'89 韓國自動制御學術會議論文集 1989. 10. 27~28

구조적 불확실성을 갖는 프로세스의 Robust Control
(Robust Control for Linear Systems with Structured Uncertainty)

o 김 영 철*, 박 용 식**, 양 흥 석***
(Y. C. Kim, Y. S. Park, H. S. Yang)

* 충북대 전자공학과(Chungbuk Natl Univ., Dept. of Electronics)
** 명지대 전기공학과(Myongji Univ., Dept. of Elec.Eng.)
*** 서울대 전기공학과(Seoul Natl Univ., Dept. of Elec.Eng.)

Abstract:
This note considers the problems of finding a pole assignment controller for a plant with parameter peturbations. Based on Kharitonov's theorem and its generalized results, we propose a design method of controller using linear transformations such that it guarantees the desired damping ratio.

1. 서 론

본 논문은 전달함수의 계수가 한정된 범위내에서 섭동(perturbation)을 갖는 선형 시불변 시스템의 강인한 제어기(robust controller) 구성에 관한 것이다. 이러한 제어대상의 특성다항식은 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$P(s,q) \triangleq \sum_{i=0}^{n} a_i(q)s^i \qquad (1)$$

여기서, $q^T = [q_1, q_2, \ldots, q_K]$는 불확정 매개변수로서 Box Q내에서 변화한다.

$$Q = \{q \mid q_i^- \leqq q_i \leqq q_i^+ , \; i=1,2,\ldots k\} \qquad (2)$$

(1),(2)로서 표현되는 다항식군(a family of polynomi al)을 다시 쓰면,

$$\mathbf{P} \triangleq \{p(.,q) \mid q \in Q\} \qquad (3)$$

그리고 P의 모든 근이 복소평면에 미리 설정해 준 영역 D내에 존재하면, 시스템은 D-안정(D-stable)이라고 부르기로 한다.(D는 LHP, 단위원 또는, 임의 영역으로 설정됨). p(s,q)의 각 계수 a_i가 독립적으로 섭동을 갖는 경우에는 매개변수공간에서 (n+1)차원 hyperrectangle 로 나타나며, $\mathbf{P}$를 interval polynomial family라 한다. Kharitonov[1]는 이러한 interval polynimial 문제에 대해 D가 복소평면의 좌측반평면(LHP)일 때, 2 개의 극점(extreme point 또는 vertex)중 단지 4개의 극점을 나타내는 소위 Kharitonov polynomials의 Hurwitz 안정이 $\mathbf{P}$의 D-안정이라는 획기적인 결과를 발표하였다. Barmish[2]에 의해 제어문제에 적용 소개되면서 robust stability 연구에 많은 진전을 보였다. Bartlett등[3,6]은 (1)의 각계수가 q에 대해 선형종속관계로 주어지는 polynomial family에 대해 2^K로 주어지는 극점간 exposed edges가 안정이면 P가 D-안정(D는 임의의 단순영역)이라는 소위 "Edge 정리"를 발표하여 Kharitonov 정리의 일반화에 크게 기여하였다.

이러한 일반화에 대한 연구는 주로 이산치계로 확장문제와, 안정도 검증 계산량의 감소, 안정영역 D 설정조건의 완화에 두고 있으며 Barmish[4]와 Bhattacharryya 등[5]의 결과가 주목된다. 특히 Barmish[4]는 종래의 Edge정리에 근거하는 λ-sweeping과 달리 boundary sweeping에 의해 실연속스칼라함수로 표현되는 안정도 검증함수를 제시하여 실제 적용에 매우 효과적임을 보였다.

그런데 대부분 연구가 주어진 제어기에 대해 $\mathbf{P}$가 D-안정인지를 판별하는 것으로서, 만일 플랜트 계수의 공칭치(nominal value)에 대해 설계된 제어기가 D-불안정일때 이를 처리할 수 있는 기법의 연구가 요구된다. 본 논문에서는 제동특성을 고려한 강인한 극지정 제어기 구성에 관하여 기술하였다.

