'89 韓國自動制御學術會議論文集 1989. 10. 27~28

비선형 공정의 적응제어 방법

(An Adaptive Control Method for the Nonlinear Process)

°노 군* 윤 인 섭* 여 영 구** 송 형 근**
(K. Lo, E. S. Yoon, Y. K. Yeo, H. K. Song)

* 서울대학교 화공과(Seoul National Univ., Dept. of Chem. Eng.)
** 한국과학기술연구원 화학공정실(KIST, Chemical Process Lab.)

Abstract. Under the condition of stable inverse a bilinear model predictive control method for SISO and MIMO system with time delay is derived. For processes subject to a bounded disturbance the proposed control method with a classical recursive adaptation algorithm was shown to be stable in the sense of the convergence of parameter estimates and the boundedness of the control error. Several simulation results demonstrate the characteristics of the proposed bilinear model predictive control method.

1. 서 론

공정 제어에 bilinear 모델을 이용하는 데에는 여러가지 요인이 있다. 실제 대부분의 공정들, 특히 열전달, 증류. 그리고 발열반응등의 화학 공정은 본질적으로 bilinear 한 특성을 지닌다. 열전달계수가 제어변수인 공정의 경우 에너지 수지식에 유량과 온도의 곱이 포함되며, 연속회분 반응기 제어의 경우에도 bilinear 근사 모델이 이용된다 (Cebuhar and Costanza,1984). 증류공정 역시 bilinear모델로 표현할 수 있다. Espana 와 Landau 는 1978년에 증류탑의 상태공간 bilinear 모델을 유도하였다. 공정의 특성이 bilinear 하지 않은 비선형 공정의 경우에도 그 공정에 대한 bilinear 근사모델이 Volterra 급수와 같은 일반적인 비선형 모델보다 수학적으로 간편할 뿐만 아니라 선형모델에 의한 공정의 표현에 비해 더 정확한 공정모델이 될 수 있다. 일반적인 비선형 공정에 선형모델을 이용한 제어를 수행하는 경우 동특성상 등가의 bilinear 모델을 표현하는 방법에 대한 연구결과가 Lo 에 의해 1975년 발표되었다.

Bilinear 공정의 적응제어 방법에 대해서는 지금까지 몇몇 연구 결과가 발표되었다. 실제 공정제어에 응용되기 위해서는 정확한 bilinear 모델이 필수적이다. Mohler 는 1973년 원자력 반응기의 제어에 그리고 Wang 과 Dorato 는 1983년 태양열 난방 장치의 최적제어에 각각 bilinear모델을 이용하였다. Biran 과 McInnis 는 1979년 암치료제의 시간에 따른 효과 변화의 bilinear 모델을 이용한 최적제어 연구결과를 발표하였다.

최근 모델 예측제어 기법에 대한 많은 연구결과를 바탕으로 본 연구에서는 SISO 및 MIMO 시스템의 bilinear 모델 예측제어 방법에 기초한 적응제어 방법을 제시하고 공정 모사를 통해 제시된 제어기의 특성을 설명한다.

2. Bilinear 모델 예측제어

선형모델 예측제어 기법은 프랑스(Richalet, 1978)와 미국(Cutler and Ramaker, 1980)에서 각기 독자적으로 개발되었다. 모델 예측제어기의 구조는 그림 1.과 같다.

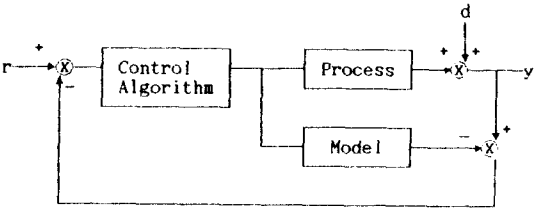

그림 1. 모델 예측 제어기의 구조

Bilinear 모델 예측제어 방법은 기존의 선형모델 예측제어 방법을 바탕으로 하고 있으며 공정의 모델이 비선형 bilinear 모델이라는 점에서 기존의 모델 예측제어 방법과 구별된다. 제어 대상 공정의 이산형 MIMO bilinear 모델의 형태는 다음과 같다.

$$\hat{Y}(k) = \sum_{i=1}^{N} \{ \hat{A}_i Y(k-i) + \sum_{j=1}^{m} \hat{B}_{ij} Y(k-i) u_j(k-i-\tau) + \hat{C}_i U(k-i-\tau) \} \quad (1)$$

여기서 $Y(k)$ 와 $\hat{Y}(k)$는 각각 nx1 의 공정출력과 모델출력 벡터이고 $U(k)$는 mx1 의 제어입력 벡터이다.한편 $\hat{A}_i$, $\hat{B}_{ij}$ 와 $\hat{C}_i$ 는 각각 nxn, nxn 그리고 nxm 의 모델 파라메터 행열들을 나타낸다. 시간 지연 τ 는 $\tau = \min \tau_{ij}$ 로 정의되며 이때 i 와 j 는 각각 $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$의 조건을 만족하며 알고있다고 가정한다.

