'89 韓國自動制御學術會議論文集 1989. 10. 27~28

ARMA 스펙트럼 추정을 위한 ELS FTF 알고리즘
(ELS FTF Algorithm fot ARMA Spectral Estimation)

○ 이 철 희** 장 영 수* 남 현 도*** 양 흥 석**
C.H.Lee Y.S.Jang H.D.Nam H.S.Yang

* 서울대학교 전기공학과
** 기초전력공학 공동연구소
*** 단국대학교 전기공학과

For on-line ARMA spectral estimation, the fast transversal filter algorithm of extended least squares method(ELS FTF) is presented. The projection operator, a key tool for geometric approach, is used in the derivation of the algorithm. ELS FTF is a fast time update recursion which is based on the fact that the correlation matrix of ARMA model satisfies the shift invariance property in each block, and thus it takes 10N+31 MADPR.

1. 서 론

제한된 양의 데이타로부터 고해상도 스펙트럼 추정에 일반적으로 사용되는 계수적 스펙트럼 추정기법은 신호를 모형화한 뒤 관측 데이타를 이용하여 모델 계수를 추정하고 이로부터 스펙트럼을 계산하는 방식으로, 신호의 모형화에는 시계열 모델이 많이 사용된다. AR 모델은 계수추정 과정의 단순성으로 인하여 널리 사용되고 있으나 많은 경우에 실제 시스템의 특성 표현에 ARMA 모델이 더 적합하며 이때 AR 모델을 사용하면 모델의 차수가 고차가 되는 등의 문제가 있어 ARMA 스펙트럼 추정이 필요하게 된다.[1,3,5,8]

그런데 ARMA 모형화의 경우 계수 추정의 비선형성이 문제가 되므로 RML(Recursive Maximum Liklihood), ELS(Extended Least Squares), EIV(Extended Instrumental Variables), GLS(Generalized Least Squares) 등의 준최적 계수 추정자들이 사용되는데 prefilter의 사용, 가상입력 추정 등으로 이하여 계산량의 부담이 많아지고 수렴 속도도 늦어진다.[2] 온라인 추정 문제에서는 실시간 계산을 위하여 알고리즘의 연산량 감소가 요구되므로 이러한 계수추정자를 매 순환스텝당 모델 차수 차원의 연산량을 갖는 고속 알고리즘으로의 구현이 필요하다.

고속 알고리즘은 계수추정에 있어서 정규방정식의 상관함수 행렬의 이동불변 특성을 이용하여 Levinson 순환식을 확장시킨 것으로서 FTF(Fast Transversal Filter) 구조와 격자필터 구조의 2가지 형태가 있으며 전치윈도우 데이타 집합의 경우에 구현이 가장 용이하고 구조가 간단하다. FTF는 고속 Kalman 이득을 계산하여 바로 계수를 시갱신하는 시순환식이며 격자필터는 PARCOR (Partial Correlation Coeffitient) 계수를 계산하여 예측자를 구성하는 시-차수 순환식이다.[4]

본 논문에서는 온라인 ARMA 스펙트럼 추정을 위하여, ARMA 모델의 경우 상관함수 행렬이 블록 별로 이동불변 특성을 만족함을 이용하여 ELS 추정자를 FTF로 구현하였다.

2. ELS 계수추정과 사영 연산자.

관측 데이타 $\{y(\cdot)\}$를 다음의 ARMA 모델로 모형화한다고 하자.

$$y(t) = -\sum_{i=1}^{p} a_i y(t-i) + \sum_{j=0}^{q} b_j w(t-j) \tag{2.1}$$

여기서 $b_0=1$ 이고 $\{w(\cdot)\}$는 $\sim N(0,1)$인 백색잡음 프로세스이다. (2.1)의 ARMA 계수를 LS 계수추정자로 추정할 경우 편이가 발생하므로 RML등의 준최적 계수추정자를 사용하게 된다. ELS는 보편적인 수렴성은 보장되지 않으나 대부분의 경우에 대해 잘 동작되는 것으로 알려져 있으며[2] 다른 계수 추정자에 비해 계산량이 적고 알고리즘의 구조가 간단하여 적응 필터링 등에 널리 사용되고 있다.

(2.1)의 ARMA 모델에서 시간 t-1 까지의 백색 잡음 시퀀스 $\{w(\cdot)\}$을 안다고 가정하면 (2.1)은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$y(t) = -\phi'(t)\theta + w(t) \tag{2.2}$$

여기서
$$\phi(t)=[y(t-1)\cdots y(t-p)\ w(t-1)\cdots w(t-q)]' \tag{2.3}$$
$$\theta=[a_1\cdots\cdots a_p\ -b_1\cdots\cdots b_q]' \tag{2.4}$$

식 (2.2)의 y(t)에 대한 선형 예측자와 예측오차는 시간 t에서 θ의 추정치를 $\theta(t)$라 하면

$$\hat{y}(t) = -\phi'(t)\theta(t) \tag{2.5}$$
$$e_y(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) + \phi'(t)\theta(t) \tag{2.6}$$

