

이산 대수 Riccati 방정식의
해의 존재 영역 확장 및 H[∞] 제어기 설계 응용
Extensions of the solution region for a discrete algebraic
Riccati equation and its application to H[∞] controller design

권 옥현 오 박 부견 김 상우
(Wook Hyun Kwon , PooGyeon Park , Sang Woo Kim)

서울대학교 자동화 시스템 공동 연구소 및 제어계측공학과

This paper describes some properties of a discrete algebraic Riccati equation and its application to H[∞] control design. The conditions, under which an input weighting matrix can be found for a negative output weighting matrix in order that a solution P for a discrete algebraic equation may exist, are suggested in case of a stable A. This result is applied to a H[∞] controller design for the special case of nonsingular B. It is based on a state feedback control law whose objective is to reduce the effect of input disturbances below a prespecified level. This law requires the solution of a modified algebraic Riccati equation, which provides an method for the H[∞] optimization control problem approximately.

1. 서론

선형 시스템에 대한 제어기 설계 문제로서 LQ(Linear Quadratic) 최적 제어[1-9] 및 H[∞] 최적 제어[10-20] 문제가 많이 다루어져 왔다. LQ 최적 제어 문제에서의 중요 연구 내용의 한 가지는 Riccati 방정식에 대한 성질을 규명하는 것이다. 연속 선형 시스템에 대한 미분 Riccati 방정식이나 대수 Riccati 방정식의 성질은 이미 많은 연구에 의해 밝혀져 LQG/LTR 또는 H[∞] 등의 문제에 이용되어 왔다[3,4,16,17]. 그러나, 이산 시스템에 대한 성질은 Riccati 방정식의 특수한 형태로 인하여 몇가지 연구만 행하여져 왔다[5,7]. 주로 해의 한계 영역[5,6] 및 이득 행렬의 패 순환 획득 방법[7], 그리고 입력 및 출력 변수 가중치 행렬이 Riccati 방정식 해 또는 이득 행렬에 미치는 영향[8] 등이 연구되었다. 한편 H[∞] 크기를 최소화시키는 제적 제어 시스템을 설계하는 H[∞] 이론은 G.Zames[10]에 의해 처음 시도된 이후 최근까지 많은 연구가 되어 왔다[11-21]. G.Zames, C.Cahn, B.Pearson, H.Kimura 등이 사용한 제어기 설계방법은 대수적인 시스템 이론을 사용한 것으로 실제 시스템을 주파수 영역에서 서로 소인수 분해(coprime factorization) 형태로 표시되는 모든 제어 대상에 적용됨으로 일반적인 연속시스템, 이산시스템, 그리고 분산시스템 등에 모두 적용될 수 있다. 그러나, 서로 소인수 분해 및 주파수 영역에서의 보간법(interpolation) 등 계산이 어려운 방법들을 사용하고, 제어기의 차수도 높아지므로 실제 제어기의 실현이 쉽지 않다. 한편, 상태변수로 표시되는 일반시스템의 서로 소인수 분해 형태가 잘 알려져 있고[14,15], 유리함수가 그 전달함수가 표시되므로 주파수영역에서의 H[∞] 제어기 설계방법을 적용하기 쉽다. 그러나, 이 방법에서도 제어기의 차수가 높게 나타나므로 실제 구현하기가 쉽지 않다. 최근 들어서는 상태변수로 표시되는 일반적인 시스템의 H[∞] 제어기를 상태변수영역에서 직접 구하는 연구 결과들이 발표되고 있다.[16,17] 이러한 방법들은 대수적인 Riccati 방정식의 변형된 형태로부터 그 해를 구하여 사용함으로써 주파수 영역에서 설계하는 것보다 쉽게 H[∞] 제어기를 구할 수 있도록 하여 준다. 연속 시스템의 상태 변수 궤환 제어의 경우에는 최적의 H[∞] 제어기를 상수 궤환 제어로 얻고 있으며 출력 궤환 제어의 경우에도 관측기를 사용하여 LQG 와 비슷한 형태의 제어기를 구하고 있다[21]. 이산 시스템의 경우, Riccati 방정식에 대한 성질이 많이 연구되어 있지 않으므로 H[∞] 제어기를 대수 Riccati 방정식에 의한 접근 방법으로 설계하는 연구는 진행되지 않았다. 따라서, 이러한 연구는 이산 대수 Riccati 방정식의 성질을 규명하는 작업이 선행된다.