현시점 k 의 제어입력이 공정출력에 반영되는 $k+\tau$ 시간 이후 p 개의 출력 예측 구간내에서의 공정출력과 출력목표치 Y_d 간의 편차의 제곱의 합과 현시점으로부터 p 개의 구간내의 제어입력의 제곱의 합을 최소화하는 제어입력을 구하기위해 다음과 같은 목적함수를 정의한다.

$$J = \sum_{i=1}^{p} \{ \Gamma_i \| Y_d(k+\tau+i) - \hat{Y}(k+\tau+i) \|^2 + \Theta_i \| U(k+i-1) \|^2 \} \quad (2)$$

Y_d 는 nx1 의 출력목표치 벡터이고 U 는 mx1 의 제어입력 벡터이며, 출력 가중치 행열과 입력 가중치 행열

을 각각 Γ_i, θ_i로 나타낸다. p=1 인 경우에 대해 목적함수 식 (2) 를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$J = [Y_d(k+\tau+1) - \hat{Y}(k+\tau+1)]^T \Lambda [Y_d(k+\tau+1) - \hat{Y}(k+\tau+1)] + U^T(k) B U(k) \quad (3)$$

여기서,

$\Lambda = \mathrm{diag}\{ \gamma_1^2, \gamma_2^2, \cdots, \gamma_{n-1}^2, \gamma_n^2 \}$,

$B = \mathrm{diag}\{ \beta_1^2, \beta_2^2, \cdots, \beta_{m-1}^2, \beta_m^2 \}$ 인

가중행렬이다.
예측출력 $\hat{Y}(k+\tau+1)$ 을 일반화하여 표시하면 다음 식 (4) 와 같다.

$$\hat{Y}(k+\tau+1) = Q + H + Z + (\hat{C}_1 + R)U(k) \quad (4)$$

식 (3) 의 목적함수를 최소화하는 제어입력을 구하기 위해 J 를 U 로 미분한 값이 0 이 되는 U 를 구하고 식 (4) 의 관계를 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U(k) = [(R + \hat{C}_1)^T \Lambda (R + \hat{C}_1) + B]^{-1} (R + \hat{C}_1)^T \Lambda \cdot \{Y_d(k+\tau+1) - Q - H - Z\} \quad (5)$$

여기서,

$$R = [\hat{B}_{11}\hat{Y}(k+\tau) \cdots \hat{B}_{1m}\hat{Y}(k+\tau)]$$

$$Q = \hat{A}_1\hat{Y}(k+\tau) + \cdots + \hat{A}_N\hat{Y}(k+\tau-N+1) + E(k)$$

$$H = \hat{B}_{21}\hat{Y}(k+\tau-1)u_1(k-1) + \cdots + \hat{B}_{2m}\hat{Y}(k+\tau-1)u_m(k-1) + \cdots + \hat{B}_{N1}\hat{Y}(k+\tau-N+1)u_1(k-N+1) + \cdots + \hat{B}_{Nm}\hat{Y}(k+\tau-N+1)u_m(k-N+1)$$

$Z = \hat{C}_2U(k-1) + \cdots + \hat{C}_NU(k-N+1)$ 이다.

SISO 시스템인 경우 식 (5) 의 제어입력은 다음과 같이 간단해진다.

$$u(k) = \{\hat{b}_1\hat{y}(k+\tau) + \hat{c}_1\}[y_d(k+\tau+1) - \{ y(k) - \hat{y}(k) \} - \hat{a}_1\hat{y}(k+\tau) - \sum_{i=2}^{m}\{ \hat{a}_i\hat{y}(k+\tau+1-i) + \hat{b}_i\hat{y}(k+\tau+1-i)u(k+1-i) + \hat{c}_iu(k+1-i) \}] / [\{ \hat{b}_1 \hat{y}(k+\tau) + \hat{c}_1\}^2 + \beta] \quad (6)$$

여기서 $\beta = \beta_1^2 / \gamma_1^2$ 이다. 적응 예측제어에서는 식(6) 의 파라메터들이 각 샘플링 시간에서 추정된 값들로 대치된다.