로 주어지고 계수 추정문제는 다음의 예측오차 파워 E(t)를 최소화하는 최소 자승해를 구하는 LS 계수 추정문제로 변환된다.

$$E(t) = \sum_t e_y^2(t) \tag{2.7}$$

식 (2.7)을 최소화 하는 $\theta(t)$를 구하면 다음과 같이 주어진다.

$$\theta(t) = -[X_0'(t)X_0(t)]^{-1}X_0'(t)\underline{y}(t) \tag{2.8}$$

여기서
$$\underline{y}(t)=[y(0)\ \cdots\ y(t)]' \tag{2.9}$$
$$X_0(t)=[\phi(0)\ \cdots\ \phi(t)]' \tag{2.10}$$

그러나 실제로는 { w(·) }의 값을 모르므로 이를 추정하여 참값에 대치해야 한다.

(2.2)에서 θ를 $\theta(t)$로 대치하면 $w(t)$의 추정치는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$w(t) = y(t) + \phi'(t)\theta(t) = e_y(t) \tag{2.11}$$

(2.8)과 (2.11)의 ELS계수 추정자는 상관 함수 행렬의 이동불변 특성을 이용하여 FTF로 구현할 수 있다. 데이타 행렬

$X_0(t)$를 출력 데이타 행렬 $Y_{1,p}(t)$와 입력 데이타 행렬 $W_{1,q}(t)$로 나누면, 즉 $X_0(t) = [Y_{1,p}(t), W_{1,q}(t)]$라고 하면 상관함수 행렬 $R(t)$는 다음과 같이 된다.

$$R(t)=X_0'(t)X_0(t)=\begin{bmatrix} Y_{1,p}'(t)Y_{1,p}(t) & Y_{1,p}'(t)W_{1,q}(t) \\ W_{1,q}'(t)Y_{1,p}(t) & W_{1,q}'(t)W_{1,q}(t) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

따라서 $R(t)$는 전체적으로 이동불변 특성을 만족하지 않고 블록 별로 만족하므로 $y(t)$와 $w(t)$에 대한 FLP(Forward Linear Predictor)와 BLP(Backward Linear Predictor)를 각각 구성하여 이들의 결합형태로 하여 차수 순환식인 Levinson 순환식을 확장하여 시순환식인 FTF 알고리즘을 유도할 수 있게 된다.[7,8]

추정오차의 파워를 최소화 하고자 하는 최소 자승 개념에 근거한 계수추정 알고리즘, 특히 고속 알고리즘을 유도할 때 기하학적인 접근방법으로 사영 연산자를 사용하면 편리하다.[4,6,7,8] (2.6)을 시간 t까지 데이타에 대해 행렬 형태로 표현하면

$$\underline{e}_y(t)=\underline{y}(t)+X_0(t)\theta(t) \quad (2.13)$$

여기서 $\underline{e}_y(t)=[e_y(0) \ \cdots \ e_y(t)]'$ (2.14)

(2.13)에 (2.8)을 대입하여 정리하면

$$\underline{e}_y(t)=\{I - X_0(t)[X_0'(t)X_0(t)]^{-1}X_0'(t)\}\underline{y}(t) \quad (2.15)$$

따라서 $X_0(t)$의 열벡터들에 의해 생성되는 선형공간 $X_{0:t}$에 대한 사영 연산자 $P_{0:t}$와 정사영 연산자 $P_{0:t}^{\perp}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$P_{0:t}=X_0(t)[X_0'(t)X_0(t)]^{-1}X_0'(t) \quad (2.16)$$

$$P_{0:t}^{\perp}=I-P_{0:t} \quad (2.17)$$

사영연산자와 정사영연산자는 imdempotent하고 sysmmetric 이다. 즉

$$P \cdot P = P, \ P'= P \quad (2.18)$$

$$P^{\perp}P^{\perp}= P^{\perp}, \ P^{\perp\prime}= P^{\perp} \quad (2.19)$$

사영연산자를 이용하여 계수 추정 알고리즘을 유도할 경우 유용한 관계는 다음과 같다.[8]

<u>성질 1</u>(차수갱신); 행렬 $[Y,Z]$의 열벡터에 의해 생성되는 선형공간에 대한 사영 및 정사영 연산자는 다음과 같다.

$$P_{[Y,Z]} = P_Y + P_Y^{\perp}Z(Z'P_Y^{\perp}Z)^{-1}Z'P_Y^{\perp} \quad (2.20)$$

$$P_{[Y,Z]}^{\perp} = P_Y^{\perp} - P_Y^{\perp}Z(Z'P_Y^{\perp}Z)^{-1}Z'P_Y^{\perp} \quad (2.21)$$

<u>성질 2</u>; 행렬 Y의 영벡터들의 순서가 바뀐 행렬 YJ'에 대한 사영 및 정사영 연산자는 다음과 같다.

$$P_{YJ'}=P_Y, \quad P_{YJ'}^{\perp}=P_Y^{\perp} \quad (2.22)$$

여기서 J는 순열 행렬로서 각 행벡터의 한 요소만 1인 행렬이며 $J'J = I$이다.

