에서의 테일러 급수 전개 방법을 이용하고 있다. 그러나 이 방법은 작동점에서 멀어 질수록 큰 모델링 오차가 존재하게 되며, 특히 위치제어의 경우와는 달리 속도제어의 경우, 그 속도에 맞는 밸브스플의 위치에서 선형화 하지 않으면 항상 모델링 오차가 존재하게 된다. 본 연구에서는 이러한 문제를 해결 하기 위하여 최근 연구가 많이 진행되고 있는 비선형 변환(nonlinear transformation) 방법을 이용 하였다.

비선형 변환은 Krener[1], Brockett[2]의 연구 이후 여러 학자들에 의해 연구되기 시작한 분야로서 상태공간 방법과 미분기하학을 이용하여 선형 시스템과 비선형 시스템이 같은 거동(behavior)을 갖도록 좌표축 변환과 귀환(feedback)을 이용하는 선형화 방법이다. 이러한 제어 방법은 헬리콥터 제어[6] 등에 적용되었다.

이 선형화 모델을 이용하는 방법은 등가 선형모델을 구한 후, 이 등가 선형모델에 선형 제어 방법에 의한 제어기를 선정하고, 원 좌표축으로 변환하면 비선형 제어기를 얻을 수 있다.

본 연구에서는 Hunt, Su, Meyer[3]가 제안한 전체적 변환(Global Transformation) 방법을 서보 밸브 제어방식 유압 속도제어시스템에 적용하여 비선형 변환  $T$ 를 구하였으며, 이 변환이 전체적 변환임을 보였다. 또 이 변환된 등가 선형 모델에 선형 상태 귀환 제어(linear state feedback control) 방법을 적용하여 비선형 제어기를 구했으며 또한 시뮬레이션을 통하여 테일러 선형화 방법과 비교하여 등가 선형 모델의 정확성을 보였다.

2. 비선형 유압 속도제어시스템의 모델링

일반적인 서보밸브 제어방식 유압 속도제어 시스템은 다음과 같이 모델링할 수 있다. 서보밸브 유량 방정식

$$\frac{x_v}{l} = \frac{K_v}{\tau_v s + 1} \quad (1)$$

$$Q_L = C_v x_v \sqrt{P_s - P_L} \quad (2)$$

유압 모터에서의 연속 방정식

$$Q_L = D_m s \theta_m + C_{tm} P_L + \frac{V_t}{4\beta_e} s P_L \quad (3)$$

토크 방정식

$$P_L D_m = J_t s^2 \theta_m + B_m s \theta_m \quad (4)$$

따라서 위의 식들을 상태 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{B_m}{J_t} & \frac{D_m}{J_t} & 0 \\ \frac{4\beta_e}{V_t} D_m & \frac{4\beta_e}{V_t} C_{tm} & \frac{4\beta_e}{V_t} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_v C_v \sqrt{P_s - x_2}}{\tau_v} \end{pmatrix} u \quad (5)$$

3. 유압 속도 제어 시스템의 비선형 변환

(1) 비선형 변환 조건  
비선형 시스템의 수학적인 모델은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + u(t)g(x(t)) \quad (6)$$

여기서  $f$ 와  $g$ 는  $R^n$  공간 내의 open set  $U$ 에서 정의 되는  $C^\infty$  벡터 필드이고  $f(0) = 0$  이다.

정의  
Lie 괄호(Lie bracket)은 다음과 같이 정의된다.