3. Bilinear 모델 적응제어

선형 모델을 이용한 적응제어 방법에 대한 연구결과를 바탕으로 1977년 Jonescu 는 확장오차(augmented error) 기법을 이용하여 bilinear 모델 적응제어 방법을 제시하였다. 이 방법은 합 과 곱 형태의 두가지 제어입력이 가해지는 구조를 갖고 공정에 교란이 도입되지 않아야하는 제약조건을 갖는다. 한편으로는 선형 자기 동조제어 (self-tuning control) 기법을 토대로 1981년 Svoronos 등은 bilinear 자기 동조제어에 대한 연구 결과를 발표하였다. 이 연구결과에서는 교란이 도입된 공정의 경우에 대한 제어가 가능하지만 국부적인 안정성만이 입증되었다. 한편 1983년 Ohkawa 와 Yonezawa 의 deadbeat 알고리즘을 이용한 모델 적응제어에 관한 연구는 교란이 도입되지 않는 공정의 경우만을 다루고 있다.

본 연구에서는 방정식 오차법을 이용한 공정 인식 알고리즘을 이용한 bilinear 모델 적응제어 방법을 제시하였다. 선형모델 적응제어 방법도 이 방법의 특수한 경우로 포함되며 모든 연구 결과가 직접적으로 선형모델 적응제어 방법에 적용될 수 있다.

공정 인식을 위해 SISO bilinear 공정을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y(k) = P^TX(k-1) + d(k) \quad (7)$$

여기서 교란 d(k)가 D 로 제한된다고 가정하고 P 와 X 가 다음과 같이 정의되는 경우

$$P = [a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n, c_1, \cdots, c_n]^T$$

$$X(k-1) = [y(k-1), \cdots, y(k-n), y(k-1)u(k-\tau-1), \cdots, y(k-n)u(k-\tau-n), u(k-\tau-1), \cdots, u(k-\tau-n)]^T$$

식 (7) 과 같이 bilinear 공정 모델을 표시하면 다음과 같다.

$$\hat{y}(k|k) = \hat{P}^T(k)X(k-1) \quad (8)$$

또는

$$\hat{y}(k|k) = \hat{P}^T(k-1)X(k-1) \quad (9)$$

여기서 SISO bilinear 모델 파라메터는 다음과 같다.

$$\hat{P}(k) = [\hat{a}_1(k), \cdots, \hat{a}_n(k), \hat{b}_1(k), \cdots, \hat{b}_n(k), \hat{c}_1(k), \cdots, \hat{c}_n(k)]^T$$

인식오차 (Identification error) $\tilde{P}(k)$ 와 출력오차 (output error) e(k),e*(k)는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{P}(k) = \hat{P}(k) - P \quad (10)$$

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k|k) \quad (11)$$

$$e^*(k) = y(k) - \hat{y}(k|k-1) \quad (12)$$

공정 인식에 이용할 Identification 알고리즘은 다음과 같다.

$$\hat{P}(k) = \hat{P}(k-1) + \xi(k-1)X(k-1)e^*(k) \quad (13)$$

$$\xi(k-1) = \begin{cases} \dfrac{2\delta(k)[\phi(k)-1]}{\phi(k) \| X(k-1) \|^2 + \theta(k)} & \phi(k) > 1 \\ 0 & \phi(k) \le 1 \end{cases} \quad (14)$$

여기서

$\phi(k) = | e^*(k) | / 2D$

$0 < \theta(k) < R_1 < \infty$

$\delta(k) = 1/2[1-1/\phi(k)]$ 인 경우

다음 정리 1.은 stable inverse 한 비선형 bilinear 공정이 stable 함을 보인다.

정 리 1. 식 (6) 의 제어 알고리즘과 식 (13) 과 식 (14) 로 구성된 적응제어 시스템은 안정하며 (즉,

output 이 bound 되며) 제어오차는 4D로 bound 되고 identification 오차는 수렴한다.

(증 명) 제어오차 $\varepsilon(k)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\varepsilon(k) = e(k-1) - e^*(k)$$

$$= [\bar{P}(k-1)-\bar{P}(k)]^T X(k-1) + e(k-1) - e(k)$$

Schawartz 의 부등식과 삼각 부등식으로 부터 다음 관계가 성립된다.

$$| \varepsilon(k) | \le \| \bar{P}(k-1)-\bar{P}(k) \| \| X(k-1) \|$$

$$+ | e(k) | + | e(k-1) |$$

위의 관계식에서 만일 $\| X(k-1) \|$ 가 bound 되어 있지 않다면 다음의 부등식이 성립된다.