2. 정의

정의 2.1: (Interval polynomials) - 식(1),(2)에서

$$q = [q_0 \; q_1 \; \ldots \; q_n]^T \in R^{n+1}$$
$$a_i(q) = q_i \;, \; i = 0,1,2,\ldots,n$$
$$Q = \{q \mid q_i^- \le q_i \le q_i^+ , \; i = 0,1,\ldots,n\}$$

이면, 다음식(4)의다항식을 Interval Polynomial이라 한다

$$P(s,q) = \sum_{i=0}^{n} q_i s^i \qquad (4)$$

정의 2.2: (Polytopes of polynomials) - m개의 vertex를 나타내는 다항식의 convex hull을 polnomial polytope이라 한다. 즉,

$$\mathbf{P} = \{P(s) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i(s) \mid \lambda_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\} \qquad (5)$$

여기서 $P_i(s)$는 polytope $\mathbf{P}$의 vertex이다.

정의 2.3:(Vertices of polytope) - (1),(2)에 대해서 $\mathbf{P}$는 많아야 2^K 개의 극점을 가지며, i번째 극점은 다음식 (6)으로 표현한다.

$$q^i = [q_1^i \; q_2^i \; \ldots \; q_K^i]^T$$

여기서, $q_j^i = q_j^-$ 또는 q_j^+ , $j = 1,2,\ldots,k$

$$P_i(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j(q^i)\ s^j \qquad (6)$$

정의 2.4: (Linear Transformatioms)

$$T_1(s) : C^* \to C^*,\ (\ C^* \equiv C\cup\{\infty\}\ )$$

$$w = T_1(s) = e^{j\phi}S \quad (0 < \phi < 90) \qquad (7)$$

$$S = e^{-j\phi}\ w \qquad (8)$$

P(s)가 <그림1>의 빗금친 섹터내에 모든근이 존재하는 것은 $P(e^{-j\phi}W)$의 모든 근이 LHP내에 놓이는 것에 대응한다.

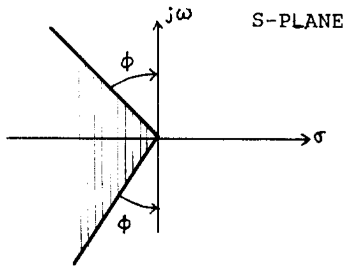

그림1. 감쇠율 φ로 정의된 섹터

정의 2.5: Hurwitz Testing Matrix

복소수 계수를 갖는 다항식에 대한 Hurwitz검증행열 $H_w(p)$는 다음과 같다.

$$P_w(s) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + jb_k)\ s^{n-k} \quad (단, a_0 \neq 0,\ a_k, b_k \in R) \qquad (9)$$

$$H_w(p) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \ldots\ldots & b_n & 0 \ldots 0 \\ a_0 & a_1 \ldots\ldots & a_n & 0 \ldots 0 \\ 0 & b_0 \ldots\ldots & b_{n-1} b_n & \\ 0 & a_0 \ldots\ldots & a_{n-1} a_n & \\ & & & \ldots a_n \end{bmatrix} \qquad (10)$$

정의 2.6: Kharitonov polynomials

식(4)의 interval polynomial에서, 2^{n+1}개의 vertex를 나타내는 다항식군 **P**의 실수부와 허수부는 다음 4개의 다항식의 그것내에 bound된다.
이 4개의 Vertex를 Kharitonov 다항식이라 한다.

$$\begin{aligned} K_1(s) &= q_0^- + q_1^- s^1 + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + \ldots \\ K_2(s) &= q_0^+ + q_1^+ s_1 + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + \ldots \\ K_3(s) &= q_0^+ + q_1^- s_1 + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + \ldots \\ K_4(s) &= q_0^- + q_1^+ s_1 + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + \ldots \end{aligned} \qquad (11)$$

3.감쇠율을 고려한 강인한 극 배치 제어기의 구성

(1) 문제의 설정

<그림2>와 같은 단 입출력(SISO) 피드백 시스템에서,플랜트는 매개변수 섭동을 가지며 제어기 C (s)는 극배치 방식인 경우를 고려한다.

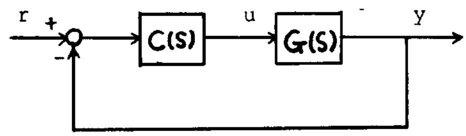

그림2. 피드 백 시스템

플랜트 전달함수 G(s)는

$$G(s) = \frac{B(S)}{A(s)} = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1}s^{m-1} + \ldots + \beta_0}{\alpha_n s + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_0} \qquad (12)$$

$$\begin{aligned} 여기서\quad & \beta_i \in [\beta_i^-,\ \beta_i^+]\ ,\ i = 0,1,\ldots,m \\ & \alpha_j \in [\alpha_j^-,\ \alpha_j^+]\ ,\ j = 0,1,\ldots,n \end{aligned} \qquad (13)$$

이때 A,B는 (13)의 조건하에서도 coprime이라 가정한다.