<u>성질3</u>(시갱신); 다음과 같이 정의되는 pinning벡터 σ_t를 생각하자.

$$\sigma_t= [0 \ \cdots \ 0 \ 1]' \quad (t \times 1) \quad (2.23)$$

그리고 행렬 X,Y,Z 를 다음과 같이 정의하면

$$X = [\bar{X}',\underline{x}]', \ Y = [\bar{Y}',\underline{y}]', \ Z = [\bar{Z}',\underline{z}]' \quad (2.24)$$

정사영 연산자는 다음 관계를 만족한다.

$$X'P_Y^{\perp}Z = \bar{X}'P_{\bar{Y}}^{\perp}\bar{Z} + (X'P_Y^{\perp}\sigma_t)(\sigma_t'P_Y^{\perp}\sigma_t)^{-1}(\sigma_t'P_Y^{\perp}Z) \quad (2.25)$$

<u>성질4</u>; 다음과 같이 사사영 (forward oblique projection) 연산자를 정의하자.

$$P_Y^{o} = Y[Y^{-\prime}Y^{-}]^{-1}Y^{-\prime} \quad (2.26)$$

여기서 Y^{-}는 Y의 마지막 행을 $\underline{0}'$로 대치한 행렬이다.

사영및 정사영 연산자는 다음 관계를 만족한다.

$$P_Y = P_Y^{o} + P_Y\sigma_t(\sigma_t'P_Y^{\perp}\sigma_t)^{-1}\sigma_t'P_Y^{\perp} \quad (2.27)$$

$$P_Y^{\perp} = P_Y^{o\perp} - P_Y\sigma_t(\sigma_t'P_Y^{\perp}\sigma_t)^{-1}\sigma_t'P_Y^{\perp} \quad (2.28)$$

3. ELS FTF 알고리즘

전치 윈도우 데이타 집합의 경우에 다음과 같이 이동연산자 s를 정의하면

$$s^{-1}\underline{y}(t)=[0 \ y(0) \cdots\cdots y(t-1)]' \quad (3.1)$$

데이타 행렬은 다음과 같이 된다.

$$Y_{1,p}(t)=[s^{-1}\underline{y}(t) \cdots\cdots s^{-p}\underline{y}(t)] \quad (3.2)$$

$$W_{1,p}(t)=[s^{-1}\underline{w}(t) \cdots\cdots s^{-q}\underline{w}(t)] \quad (3.3)$$

$$X_0(t)=[Y_{1,p}(t), \ W_{1,q}(t)] \quad (3.4)$$

여기서 $\underline{w}(t)=[w(0) \cdots\cdots w(t)]'$ (3.5)

또한 다음과 같은 데이타 벡터 및 행렬을 정의하자.

$$\phi_e(t)=[y(t) \cdots y(t-p) \ w(t) \cdots w(t-q)]' \quad (3.6)$$

$$X_1(t)=[\phi(1) \cdots \phi(t+1)]'=[Y_{0,p-1}(t), W_{0,q-1}(t)] \quad (3.7)$$

$$X_2(t)=[\phi_e(0) \cdots \phi_e(t)]'=[Y_{0,p}(t), W_{0,q}(t)] \quad (3.8)$$

그러면 $X_0(t)=[0 \ X_1(t-1)]'$이므로 사영연산자의 정의에 의해 다음의관계가 성립한다.

$$P_{0:t}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_{1:t-1} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

그리고 다음과 같은 순열행렬 J_f, J_b를 정의한다.

$$J_f\phi_e(t)=[y(t), w(t), \phi'(t)]' \quad (3.10)$$

$$J_b\phi_e(t)=[\phi'(t+1), y(t-p), w(t-q)]' \quad (3.11)$$

이제 고속 Kalman 이득 행렬 및 벡터 $K(t)$, $g(t)$를 다음과 같이 정의하자.

$$K(t)=X_0(t)[X_0'(t)X_0(t)]^{-1} \quad (3.12)$$

$$g(t)=\sigma_t'K(t)=\phi'(t+1)[X_0'(t)X_0(t)]^{-1} \quad (3.13)$$

그러면 (2.8)의 $\theta(t)$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\theta(t)=-K'(t)\underline{y}(t) \quad (3.14)$$

또한 (3.12)의 $K(t)$는 다음의 관계를 만족한다.

$$X_0'(t)K(t)=I, \quad P_{0:t}K(t)=K(t) \quad (3.15)$$

그리고 일반적으로 행렬 Z와 관련한 고속 Kalman이득 행렬을 K_Z, ZJ'와 관련한 고속 Kalman 이득 행렬을 $K_{ZJ'}$, [Y,Z]에 관련한 고속 Kalman 이득 행렬을 $K_{[Y,Z]}$라고 하면 다음의 관계를 만족한다.[8]

$$K_{ZJ'}=K_ZJ' \quad (3.16)$$

$$K_{[Z,Y]}=[K_Z, 0]+P_Z^{\perp}Y(Y'P_Z^{\perp}Y)^{-1}[-Y'K_Z, I] \quad (3.17)$$

$$K_{[Y,Z]}=[0, K_Z]+P_Z^{\perp}Y(Y'P_Z^{\perp}Y)^{-1}[I, -Y'K_Z] \quad (3.18)$$

(2.1)의 ARMA 모델에서 t-1 까지의 $\{w(\cdot)\}$의 값을 안다고 할 때 ELS FTF의 구현을 위해 우선 $\underline{y}(t)$에 대한 FLP를 구성하면 예측오차 $\underline{e}_f(t)$와 사사영 전향 예측오차 $\underline{e}_f^{o}(t)$는 다음과 같이 주어진다.