$$| \varepsilon(k) | > W_1 \| X(k-1) \| + W_2$$

여기서 W_1 와 W_2 는 상수이다. 위의 두개의 부등식으로 부터 다음의 관계식이 성립됨을 알 수 있다.

$$W_1 \| X(k-1) \| < \| \bar{P}(k-1) - \bar{P}(k) \| \| X(k-1) \| +$$

$$| e(k) | + | e(k-1) | - W_2 \qquad (15)$$

식 (13) 의 identification 알고리즘의 성질을 이용하면 다음 관계가 성립됨을 알 수 있다.

$$\lim_{k\to\infty} \| \bar{P}(k-1) - \bar{P}(k) \| = 0$$

이는 식 (15) 의 결과에 위배된다. 따라서 $\| X(k-1) \|$ 가 bound 되지 않는다는 가정은 성립될 수 없으므로 시스템은 안정하다.
또한, $| \varepsilon(k) | \le | e^*(k) | + | e(k-1) |$ 이고 $\| X(k-1) \|$ 이 bound 되어 있으므로 identification 알고리즘 식 (13) 의 성질로 부터

$$\lim_{k\to\infty} | \varepsilon(k) | \le 2D + 2D = 4D$$ 임을 알 수 있다.

또한, 공정에 bound 된 교란이 도입되어 있으므로 identification 오차가 수렴한다. □

Martin 등이 1984년에 발표한 결과와 비교해 보면 교란이 도입되지 않는 경우나 일정한 크기의 교란이 도입되는 경우, 본 연구에 사용된 적응 제어 알고리즘이 오차 허용범위는 크지만 성능면에서는 기존의 방법과 동일하거나 오히려 더 좋은 결과를 보인다.

정 리 2. Stable inverse 한 공정에 그 크기가 일정한 교란이 도입되는 경우 식 (6), 식 (13) 및 식 (14) 로 구성된 제어 시스템은 안정하며(즉, output 이 bound 됨) 제어오차는 4D 로 bound 되고 identification 오차는 수렴한다. 만일 output 이 일정한 값으로 수렴하면 제어오차는 0 으로 수렴한다.

(증 명) 정리 1. 의 증명을 이용하면 제어 시스템은 안정하고 제어오차가 4D로 bound 됨을 알 수 있다. 제어오차를 표시하면 다음과 같다.

$$\varepsilon(k) = \hat{y}(k-1) - \hat{y}(k-1|k-1) + \hat{y}(k|k-1) - y(k)$$

일정한 크기의 교란이 도입되고 output 이 수렴함을 가정하였으므로 식 (13) 의 identification 알고리즘의 성질로 부터

$$\lim_{k\to\infty} y(k-1) = \lim_{k\to\infty} y(k)$$

또한,

$$\lim_{k\to\infty} \hat{y}(k-1|k-1) = \lim_{k\to\infty} \hat{y}(k|k-1)$$

따라서

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon(k) = 0$$ 이다.

그러므로 제어오차는 0 으로 수렴한다. □

정 리 3. Stable inverse 한 공정에 교란이 도입되지 않는 경우 식 (6), 식 (13) 및 식 (14) 로 구성된 제어 시스템은 안정하며 (즉, output 이 bound 됨) 제어오차는 0 으로 수렴하고 identification 오차는 수렴한다.

(증 명) 정리 2. 에서 D=0 인 특수한 경우이므로 정리 2. 를 이용할 수 있다. Identification 오차의 수렴성과 안정성은 교란과 무관하다. 정리 1. 로 부터 제어오차는 0 으로 수렴한다. □

공정에 도입되는 교란은 대개 두 가지로 특성을 지니고 있다. 한 가지는 그 변화의 폭이 작고 급속히 변화하는 형태이고 다른 한 가지는 그 변화 속도가 느린 형태이다. 다음은 제시된 bilinear 모델 적응 예측제어의 모사결과를 보인다. 제안된 비선형 제어 방법은 특히, 제어 시스템의 settling time 전반에 걸쳐 크기가 큰 일정한 교란이 도입되는 경우의 공정에 대해 가장 좋은 결과를 보인다.