제어기 전달함수 C(s)는

$$C(s) = \frac{N(s)}{D(S)} = \frac{n_p s^p + n_{p-1}s^{p-1} + \ldots + n_0}{d_l s^l + d_{l-1}s^{l-1} + \ldots + d_0} \qquad (14)$$

(l=m-1 , p=n-1)

특성방정식 Δ(s)는

$$\Delta(s) = A(s)\ D(s) + B(s)\ N(s) \qquad (15)$$

안정영역 D를 그림1에서와 같이 감쇠율을 고려한 섹터내부로 정의하였을때, 문제는 (12),(13)로 표현되는 플랜트에 대해 D - 안정이 보장되는 제어기 C(s)를 결정하는데 있다. 이것은 Δ(s) 의 모든근이 (13)의 섭동에도 불구하고 요구되는 감쇠 특성을 가짐을 의미한다.

Δ(s)를 다항식으로 표현하면

$$\Delta(s) = \delta_{\bar n}s^{\bar n} + \delta_{\bar n-1}s^{\bar n-1} + \ldots + \delta_0$$

$(\ \bar n = n + m-1\ )$

(12)의 α_i , β_i는 (2)의 q_i에 대응하며, 다시쓰면

$$q = [\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n\ \beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_m]^T$$

(16)의 δ_i는 q에 1차 종속관계에 있다. 따라서 Δ(s)는 정의 2.2 와 정의2.3에 의해 2^k 개 (여기서, k = n + m)이내의 vertex를 가지는 poltope이 된다.

(2) 예비 결과

복소계수를 갖는 interval polynomal의 안정도 조건을 정리해 본다.

$$P_w(s) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + jb_k)s^k \quad (a_0 + jb_0 \neq 0) \qquad (18)$$

$$a_k \in [a_k^-,\ a_k^+]\ ,\quad b_k \in [b_k^-, b_k^+] \qquad (19)$$

여기서 (18),(19)로 표현되는 n 차 다항식의 집합을 P_w^n이라 하고, strictly Hurwitz인 n차 다항식의 집합을 H^n 이라 정의한다. 또한,

$$F_{i,j}(s) = M_i(s) + jL_j(s),\ i,j = 1,2,3,4, \qquad (20)$$

여기서, M_i (i = 1,2,3,4)는 각각 Kharitonov 다항식 (11)의 q_i 대신 a_i로 대치한 것이며 L_j (j = 1,2,3,4)는 q_i 대신 b_i로 대치한 다항식이다.

<u>정리 3.1[8,9]</u>: $P_w^n \subset H^n$ 이기위한 필요충분 조건은 다음 8 개의 vertex다항식 $F_{1,3}(S)$, $F_{1,4}(S)$, $F_{2,3}(S)$, $F_{2,4}(S)$, $F_{3,1}(s)$, $F_{3,2}(s)$, $F_{4,1}(s)$, $F_{4,2}(S)$가 H^n에 속하는 것이다.

(3) 감쇠율을 고려한 강인한 극배치 제어기

플랜트 매개변수의 공칭치를 각각 $\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1$라 하고 페루프 동특성을 고려하여 D영역내에 모든 근이 존재하는 다항식을 T(s)라 한다.

$$T(s) = t_0 + t_1 s + \ldots + t_r s^r \tag{21}$$

식(15)로 부터

$$\bar{A}(s)\,D(s) + \bar{B}(s)\,N(s) = T(s) \tag{22}$$

여기서, $\bar{A}(s)$, $\bar{B}(s)$는 공칭계수 $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i$ 로 표현되는 다항식이다. T(s)의 차수 $r = \bar{n} = n + m - 1$ 로 한다. (22)를 벡터 - 행열 형태로 다시쓰면,

$$\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_0\,0 \ldots & 0 & \bar{\beta}\,0\,0 \ldots\ldots 0 \\ \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_0 & & \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_0 \ldots\ldots 0 \\ \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_0 \ldots & & \bar{\beta}_2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_0\,0 \ldots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{\alpha}_n & & \bar{\beta}_m \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 \ldots\ldots 0 & \bar{\alpha}_n & 0 \ldots\ldots \bar{\beta}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_1 \\ \ldots \\ n_0 \\ n_1 \\ d_J \\ \vdots \\ \vdots \\ n_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ t_r \end{bmatrix} \tag{23}$$