$$\underline{e}_f(t)=P_{0:t}^{\perp}\underline{y}(t) \quad (3.19)$$

$$\underline{e}_f^{o}(t)=P_{0:t}^{o\perp}\underline{y}(t) \quad (3.20)$$

따라서 $y(t)$의 전향 예측오차 $e_f(t)$는 다음과 같이 된다.

$$e_f(t)=\sigma_t'\underline{e}_f(t)=y(t)-\phi'(t)K'(t)\underline{y}(t)$$
$$=[1 \ 0 \ -\underline{y}'(t)K(t)]J_f\phi_e(t)=A_y(t)J_f\phi_e(t) \quad (3.21)$$

여기서 $A_y(t)=[1 \ 0 \ -\underline{y}'(t)K(t)]$ (3.22)

그러면 (2.11)을 사용하여 미지인 $w(t)$의 값을 다음과 같이 대치할 수 있다.

$$w(t)=e_f(t) \quad (3.23)$$

또한 $X_0(t)=[X_0(t-1) \ 0]'$의 관계로부터 사사영 연산자 $P_{0:t}^{o\perp}$는 다음의 관계를 만족하므로

$$P_{0:t}^{o\perp}=\begin{bmatrix} P_{0:t-1}^{\perp} & 0 \\ -\phi'(t)K'(t-1) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$y(t)$의 사사영 전향 예측오차 $e_f^{o}(t)$는 다음과 같이 된다.

$$e_f^{o}(t)=\sigma_t'\underline{e}_f^{o}(t)=y(t)-\phi'(t)K'(t-1)\underline{y}(t-1)$$
$$=[1 \ 0 \ -\underline{y}'(t-1)K(t-1)]J_f\phi_e(t)=A_y(t-1)J_f\phi_e(t) \quad (3.25)$$

(3.25)에서 보면 $e_f^{o}(t)$는 계수 벡터를 갱신하기 전의 사전(a priori) 예측오차와 같음을 알 수 있다.

같은 방법으로 하여 $\underline{w}(t)$에 대한 전향 예측오차 $\underline{\varepsilon}_f(t)$와

사사영 전향 예측오차 $\varepsilon_f^o(t)$는 다음과 같이 주어지고

$$\underline{\varepsilon}_f(t)=P_{0:t}^{\perp}\underline{w}(t) \tag{3.26}$$

$$\underline{\varepsilon}_f^o(t)=P_{0:t}^{o\perp}\underline{w}(t) \tag{3.27}$$

$w(t)$의 전향 예측오차 $\varepsilon_f(t)$ 및 사사영 예측오차 $\varepsilon_f^o(t)$는 다음과 같이 된다.

$$\varepsilon_f(t)=\sigma_t'\underline{\varepsilon}_f(t)=A_w(t)J_f\phi_e(t) \tag{3.28}$$

$$\varepsilon_f^o(t)=\sigma_t'\underline{\varepsilon}_f(t)=A_w(t-1)J_f\phi_e(t) \tag{3.29}$$

여기서 $A_w(t)=[0\ 1\ -\underline{w}'(t)K(t)]$ (3.30)

$\underline{y}(t)$와 $\underline{w}(t)$에 대해 BLP를 구성하면 지금까지와 같은 방법으로 하여 후항 예측오차 $\underline{e}_b(t)$, $\underline{\varepsilon}_b(t)$ 및 사사영 후항 예측오차 $\underline{e}_b^o(t)$, $\underline{\varepsilon}_b^o(t)$는 다음과 같이 주어진다.

$$\underline{e}_b(t)=P_{1:t}^{\perp}s^{-p}\underline{y}(t) \tag{3.31}$$

$$\underline{\varepsilon}_b(t)=P_{1:t}^{\perp}s^{-q}\underline{w}(t) \tag{3.32}$$

$$\underline{e}_b^o(t)=P_{1:t}^{o\perp}s^{-p}\underline{y}(t) \tag{3.33}$$

$$\underline{\varepsilon}_b^o(t)=P_{1:t}^{o\perp}s^{-q}\underline{w}(t) \tag{3.34}$$

또한

$$e_b(t)=\sigma_t'\underline{e}_b(t)=B_y(t)J_b\phi_e(t) \tag{3.35}$$

$$\varepsilon_b(t)=\sigma_t'\underline{\varepsilon}_b(t)=B_w(t)J_b\phi_e(t) \tag{3.36}$$

여기서 $B_y(t)=[-s^{-p}\underline{y}(t)\underline{K}(t)\ 1\ 0]$ (3.37)

$B_w(t)=[-s^{-q}\underline{w}(t)\underline{K}(t)\ 0\ 1]$ (3.38)