4. 수치 모사 결과

MIMO case

앞서 제시된 MIMO bilinear 모델 예측제어 방법의 성능을 수치 모사를 통해 확인했다. 실제 공정에 응용하는 경우, 제어의 대상이 되는 비선형 공정의 구조는 알려지지 않는 것이 일반적이다. 그러나 수치 모사를 위해 일정한 교란이 도입되는 bilinear 공정을 가정하여 모사 실험의 대상으로 삼았다. 대상 공정은 2x2 의 MIMO bilinear 공정으로 이에 대해 공정과 모델이 정확하게 일치하는 경우를 우선 모사하여 고찰하고 이후 공정과 모델간의 불일치가 존재하는 경우를 모사하여 튜닝 파라메터들의 영향에 대해 고찰하였다. 두 경우 모두 교란 D(k) 는 $[0.5\ 0.5]^T$ 이고 출력목표치는 시간 k 에 따라 다음과 같이 변화한다.

$$Y_d(k) = \begin{cases} [0\ 1]^T & ; k<45 \\ [1\ 0]^T & ; k\ge 45 \end{cases}$$

그리고 출력오차와 제어입력 가중 행열인 Λ 와 B 는 상수로 하여 모사하였다.

예 제 1. 공정과 모델이 완벽하게 일치되는 경우로 시간 지연 τ 는 3 으로 미리 알고 있다. 공정과 모델은 모두 다음 식으로 표시된다.

$$Y(k) = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 \end{bmatrix} Y(k-1) + \begin{bmatrix} 0.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.4 \end{bmatrix} Y(k-2)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 1.2 \end{bmatrix} Y(k-2)u_1(k-4)$$

$$+ \begin{bmatrix} -0.12 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 \end{bmatrix} Y(k-2)u_1(k-4) +$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1.5 \end{bmatrix} U(k-4) + \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ -1.4 & 0.6 \end{bmatrix} U(k-5)$$

$$+ D(k) \qquad (16)$$

그림 2. 와 그림 3. 은 예제 1. 의 공정을 모사한 결과를 나타낸다. 시간에 따라 공정의 출력이 출력 목표치에 편차없이 수렴함을 확인할 수 있다.

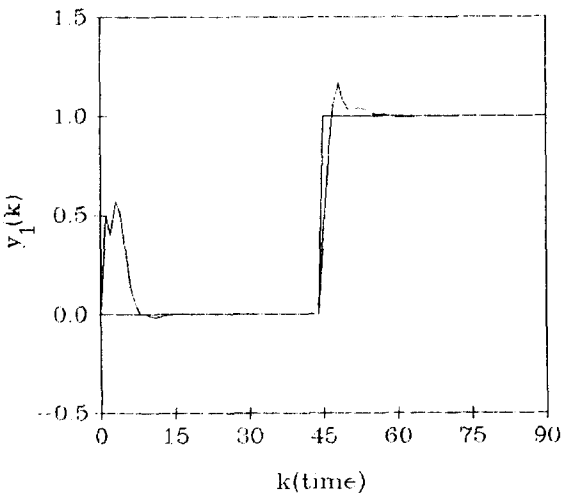

그림 2. 완전 모델에 대한 출력 y_1

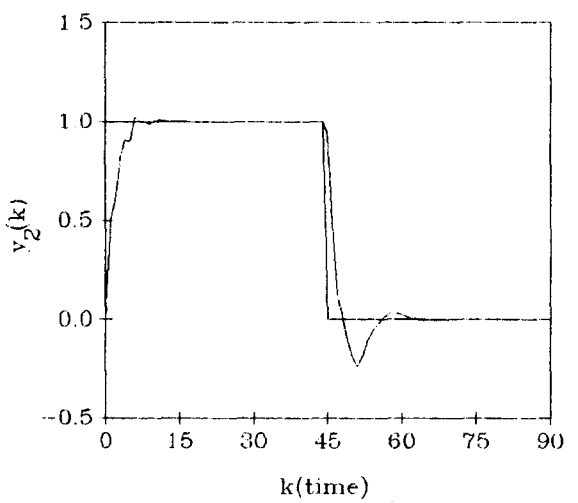

그림 3. 완전 모델에 대한 출력 y_2

<u>예 제 2.</u> 제어 대상이 되는 공정은 식 (15)와 같고 모델 예측제어에 이용될 모델은 다음과 같다. 식 (16)과 정확히 일치 되지 않는 모델이 모델을 이용한 예측 제어의 일반적인 경우이다.

$$Y(k) = \begin{bmatrix} -0.16 & 0.0 \\ 0.0 & 0.21 \end{bmatrix} Y(k-1) + \begin{bmatrix} 0.24 & 0.0 \\ 0.0 & 0.36 \end{bmatrix} Y(k-2)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.48 & 0.0 \\ 0.01 & 1.16 \end{bmatrix} Y(k-1)u_1(k-4)$$

$$+ \begin{bmatrix} -0.11 & 0.02 \\ 0.01 & 0.27 \end{bmatrix} Y(k-2)u_1(k-4) +$$

$$\begin{bmatrix} 3.8 & 1.05 \\ 1.6 & 1.7 \end{bmatrix} U(k-4) + \begin{bmatrix} 2.2 & 0.43 \\ -1.31 & 0.52 \end{bmatrix} U(k-5)$$

그림 4. 와 그림 5. 는 예제 2. 의 모사결과를 나타낸다. 비록 모델이 부정확할지라도 공정의 출력이 출력 목표치에 편차없이 접근함을 확인할 수 있다.