즉, $\bar{S}X = Y$ (24)

$\bar{S}$는 (n+m) x (n+m) sylvester행열이고 X는 제어기 계수이다.
<3.1>절의 copricme 가정에 의해 $\bar{S}$는nonsingular이므로 (24)의 해 $\bar{X}$는 유일하게 존재하며 섭동이 없으면 폐루프근을 T(s)의 근으로 지정한다.
문제는 (13)의 섭동으로 $\bar{X}$에 대한 특성 다항식 $\Delta(s)$의 근이 D 영역 밖으로 나가는 경우이다.
이제 특성근이 D 영역내에 존재하도록 X를 결정하는 간단한 방법을 제시한다.
선형사상 $T_2(s)$를 정의하면

$$v = T_2(s) \triangleq s - \sigma, \quad (v \in C,\ \sigma \in R) \tag{25}$$
$$s = v + \sigma \tag{26}$$

$T_2(s)$는 처음에 지정해준 T(s)의 근을 σ의 부호에 따라서 좌우로 평행 이동 시키기 위해 사용된다.

$$T(v) \triangleq T(s = v+\sigma) = \eta_0 + \eta_1 v + \eta_2 v^2 + \ldots + \eta_r v^r \tag{27}$$
$$Y_v = [\,\eta_0\ \ \eta_1\ \ \eta_2\ \ldots\ \eta_r]^T \tag{28}$$
$$X_v = \bar{S}^{-1} Y_v \tag{29}$$

식(16),(17)로 표현되는 $\bar{n}$차 다항식군을 $P_\Delta^{\bar{n}}$라 하고, D 영역내에 근이 존재하는 $\bar{n}$차 다항식군을 $H_D^{\bar{n}}$라 정의한다.

<u>보조정리 3.2 :</u> T(s)가 D내에 근이 존재하는 다항식이면 (27),(28)조건하에서 $P_\Delta^{\bar{n}} \subset H^{\bar{n}}$ 인 유한 크기의 σ가 존재한다.

증명: 다항식 $P(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$ 의 근은 다음 반경의 원내에 존재한다.

$$r = 1 + \max \{\, |a_i/a_n| \ ;\ i = 0,1,\ldots,n-1 \,\} \tag{30}$$

식(13)의 유한 구간내 섭동을 갖는 경우에 $\Delta(s)$의 근의 공간 (root space)도 유한하다. 그리고 선형사상 $T_2(s)$는 복소평면에서 공칭치에 대한 근의 위치를 D의 경계로 부터 무한히 멀리 놓을 수 있다.
따라서 $P_\Delta^{\bar{n}} \subset H^{\bar{n}}$ 인 σ가 존재한다. ***

X_v 가 주어질때 polytope $P_\Delta^{\bar{n}}(s)$ 의 Kharitonov 다항식을 $R_1(s)$, $R_2(s)$, $R_3(s)$, $R_4(s)$라 하고, < 정의 2.4 >의 $T_1(s)$ 에 의해 선형변환된 다항식을 각각 $R_{T1}(w)$, $R_{T2}(w)$, $R_{T3}(w)$, $R_{T4}(w)$ 라 정의한다.

$$R_i(s) = \sum_{K=0}^{\bar{n}} r_{iK} \cdot s^K, \quad i = 1,2,3,4 \tag{31}$$

여기서 $r_{iK} = \delta_K^-$ 또는 δ_K^+

$$\begin{aligned} R_{Ti}(w) &= R_i\,(s = e^{-j\phi} w) \\ &= \sum_{k=0}^{\bar{n}} r_{iK} \cdot e^{jK\phi} \cdot w^K \\ &= \sum_{k=0}^{\bar{n}} (r_{iK} \cdot \cos k\phi + j r_{iK} \cdot \sin k\phi) \cdot w^K, \\ & \qquad i = 1,2,3,4 \end{aligned} \tag{32}$$

<u>정리 3.3</u> : 4 개의 변환 다항식 $R_{Ti}(w)$ $(i = 1,2,3,4)$ 가 Hurwitz 다항식이면 $P_\Delta^{\bar{n}} \subset H_D^{\bar{n}}$ 이다.