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g \quad (7)$$

연속적 Lie 괄호는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} (\text{ad}^1 f, g) &= [f, g] \\ (\text{ad}^2 f, g) &= [f, [f, g]] \\ &\vdots \\ (\text{ad}^k f, g) &= [f, (\text{ad}^{k-1} f, g)] \end{aligned} \quad (8)$$

$\mathbb{R}^n$ 에서  $\mathbb{C}^\infty$  벡터 필드  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ 의 집합에서 다음과 같은  $\mathbb{C}^\infty$  함수  $\gamma_{ijk}(x)$ 가 존재할 때 involutive라 한다.

$$[f_i, f_j](x) = \sum_{k=1}^r \gamma_{ijk}(x) f_k(x) \quad (9)$$

$$1 \leq i, j \leq r, \quad i \neq j$$

### 정리 [3]

만일 i) 시스템 (6)의 가제어성 행렬이  $\mathbb{R}^n$ 에서 비특이 (nonsingular)이고, ii) 집합  $\{g, [f, g], \dots, (\text{ad}^{n-2} f, g)\}$ 이  $\mathbb{R}^n$ 에서 involutive이고, iii) 변환 T의 Jacobian 행렬이  $\mathbb{C}^\infty$ 에서 비율조건 (ratio condition)을 만족하면, 다음과 같은 특성을 갖는  $\mathbb{C}^\infty$  변환  $T = T(T_1, T_2, \dots, T_{n+1})$ 이 존재한다.

a)  $T(0) = 0$  (10)

b)  $T_1, T_2, \dots, T_n$ 은  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 만의 함수이고,  $\mathbb{R}^n$ 의 각 점에서  $n \times n$  Jacobian 행렬은 비특이이다.

c)  $T_{n+1} = T_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$  (11)

d) T는 시스템 (6)을 다음과 같은 선형 시스템으로 투영(mapping)시킨다.

$$\begin{aligned} \dot{T}_1 &= T_2 \\ \dot{T}_2 &= T_3 \\ &\vdots \\ \dot{T}_n &= T_{n+1} \end{aligned} \quad (12)$$

e) 변환  $T_1, T_2, \dots, T_n$ 은  $\mathbb{R}^n$ 에서 일대일 대응이고 T는  $\mathbb{R}^{n+1}$ 에서 일대일 대응이다.

(2) 유압 속도 제어 시스템의 비선형 변환 i) 가제어성 행렬의 비특이(nonsingular) 조건 비선형 시스템 (6)의 가제어성 행렬은 다음과 같이 표시된다. [5]

$$\{g, [f, g], \dots, (\text{ad}^{n-1} f, g)\} \quad (13)$$

유압 속도 제어 시스템에 대하여 풀면 다음과 같다.

$$\{g, [f, g], (\text{ad}^2 f, g)\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1(x) \\ 0 & \alpha_2(x) & \alpha_3(x) \\ \alpha_4(x) & \alpha_5(x) & \alpha_6(x) \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서  $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_6(x)$ 는 영이 아닌  $x_1$ 의 함수이다. 따라서

$$\text{rank} \{g, [f, g], (\text{ad}^2 f, g)\} = 3$$

이므로, 가제어성 행렬은 비특이이다.

ii) 집합  $\{g, [f, g]\}$ 의 involutive 조건

시스템(5)의 경우, 
$$\{g, [f, g]\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\beta \frac{K_e^2 C_v^2}{V_t \tau_v} \end{bmatrix} = \alpha g \in \text{span}\{g\} \quad (15)$$

그러므로 involutive이다.

i), ii)의 조건을 만족하므로 일단 국소변환 존재조건 (condition of existence of local transformation)이 성립된다. [4] 따라서 비선형 시스템 (6)을 다음의 선형 시스템 (16)으로 국소변환하는  $\mathbb{C}^\infty$  diffeomorphism  $T: (x, u) \rightarrow (z, v)$ 이 존재한다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + bv \\ y &= cz \end{aligned} \quad (16)$$

여기서

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (17)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_1(x, u) &= z_1 \\ T_2(x, u) &= z_2 \\ &\vdots \\ T_n(x, u) &= z_n \end{aligned} \quad (18)$$

이라 놓으면

$$\begin{aligned} \dot{T}_1 &= z_1 = T_2 \\ \dot{T}_2 &= z_2 = T_3 \\ &\vdots \\ \dot{T}_n &= z_n = T_{n+1} = v \end{aligned} \quad (19)$$