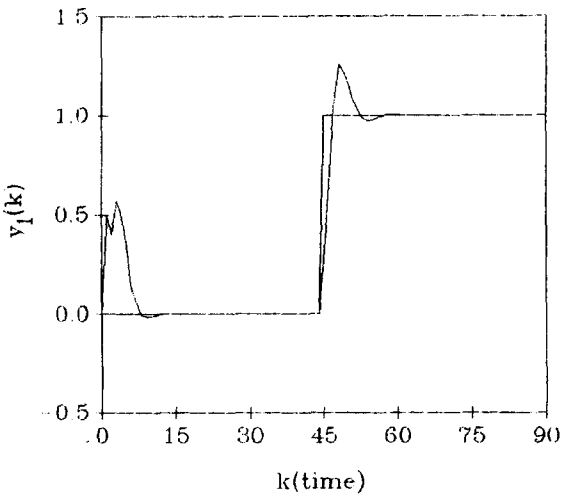

그림 4. 불완전 모델에 대한 출력 y_1

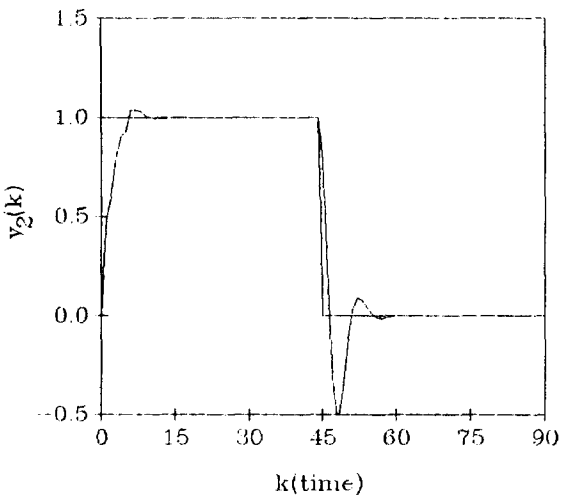

그림 5. 불완전 모델에 대한 출력 y_2

<u>Adaptive SISO case</u>

앞서 제시된 적응 제어 방법을 확인하기 위하여 SISO bilinear 공정에 대한 적응 제어를 모사했다.

시간 k = 0 이전에는 공정의 출력은 0 이고 입력과 교란이 도입되지 않는다. k = 0 인 순간부터 공정에 모델 파라메터의 인식을 위해 교란이 도입된다. 모든 모델 파라메터의 초기값은 0.15 이고 출력 목표치는 k = 90 이전에는 0 이고 이후 1 로 변화된다. 각각의 경우에 있어서 추정된 교란의 변화범위 , D 는 실제 공정의 교란의 변화범위로 한다. 식 (6), 식 (13) 및 식 (14) 로 구성된 제어 시스템에서 $\theta(k)$=0.01 이다. 제어 대상 공정은 다음과 같은 bilinear 공정이다.

$$y(k) = 1.2y(k-1) - 0.8y(k-2) + 0.2y(k-1)u(k-1) + u(k-1) + 0.6u(k-2) + d(k)$$

예 제 1. 공정에 도입되는 교란은 평균값이 0 인 백색 노이즈이다. 즉, d(k)=0.05r(k) 이고 이때 r(k) 는 $-1.0 \le r(k) \le 1.0$ 이다. 그림 6. 과 그림 7. 은 예제 1. 의 모사 결과이다. 정리 2.에서와 같이 제어 오차가 4D(=0.2)로 bound 됨을 확인할 수 있다.