이고 $\underline{K}(t)$은 $K(t+1)$에서 첫째 행을 없앤 부분행렬이다. 즉

$$\underline{K}(t)=X_1(t)[X_1'(t)X_1(t)]^{-1} \tag{3.39}$$

그런데 $X_1^-(t)=[X_1(t-1)\ 0]'$의 관계로부터 $P_{1:t}^{o\perp}$는 다음의 관계를 만족하므로

$$P_{1:t}^{o\perp}=\begin{bmatrix} P_{1:t-1}^{\perp} & 0 \\ -\phi'(t+1)\underline{K}'(t-1) & 1 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

$e_b^o(t)$와 $\varepsilon_b^o(t)$는 다음과 같이 된다.

$$e_b^o(t)=\sigma_t'\underline{e}_b^o(t)=B_y(t-1)J_b\phi_e(t) \tag{3.41}$$

$$\varepsilon_b^o(t)=\sigma_t'\underline{\varepsilon}_b^o(t)=B_w(t-1)J_b\phi_e(t) \tag{3.42}$$

여기서 예측오차와 연관하여 다음의 변수들을 정의하자.

$$E_f^y(t)=\underline{e}_f'(t)\underline{e}_f(t)=\underline{y}'(t)P_{0:t}^{\perp}\underline{y}(t) \tag{3.43}$$

$$E_f^w(t)=\underline{\varepsilon}_f'(t)\underline{\varepsilon}_f(t)=\underline{w}'(t)P_{0:t}^{\perp}\underline{w}(t) \tag{3.44}$$

$$E_f^{yw}(t)=\underline{\varepsilon}_f'(t)\underline{e}_f(t)=\underline{w}'(t)P_{0:t}^{\perp}\underline{y}(t) \tag{3.45}$$

그리고 다음과 같이 새로운 고속 Kalman 이득 행렬 및 벡터 $K^*(t)$, $g^*(t)$와 각변수 $\gamma(t)$를 정의하자.

$$K^*(t)=X_0(t)[X_0'(t-1)X_0(t-1)]^{-1} \tag{3.46}$$

$$g^*(t)=\sigma_t'K^*(t) \tag{3.47}$$

$$\gamma(t)=\sigma_t'P_{1:t}^{\perp}\sigma_t \tag{3.48}$$

(3.48)에 정의된 $\gamma(t)$는 사영공간 $X_{1:t}^-$와 $X_{1:t}$가 이루는 각을 α라고 할 때 $\cos^2\alpha$가 되며, 따라서 최근의 데이타에 포함된 새로운 정보량의 정도를 판단하는 기준이 될 수 있다. (3.46)에 정의된 $K^*(t)$는 $[X_0'(t)X_0(t)]^{-1}=[X_0'(t-1)X_0(t-1)+\phi(t)\phi'(t)]^{-1}$인 관계에 행렬 역연산 정리를 적용하여 정리하면 다음의 관계를 얻는다.

$$K(t)=K^*(t)\gamma(t-1) \tag{3.49}$$

따라서 $g^*(t)=g(t)\gamma^{-1}(t-1)$ (3.50)

이제 ELS FTF의 변수들의 갱신식을 유도하기로 하자. 우선 (2.28)로부터 $\underline{e}_f(t)$, $\underline{\varepsilon}_f(t)$는

$$\underline{e}_f(t)=P_{0:t}^{o\perp}\underline{y}(t)-P_{0:t}\sigma_t(\sigma_t'P_{0:t}^{\perp}\sigma_t)^{-1}\sigma_t'P_{0:t}^{\perp}\underline{y}(t) \tag{3.51}$$

$$\underline{\varepsilon}_f(t)=P_{0:t}^{o\perp}\underline{w}(t)-P_{0:t}\sigma_t(\sigma_t'P_{0:t}^{\perp}\sigma_t)^{-1}\sigma_t'P_{0:t}^{\perp}\underline{w}(t) \tag{3.52}$$

따라서 (3.51)과 (3.52)를 정리하면 다음의 결과를 얻는다.

$$e_f(t)=e_f^o(t)\gamma(t-1) \tag{3.53}$$

$$\varepsilon_f(t)=\varepsilon_f^o(t)\gamma(t-1) \tag{3.54}$$

또한 (3.51)과 (3.52)의 양변에 $K'(t)$를 곱해 정리하면

$$K'(t)\underline{y}(t)=K'(t-1)\underline{y}(t-1)+g^{*\prime}(t)e_f(t) \tag{3.55}$$

$$K'(t)\underline{w}(t)=K'(t-1)\underline{w}(t-1)+g^{*\prime}(t)\varepsilon_f(t) \tag{3.56}$$