따라서

$$\frac{dT_i}{dt} = T_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

그러므로

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial T_i}{\partial u} \frac{du}{dt} = T_{i+1} \quad (21)$$

여기서  $T_1, T_2, \dots, T_n$ 은  $x_1$ 만의 함수이고  $T_{n+1} = T_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ 이므로

$$\frac{dT_i}{du} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

$$\frac{dT_{n+1}}{dt} \neq 0 \quad (23)$$

그러므로

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = T_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

따라서 유압 속도 제어 시스템의 비선형 변환  $T = T(T_1, T_2, T_3, T_4)$ 는 식 (22), (23), (24)의 편미분 방정식을 풀음으로써 다음식과 같이 구할 수 있다.

$$T_1 = x_1 \quad (25)$$

$$T_2 = -\frac{B_m}{J_t} x_1 + \frac{D_m}{J_t} x_2 \quad (26)$$

$$T_3 = \left( \frac{B_m^2}{J_t^2} - \frac{4\beta_e D_m^2}{V_t J_t} \right) x_1 - \left( \frac{B_m D_m}{J_t^2} + \frac{4\beta_e D_m C_{tm}}{V_t J_t} \right) x_2 + \frac{4\beta_e D_m}{V_t J_t} x_3 \quad (27)$$

$$T_4 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 \sqrt{P_s - x_2} u = v \quad (28)$$

여기서

$$c_1 = -\frac{B_m^3}{J_t^3} + \frac{8\beta_e D_m^2 B_m}{V_t J_t^2} + \frac{16\beta_e^2 C_{tm} D_m^2}{V_t^2 J_t^2}$$

$$c_2 = \frac{D_m B_m^2}{J_t^3} - \frac{4\beta_e D_m}{V_t J_t^2} (D_m^2 - B_m C_{tm}) + \frac{16\beta_e^2 C_{tm} D_m}{V_t^2 J_t^2}$$

$$c_3 = -\frac{4\beta_e D_m}{V_t J_t} \left( \frac{B_m}{J_t} + \frac{4\beta_e C_{tm}}{V_t} + \frac{1}{\tau_v} \right)$$

$$c_4 = \frac{4\beta_e D_m K_v C_v}{V_t J_t \tau_v}$$

따라서 식(28)로 부터 제어입력  $u$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u = \frac{v - c_1 x_1 - c_2 x_2 - c_3 x_3}{c_4 \sqrt{P_s - x_2}} \quad (29)$$

그러므로 비선형 유압 속도제어 시스템에 (25)-(28)의 비선형 변환을 적용하면 다음과 같은 선형 시스템을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (30)$$

iii) 변환  $T$ 의 Jacobian의  $R$ 에서의 비율조건 (ratio condition)  
변환  $T$ 의 Jacobian은 다음 식과 같다.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{B_m}{J_t} & \frac{D_m}{J_t} & 0 \\ \frac{B_m^2}{J_t^2} - \frac{4\beta_e D_m^2}{V_t J_t} & -\frac{B_m D_m}{J_t^2} - \frac{4\beta_e D_m C_{tm}}{V_t J_t} & \frac{4\beta_e D_m}{V_t J_t} \end{pmatrix} \quad (31)$$

식(31)의 leading principal minor는 다음과 같다.

$$|\Delta_1| = 1 \geq \epsilon,$$

$$\frac{|\Delta_2|}{|\Delta_1|} = \frac{D_m}{J_t} \geq \epsilon,$$

$$\frac{|\Delta_3|}{|\Delta_2|} = \frac{4\beta_e D_m}{V_t J_t} \geq \epsilon \quad (32)$$

따라서 비율조건을 만족한다. 그러므로 변환  $T$ 는  $\mathbb{R}^3$ 에서  $\mathbb{R}^3$ 으로 일대일 대응이고, 또한 국소변환존재 조건을 만족하므로 유압 시스템의 비선형 변환  $T=(T_1, T_2, T_3, T_4)$ 는 전체적 변환이다. [3]

#### 4. 선형 상태귀환 제어 (linear state feedback control) [7]

가재어성 선형 상태 방정식에서 상태귀환 입력을 사용하여 원하는 동특성을 얻는 방법은 다음과 같다.