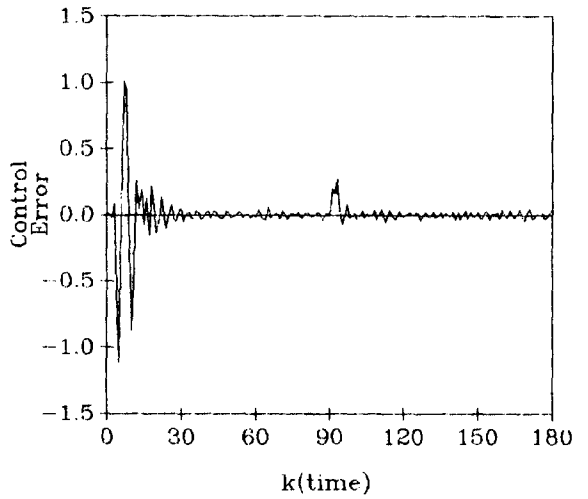

그림 6. 제어오차 : d(k)=0.05r(k)

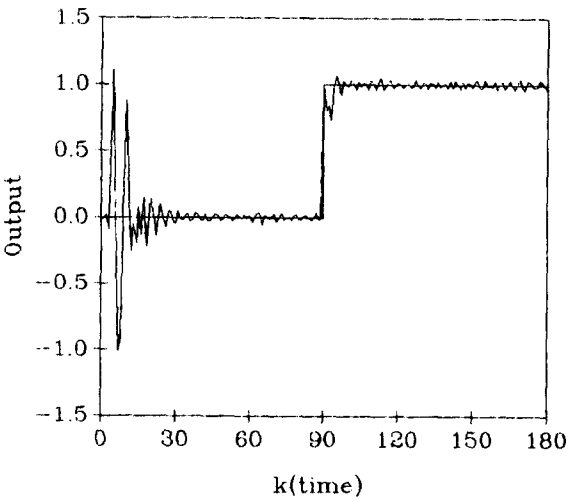

그림 7. 출 력 : d(k)=0.05r(k)

예 제 2. 공정에 일정한 크기의 교란 d(k)=0.2 가 도입되는 경우에 대한 모사결과가 그림 8. 과 그림 9. 에 도시되었다. 공정의 출력이 일정한 값으로 수렴하므로 정리 2.에 따라 제어 오차가 0 으로 수렴함을 확인할 수 있다.

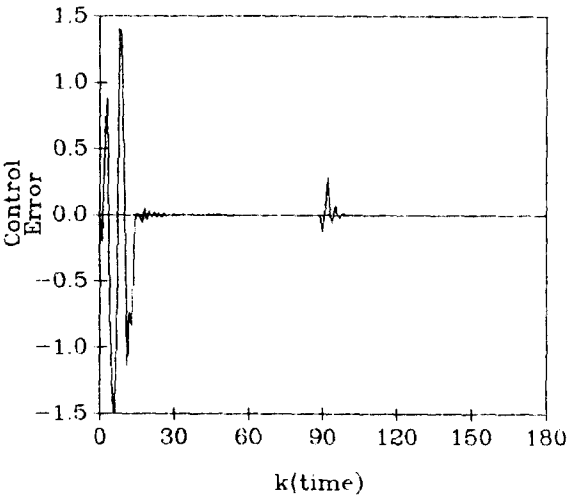

그림 8. 제어오차 : d(k)=0.2

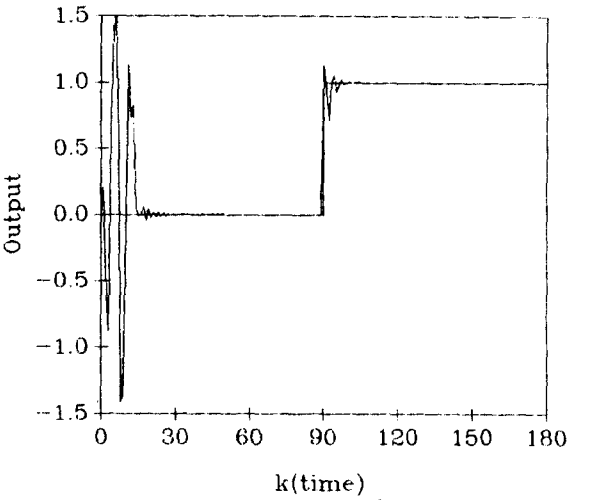

그림 9. 출 력 : d(k)=0.2

예 제 3. 공정에 도입되는 교란이 예제 1. 과 예제 2. 의 경우가 복합된 형태인 경우, 즉, d(k) = 0.2 + 0.05r(k) 이다. 그림 10. 과 그림 11. 의 결과를 살펴보면 정리 1. 에 따라 제어오차가 4D(=0.8) 로 bound 되어야하나 약 0.2 정도로 bound 됨을 알 수 있다. 이는 교란에 포함된 백색 노이즈 성분만이 반영된 bound 임을 알 수 있다.