증 명 : Khratonov 다항식이 Hurwitz 이면 interval polynomial family 의 Hurwitz 에 대해 필요충분 조건이지만, polytope 문제에서는 단지 충분조건이 된다 [3,4,5]. 그리고 $T_1(s)$ 는 1:1 변환이므로 식(32)가 <정리 3.2>에 의해 polytope family $P_\Delta^{\bar{n}}$ 의 모든 근은 설정된 섹터 내부에 존재한다.

이때 (32)에서,

$$a_K = r_{1K} \cdot \cos k\phi, \quad a_K^- = a_K^+ = a_K \tag{33}$$
$$b_K = r_{1K} \cdot \sin k\phi, \quad b_K^- = b_K^+ = b_K$$

로 놓으면 (18),(19)의 형태가 되며, Hurwitz 행열은 식(10) 과 같다. ***

이상의 결과로부터 원하는 감쇠특성을 갖는 극배치제어기 설계과정을 정리해 본다.
먼저 플랜트 매개 변수의 공칭치로 구성되는 역 Sylvester 행열 $\bar{S}^{-1}$ 를 계산한다.
이것은 반복계산에서 항시 이용하게 된다.
원하는 제동특성을 갖도록 ϕ 를 설정하고

이섹터 내부를 D 영역으로 한다. 페루프 동특성을 고려한 D 내의 특성근에 대응하는 다항식 $T(s)$ 를 정한다.

주어진 $\bar{S}^{-1}$ 와 Y 로부터 최초의 제어기 계수 $\bar{X}$ 를 구한다. $\bar{X}$ 에대한 $\Delta(s)$ 로부터 R_1, R_{T1} 를 계산한다. R_{T1} 가 <정리 3.1> 을 만족하는지 검증 하여 안정이면 멈추고, 불안정이면 σ ($\sigma > 0$) 를 증가시켜 $T(s)$의 근을 좌측으로 이동시키며 이과정을 반복한다. 만약 초기 설정치 $T(s)$가 안정일때 불안정 한계를 구하려면 $\sigma < 0$ 에 대해 반복한다.

4. 결 론

구조적 불확실성을 갖는 선형 시불변 시스템의 강인한 극배치 제어기 구성에 관한 방법을 제시하였다. Kharitonov 정리와 이를 확장시킨 결과들을 근거로 선형변환을 적용하여 요구되는 제동특성을 갖도록 설계될 수 있음을 보였다. 이 방식은 한 개의 변수로 처리되고 설계과정이 간단하다.

또한 결정된 제어기의 D-안정에대한 상대적 한계를 구하는데도 유용하리라고 생각된다.

* 참 고 문 헌

1. V.L.Kharitonov,"Asymptotic stability of an equilibrium position of a familyof systems of linear differential equations" Differentsial'nye Uye Uravneniya, vol.14,NO.11,p 2086-2088,1978
2. B.R.Barmish,"Invariance of the strict Hurwitz property for polinomials with perturbed coefficients,": IEEE,AC-29,p 935-936,1984
3. A.C.Bartlett,et al.2,"Root locations of an entire polytape of polynomials:it suffices to check the edge," in Proc.A.C.C.,Minneapolis,1987
4. B.R.Barmish,"A generalization of Kharitonv's four-polynomials concept for robust stability problems with linearly dependent cofficient perturbations," IEEE, Ac-34,No.2,p157-165,1989
5. H.Chapellat,S.P.Bhattacharryya,"A generlization of Kharitonov's theorem:Robust stability of interval plants," IEEE,AC-34,No.3,p 306-311,1989
6. A.C.Bartlett et al.1,"A necessary and s sufficient condition for Schur invariance and generalized atability of polytopes of polynimials," IEEE,AC-33,No.6,p 575-578,1988
7. C.B.Soh et al.1,"Damping Ratio of Polynomials with Peturbed Coefficients," IEEE,Vol.AC-33,No.12,p 1180-1182,1988.
8. V.L.Kharitonov,"On a generalization of a stability criterion," Izv.Akad.Nauk.Kazakh. SSR Ser Fiz. Mat., Vol.1,p 53-57,1978
9. N.K.Bose et al.1,"A Simple General proof of Kharitonov's Generalized Stability Criterion,'" IEEE,Vol. CAS-34,NO.8,P 1233-1237,1987