(3.22),(3.30),(3.55)와 (3.56)으로부터

$$A_y(t)=A_y(t-1)+[0\ 0\ g^*(t)]e_f(t) \tag{3.57}$$

$$A_w(t)=A_w(t-1)+[0\ 0\ g^*(t)]\varepsilon_f(t) \tag{3.58}$$

그리고 $\underline{y}(t)=[\underline{y}'(t-1)\ y(t)]'$, $\underline{w}(t)=[\underline{w}'(t-1)\ w(t)]'$, $X_0(t)=[X_0'(t-1)\ \phi(t)]'$라는 관계와 (3.43)-(3.45)와 (2.25)로부터

$$E_f^y(t)=E_f^y(t-1)+e_f(t)e_f^o(t) \tag{3.60}$$

$$E_f^w(t)=E_f^w(t-1)+\varepsilon_f(t)\varepsilon_f^o(t) \tag{3.61}$$

$$E_f^{yw}(t)=E_f^{yw}(t-1)+\varepsilon_f(t)e_f^o(t) \tag{3.61}$$

이제 고속 Kalman 이득을 갱신해야 하는데 $K(t)$에서 바로 $K(t+1)$으로 갱신되지 않으므로 사영공간을 $X_{0:t}\rightarrow X_{2:t}\rightarrow X_{1:t}$로 바꾸면서 갱신시켜야 한다. 이를 위하여 다음과 같은 새로운 데이타 벡터를 생각한다.

$$\underline{x}_f(t)=[\underline{y}(t),\underline{w}(t)] \tag{3.62}$$

$$\underline{x}_b(t)=[s^{-p}\underline{y}(t),s^{-q}\underline{w}(t)] \tag{3.63}$$

그리고 사영공간 $X_{2:t}$와 관련해 다음의 변수들을 정의하자.

$$K_e(t)=X_2(t)[X_2'(t)X_2(t)]^{-1} \tag{3.64}$$

$$\gamma_e(t)=\sigma_t'P_{2:t}^{\perp}\sigma_t \tag{3.65}$$

$$g_e(t)=\sigma_tK_e(t) \tag{3.66}$$

$$g_e^*(t)=g_e(t)\gamma^{-1}(t) \tag{3.67}$$

$E_f(t)=\begin{bmatrix} E_f^y(t) & E_f^{yw}(t) \\ E_f^{yw}(t) & E_f^w(t) \end{bmatrix}$라고 하면 (2.21)로부터

$$\gamma_e(t)=\gamma(t-1)-[e_f(t),\varepsilon_f(t)]E_f^{-1}(t)[e_f(t),\varepsilon_f(t)]' \tag{3.68}$$

(3.16)과 (3.18)을 이용하여

$$K_{[\underline{x}_f(t),X_o(t)]}=K_e(t)J_f'$$

$$=[0\ 0\ K(t)]+[\underline{e}_f(t),\underline{\varepsilon}_f(t)]E^{-1}(t)[A_y(t)\ A_w(t)]' \tag{3.69}$$

따라서

$$g_e(t)J_f'=[0\ 0\ g(t)]+[e_f(t),\varepsilon_f(t)]E_f^{-1}(t)\begin{bmatrix} A_y(t) \\ A_w(t) \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

또한 $g_e^*(t)J_f'$를 $\tilde{g}_e^*(t)$라고 하면, (3.57),(3.58),(3.68)과 (3.70)으로부터

$$\tilde{g}_e^*(t)=[0\ 0\ g^*(t)]+\begin{bmatrix} e_f(t) \\ \varepsilon_f(t) \end{bmatrix}'E_f^{-1}(t)\begin{bmatrix} A_y(t-1) \\ A_w(t-1) \end{bmatrix}\gamma_e^{-1}(t) \tag{3.71}$$

(2.28)으로부터

$$\begin{bmatrix} \underline{e}_b(t) \\ \underline{\varepsilon}_b(t) \end{bmatrix}'=P_{1:t}^{o\perp}\underline{x}_b(t)-P_{1:t}\sigma_t(\sigma_t'P_{1:t}^{\perp}\sigma_t)^{-1}\sigma_t'P_{1:t}^{\perp}\underline{x}_b(t) \tag{3.72}$$

따라서 (3.72)를 정리하면

$$[e_b(t),\varepsilon_b(t)]=[e_b^o(t),\varepsilon_b^o(t)]\gamma(t) \tag{3.73}$$

여기서 예측오차와 연관하여 다음의 변수들을 정의하자.

$$E_b^y(t)=\underline{e}_b'(t)\underline{e}_b(t)=s^{-p}\underline{y}'(t)P_{1:t}^{\perp}s^{-p}\underline{y}(t) \tag{3.74}$$

$$E_b^w(t)=\underline{\varepsilon}_b'(t)\underline{\varepsilon}_b(t)=s^{-q}\underline{w}'(t)P_{1:t}^{\perp}s^{-q}\underline{w}(t) \tag{3.75}$$

$$E_b^{yw}(t)=\underline{\varepsilon}_b'(t)\underline{e}_b(t)=s^{-q}\underline{w}'(t)P_{1:t}^{\perp}s^{-p}\underline{y}(t) \tag{3.76}$$

$E_b(t)=\begin{bmatrix} E_b^y(t) & E_b^{yw}(t) \\ E_b^{yw}(t) & E_b^w(t) \end{bmatrix}$라고 하면 (2.25)로부터

$$E_b(t)=E_b(t-1)+[e_b(t),\varepsilon_b(t)]'[e_b^o(t),\varepsilon_b^o(t)] \tag{3.77}$$