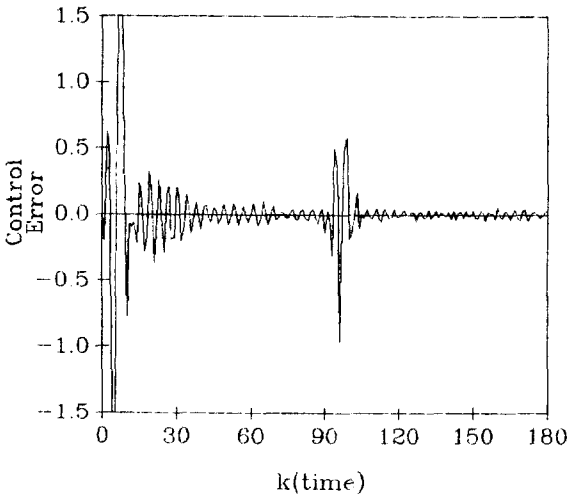

그림 10. 제어오차 : d(k)=0.2+0.05r(k)

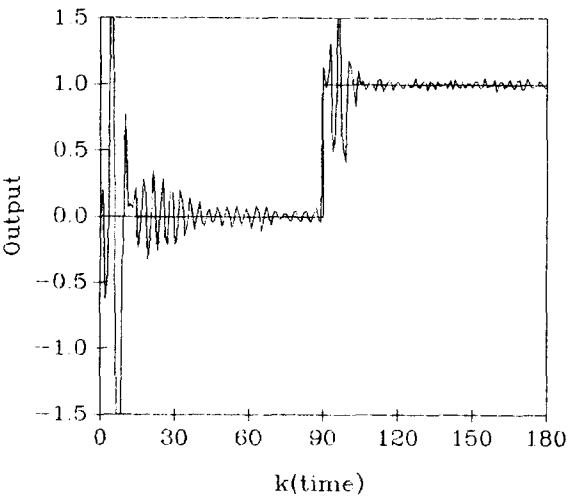

그림 11. 출 력 : d(k)=0.2+0.05r(k)

5. 결 론

시간 지연이 있는 stable inverse 한 공정에 대한 bilinear 모델 예측제어 방법을 유도하였다. SISO 공정에 대한 bilinear 모델 예측제어 방법을 확장하여 MIMO 공정에 대한 예측제어 방법을 제시하였다. 기존의 공정 인식 알고리즘을 이용하여 SISO 공정에 대한 bilinear 모델 적응 예측제어 방법을 제시하였다. 공정에 도입되는 교란의 성질에 따른 공정출력과 제어오차의 수렴성과 boundedness 를 증명하고 수치모사를 통해 확인하였다. 일정한 크기의 교란이 도입되는 경우 제어오차는 0 으로 수렴하고 공정출력은 일정한 값으로 수렴한다.

6. 참고 문헌

Biran, Y., and B. McInnis, *Optimal control of bilinear systems: time-varying effects of cancer drugs.* Automatica, **15**, 325-329, 1979

Cebuhar, W.A., and V. Costanza, *Nonlinear control of CSTR's.* Chemical Engineering Science, **39**, 1715-1722, 1984

Cutler, C.R., and B.L. Ramaker, *Dynamic matrix control - a computer control algorithm.* Joint Automatic Control Conference, San Francisco, paper WP5-B, 1980

Espana, M., and I.D. Landau, *Reduced order bilinear models for distillation columns.* Automatica, **14**, 345-355, 1978

Ionescu, T.V., *Model reference adaptive control for a class of bilinear plants.* Proc. IEEE Conf. Decision and Control, 1062-1066, 1977

Lo, J.T.H., *Global bilinearization of systems with control appearing linearly.* SIAM J. Control, **13**, 879-885, 1975

Martin Sanchez, J.M., S.L. Shah, and D.G. Fisher, *A stable adaptive predictive control system.* Int. J. of Control, **39**, 215-234, 1984

Mohler, R.R., *Bilinear Control Processes.* Academic Press, New York, 1973

Ohkawa, F., and Y. Yonezawa, *A model reference adaptive control system for discrete bilinear systems.* Int. J. of Control, **37**, 1095-1101, 1983

Richalet, J.A., A. Rault, J.D. Testud, and J. Papon, *Model predictive heuristic control: application to industrial processes.* Automatica, **14**, 413-428, 1978

Svoronos, S., G. Stephanopoulos, and R. Aris, *On bilinear estimation and control.* Int. J. of Control, **34**, 651-684, 1981

Wang, Y.S., and P. Dorato, *Optimal periodic control of a bilinear solar system.* Joint Automatic Control Conference, paper TA9, 1983

Yeo, Y.K., and D.C. Williams, *Bilinear model predictive control.* Ind. Eng. Chem. Res., **26**, 2267-2274, 1987