선형 상태방정식

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + bv \\ y &= cz \end{aligned} \quad (33)$$

상태귀환입력

$$v = -Lz + r \quad (34)$$

따라서 전체 폐회로 시스템의 식은 다음과 같다.

$$y = c(sI - A + bL)^{-1}br \quad (35)$$

식(35)에서 보는 바와 같이 전체 시스템의 동특성은  $\det(sI - A + bL)$ 에 의하여 정해진다. 따라서 원하는 폴을  $-\alpha, -\beta, -\gamma$ 에 위치 시키려면 상태귀환 이득  $L$ 은 다음 식(36)으로 결정된다.

$$L = [l_1 \quad l_2 \quad l_3] \quad (36)$$

여기서

$$\begin{aligned} l_1 &= \alpha\beta\gamma \\ l_2 &= \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \\ l_3 &= \alpha + \beta + \gamma \end{aligned}$$

그러므로 유압 속도제어 시스템의 선형 상태귀환 입력은 다음과 같다.

$$v = -Lz + r \quad (37)$$

$$= r + [-l_1 + \frac{B_m}{J_t} l_2 - (\frac{B_m}{J_t} - \frac{4\beta_e D_m^2}{V_t J_t}) l_3] x_1$$

$$+ [-\frac{D_m}{J_t} l_2 + (\frac{B_m D_m}{J_t^2} + \frac{4\beta_e D_m C_{tm}}{V_t J_t}) l_3] x_2 - \frac{4\beta_e D_m}{V_t J_t} l_3 x_3$$

따라서 식(37)을 식(29)에 대입하면 원하는 제어입력을 구할 수 있다.

## 5. 결과 및 고찰

시뮬레이션을 통하여 본 연구에서 비선형 변환된 선형 모델과 테일러 급수 전개에 의한 선형 모델의 응답특성을 비교하였다.

시뮬레이션에 사용된 시스템은 문헌[8]에 사용된 시스템으로서, 서보밸브는 정격유량이 70 atg에서 9.44 l/min인 MOOG series 62 이고, 유압모터는 배제용적 12.9 cc/rev인 내접 치차형이다.

제어방법은 양 모델 공히 4절에서 고려한 상태 귀환 제어 방법을 사용하였고, 폐회로 풀은 임의로 -50, -100, -200을 선정 하였으며, 기준입력속도는 각각 100, 300, 500 [rpm]의 계단입력을 사용하였다. 이에 대한 시간응답을 Fig.1에 도시 하였다.

Fig.2는 비선형 변환에 의한 선형 모델의 시간응답이다. Fig.1과 비교할 때 초기에 약간의 오버슈트가 존재하나, 전체적으로 유사한 시간응답을 보여주며, 기준입력 속도가 변화 하여도 정상상태오차가 없이 잘 추종함을 알 수 있다. 초기의 오버슈트는 파라미터에 존재하는 오차 때문으로 추정되며 계속적인 연구중에 있다.

Fig.3은 테일러 급수 전개에 의한 선형 모델의 시간응답이다. 같은 제어기를 사용하였을 때 각각의 정상상태 오차는 1.25, 11.22, 31.1 [rpm]이다. 따라서 작동점이 선형화 한 점에서 멀어질수록 정상상태 오차가 존재함을 알 수 있다.

이와같은 고찰에서 비선형 변환에 의한 선형 동가 모델이 테일러 급수전개에 의한 선형화 모델보다 정확하게 실제시스템에 근접함을 알 수 있다.