(3.72)의 양변의 앞에 $\underline{K}'(t)$를 곱하여 정리하면

$$\underline{K}'(t)\underline{x}_b(t)=\underline{K}'(t-1)\underline{x}_b(t-1)+\underline{K}'(t)\sigma_t\gamma^{-1}(t)\begin{bmatrix} e_b(t) \\ \varepsilon_b(t) \end{bmatrix}' \tag{3.78}$$

그런데 $g(t+1)=\sigma_{t+1}'K(t+1)=\sigma_t'\underline{K}(t)$ (3.79)

따라서 (3.37),(3.38),(3.78) 및 (3.79)로부터

$$\begin{bmatrix} B_y(t) \\ B_w(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_y(t-1) \\ B_w(t-1) \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} e_b(t) \\ \varepsilon_b(t) \end{bmatrix}[g^*(t+1)\ 0\ 0] \tag{3.80}$$

또한 (2.21)과 (2.22)로부터

$$\gamma_e(t)=\sigma_t'P_{[X_f(t),\underline{x}_b(t)]}^{\perp}\sigma_t$$

$$=\gamma(t)-[e_b(t),\varepsilon_b(t)]E_b^{-1}(t)[e_b(t),\varepsilon_b(t)]' \tag{3.81}$$

이제 $g^*(t+1)$을 계산하자. (3.16)과 (3.18)로부터

$$K_{[X_f(t),\underline{x}_b(t)]}=K_e(t)J_b'$$

$$=[\underline{K}(t)\ 0\ 0]+[\underline{e}_b(t),\underline{\varepsilon}_b(t)]E^{-1}(t)[B_y'(t)\ B_w'(t)]' \tag{3.82}$$

$$g_e(t)J_b' = [g(t+1)\ 0\ 0] + [e_b(t), \varepsilon_b(t)]E_b^{-1}(t)\begin{bmatrix}B_y(t)\\ B_w(t)\end{bmatrix} \quad (3.83)$$

따라서 (3.83)으로부터

$$[g^*(t+1)\ 0\ 0] = g_e^*(t)J_b\gamma_e(t)\gamma^{-1}(t) - [e_b(t), \varepsilon_b(t)]E_b^{-1}(t)\begin{bmatrix}B_y(t)\\ B_w(t)\end{bmatrix}\gamma^{-1}(t) \quad (3.84)$$

$g_e^*(t)=\tilde{g}_e^*(t)J_f$라는 사실과 (3.80), (3.81)과 (3.84)로부터

$$[g^*(t+1)\ 0\ 0] = \tilde{g}_e^*(t)J_fJ_b' - [e_b(t), \varepsilon_b(t)]E_b^{-1}(t)\gamma_e^{-1}(t)[B_y'(t-1), B_w'(t-1)]' \quad (3.85)$$

그런데 $\hat{g}_e^*(t)=\tilde{g}_e^*(t)J_fJ_b'$라 하고 이의 끝 두 요소를 $\mu(t)$라고 하면 (3.85)로부터

$$\mu(t) = [e_b(t), \varepsilon_b(t)]E_b^{-1}(t)\gamma_e^{-1}(t) \quad (3.86)$$

$$[g^*(t+1)\ 0\ 0] = \hat{g}_e^*(t) - \mu(t)[B_y'(t-1)\ B_w'(t-1)]' \quad (3.87)$$

그리고 (3.86)을 (3.81)에 대입하여 $\gamma(t)$에 관해 정리하면

$$\gamma(t) = \gamma_e(t)\{1-\mu(t)[e_b^o(t), \varepsilon_b^o(t)]'\gamma_e(t)\}^{-1} \quad (3.88)$$

(3.86)과 (3.88)로부터

$$\mu(t)E_b(t) = \begin{bmatrix}e_b(t)\\ \varepsilon_b(t)\end{bmatrix}'\left\{1+\mu(t)\begin{bmatrix}e_b(t)\\ \varepsilon_b(t)\end{bmatrix}\gamma(t)\right\}\gamma^{-1}(t) \quad (3.89)$$

따라서 (3.77)을 (3.89)에 대입하여 정리하면

$$[e_b(t), \varepsilon_b(t)] = \mu(t)E_b(t-1) \quad (3.90)$$

이상의 결과를 정리한 ELS FTF 알고리즘이 표1에 주어져 있다. ELS FTF 알고리즘은 10N+31 MADPR(Multiplication And Division Per Recursion)의 연산량을 필요로 하며(N=p+q), AR부분과 MA부분의 차수를 달리할 수 있다.

표 1. ELS FTF 알고리즘

순 환 식	MADPR
$e_f^o(t)=A_y(t-1)J_f\phi_e(t)$	N
$e_f(t)=e_f^o(t)\gamma(t-1)$	1
$w(t)=e_f(t)$	0
$\varepsilon_f^o(t)=A_w(t-1)J_f\phi_e(t)$	N
$\varepsilon_f(t)=\varepsilon_f^o(t)\gamma(t-1)$	1
$E_f(t)=E_f(t-1)+[e_f(t), \varepsilon_f(t)]'[e_f^o(t), \varepsilon_f^o(t)]$	3
$\gamma_e(t)=\gamma(t-1)-[e_f(t), \varepsilon_f(t)]E_f^{-1}(t)[e_f(t), \varepsilon_f(t)]'$	11
$\tilde{g}_e^*(t)=[0\ 0\ g^*(t)]+\begin{bmatrix}e_f(t)\\ \varepsilon_f(t)\end{bmatrix}'E_f^{-1}(t)\begin{bmatrix}A_y(t-1)\\ A_w(t-1)\end{bmatrix}\gamma_e^{-1}(t)$	2N+2
$\hat{g}_e^*(t)=\tilde{g}_e^*(t)J_fJ_b'$	0
$\mu(t)=[\hat{g}_e^*(t)]_{N+1,N+2}$	0
$\begin{bmatrix}A_y(t)\\ A_w(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_y(t-1)\\ A_w(t-1)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}e_f(t)\\ \varepsilon_f(t)\end{bmatrix}[0\ 0\ g^*(t)]$	2N
$[e_b(t), \varepsilon_b(t)]=\mu(t)E_b(t-1)$	4
$\gamma(t)=\gamma_e(t)\{1-\mu(t)[e_b^o(t), \varepsilon_b^o(t)]'\gamma_e(t)\}^{-1}$	4
$[e_b(t), \varepsilon_b(t)]=[e_b^o(t), \varepsilon_b^o(t)]\gamma(t)$	2
$E_b(t)=E_b(t-1)+[e_b(t), \varepsilon_b(t)]'[e_b^o(t), \varepsilon_b^o(t)]$	3
$[g^*(t+1)\ 0\ 0]=\hat{g}_e^*(t)-\mu(t)[B_y'(t-1)\ B_w'(t-1)]'$	2N
$\begin{bmatrix}B_y(t)\\ B_w(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_y(t-1)\\ B_w(t-1)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}e_b(t)\\ \varepsilon_b(t)\end{bmatrix}[g^*(t+1)\ 0\ 0]$	2N

4. 결 론

제한된 양의 데이타로부터 고해상도의 스펙트럼 추정을 하기 위하여 많은 경우에 ARMA 모형화 기법을 사용하게 되며, 이때 온라인 추정을 위해서는 계산량이 적은 계수 추정 알고리즘이 필요하다. 따라서 본 논문에서는 ARMA 계수추정에 많이 사용되는 ELS 계수추정자의 FTF 알고리즘을 구현하였다. 제안된 ELS FTF 알고리즘은 상관함수 행렬이 블록별로 저차의 변위차수를 가지고 이동불변 특성을 만족함을 이용하여 Levinson 순환식을 확장하여 시순환식을 구현한 것으로서, 알고리즘의 유도에는 사영연산자를 사용한 기하학적 접근방식을 사용하였으며 10N+31 MADPR의 연산량을 필요로 하므로 계수의 온라인 추정에 효과적이다. 또한 ELS FTF 알고리즘은 2 채널 AR 모델 방식과는 달리 AR부분과 MA부분의 차수를 달리할 수 있는 장점이 있다.

제안된 알고리즘은 협대역 신호의 스펙트럼 추정, 적응 필터링, 온라인 계수 식별 등의 여러 응용분야에 사용할 수 있다.

ELS FTF 알고리즘의 수리적 특성 및 초기화, 그리고 알고리즘의 정규화에 의한 수리적 안정성의 개선은 앞으로 계속 연구되어야 할 과제이다.

참 고 문 헌

[1] S.M.Kay and S.L.Marple,Jr.,"Spectrum Analysis-A Modern Persepective", Proc. of IEEE, Vol.69, pp.1380-1419,1981.

[2] L.Ljung and T.Soderstrom, Theory and Practice of Recursive Identification, Cambridge, Mass., MIT Press, 1983.

[3] M.Kaveh and S.P.Bruzzone, "A Comparative Overview of ARMA Spectral Estimation", Proc. of 1st Workshop on Spectral Estimation, Vol.1, pp.2.41-2.48, Hamilton, Ontario, 1981.

[4] M.L.Honig and D.G.Messerschmitt, Adaptive Filters : Structures, Algorithms, and Applications, Boston, Kluwer Academic Publishers, 1984.

[5] R.L.Moses, "Design and Analysis of Fast Recursive ARMA Spectral Estimators", Ph.D Dissertation, Dept. of Elec.Eng.,Virginia Polytech.Inst.and State Univ., Blacksburg, Virginia, 1984.

[6] J.M.Cioffi and T.Kailath, "Fast Recursive Least Squares Transversal Filters for Adaptive Filtering", IEEE Tr. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-32, pp.304-337, 1984.

[7] S.H.Ardalan and L.J.Faber, "A Fast ARMA Transversal RLS Filter Algorithm",IEEE Tr. Acoust.,Speech,Signal Processing, Vol.ASSP-36, pp.349-358, 1988.

[8] 이철희, "ARMA 스펙트럼 추정을 위한 고속 알고리즘에 관한 연구", 박사학위 논문, 서울대학교 대학원 전기공학과, 1989.