## 6. 결론

비선형 유압 속도 제어 시스템에 비선형 변환이론을 적용하였다. 밸브 제어방식 유압 속도 제어 시스템이 전체적 변환(Global transformation)이 가능함을 보였고, 비선형 모델을 선형표준형으로 변환하는  $C^{\infty}$  변환 T를 구하였다. 여기서 구한 선형모델에 선형제어이론을 적용하는 방법을 보였으며, 이에 대한 응답특성을 시뮬레이션을 통하여 테일러 급수전개에 의한 선형모델과 비교하여 전자의 우수성을 보였다.

## 7. 참고문헌

- [1] A.J.Krener, "On the Equivalence of Control Systems and the Linearization of Nonlinear Systems, SIAM J Contr., vol.11, no.4, 1973, pp 670-676
- [2] R.W.Brockett, "Feedback Invariants for Nonlinear Systems, IFAC Congress, Helsinki, 1978
- [3] L.R.Hunt, R.Su, & G.Meyer, "Global Transformations of Nonlinear Systems", IEEE Trans. on AC, vol. AC-28, no.1, Jan., 1983, pp 24-31
- [4] R.Su, "On the Linear Equivalents of Nonlinear Systems", Sys. & Contr. Letters, vol.2, no.1, Jul., 1982, pp 48-52

- [5] L.R.Hunt, M.Lusic, & R.Su, "Exact Linearization of Input output Systems", Int. J. Contr., vol.43, no.1, 1986, pp 247-255
- [6] G.Meyer, R.Su, & L.R.Hunt, "Application of Nonlinear Transformations to Automatic Flight Control", Automatica, vol.20, no.1, 1984, pp 103-107
- [7] K.J.Åström & B.Wittenmark, "Computer Controlled Systems", Prentice-Hall, 1984
- [8] 장효관, 안병천, 김영준, "마이크로 컴퓨터에 의한 전기유압 서보 시스템의 속도제어", 대한기계학회 논문집, 제12권, 제2호, 1988, pp 221-230

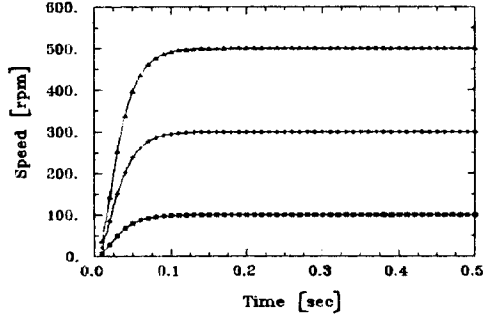


Fig.1 Time Responses of the System

$$G(s) = \frac{1000000}{(s+50)(s+100)(s+200)}$$

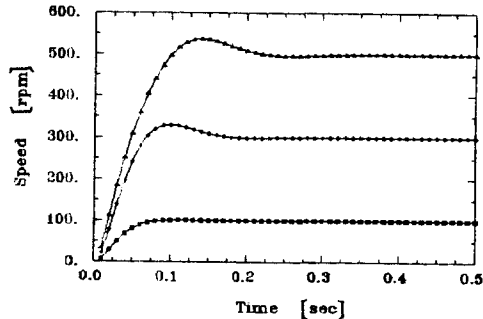


Fig.2 Time Responses of Nonlinear Transformed Linear Model with State Feedback Controller (Assigned poles are -50,-100, and -200)

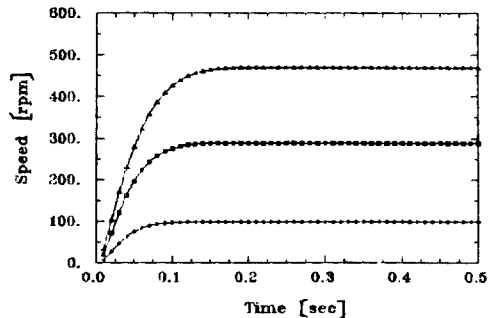


Fig.3 Time Responses of Linear Approximated Model with State Feedback Controller (Assigned poles are -50,-100, and -200)