이 논문의 2절에서는 적용되는 시스템이 안정한 경우

되먹임 이득행렬에 의한 시스템이 안정화 되는 범위에서 Riccati 방정식의 해가 존재하도록 입력 및 출력 변수의 가중치 행렬을 구성하는 관측식을 유도하였다. 우선 변형된 입력 가중치 행렬의 형태로부터 유도되는 방정식의 해가 존재함을 증명하고 해의 성질을 보였다. 또한 이러한 결과로부터 새로운 방정식 형태를 만들었다. 3절에서는 이 방정식을 이용하여 이산 선형 시스템에서 H[∞] 최적화문제를 구성하였다. 상태 변수 되먹임 제어에서 입력 변수의 갯수와 상태 변수의 갯수가 같은 경우에 입력단 외란이 출력에 주는 영향을 최소화하는 제어기를 설계하는 방법을 제시하였다.

2. DARE 존재 영역의 확장

DARE(Discrete algebraic Riccati Equation) 의 해의 존재 영역을 확장하기 위하여 다루어 지는 대상 시스템은 다음과 같다.

$$x(k+1) = A x(k) + D d(k) \tag{1}$$

$$y(k) = E x(k) \tag{2}$$

여기서 x(k) 는 (n x 1) 실수 벡터로 상태 변수이고, d(k) 는 (1 x 1) 실수 벡터로 입력이고, y(k) 는 (m x 1) 실수 벡터로 출력이고, A 는 (n x n) 실수 행렬, D 는 (n x 1) 실수 행렬, E 는 (m x n) 실수 행렬이다. 다음 가정은 2절의 내용을 전개하는데 필요한 가정들이다.

- (가정1) A 는 안정 행렬이다.
- (가정2) 입력 d(·) 는 l_∞ 에 속한다.
- (가정3) [A,D,E] 는 제어가능, 관측가능 행렬 조합이다.
- (가정4) w 는 [0, 2π] 사이에 있다.

$$r^2 I - H^*(e^{-jw})H(e^{jw}) \geq 0 \tag{3}$$

이때, H(z) = E(zI-A)⁻¹D 로 정의된다.

(가정4)는 (가정1)에 함축되는 내용이나, 내용 전개상 r 이 전달함수의 H[∞] 크기 한계값보다 큰 값을 나타내어 입력 변수 가중치 행렬을 구하는데 사용된다. 다음과 방정식 (4)는 존재성을 주장하려는 변형된 DARE 이다. (5)와 (6) 식은 (4) 식의 존재성을 주장하기 위하여 사용되는 매개적 방정식들이다.

$$A^*PA - P - A^*PD(r^2I+D^*PD)^{-1}D^*PA - E^*E = 0 \tag{4}$$

$$A^*PA - P - A^*PD(r^2I+D^*PD)^{-1}D^*PA = -E^*E \tag{5}$$

$$A'PA - P = -E'E \quad (6)$$

다음 전제정리1은 존재 정리를 하기 앞서 초기 상태가 0인 경우에서의 입력 $d()$ 와 출력 $y()$ 와의 관계를 나타낸 것이다.

전제정리1: 시스템(S)가 (가정1,2,3,4)를 만족시키고 초기 값 $x(0) = 0$ 이면 다음이 성립된다.

$$\sum_{k=0}^{\infty} y'(k)y(k) \leq r^2 \sum_{k=0}^{\infty} d'(k)d(k)$$

증명: $x(0) = 0$ 이므로 $x(k) = 0$ ($k < 0$) 으로 간주하면, $y(k) = 0$, $d(k) = 0$ ($k < 0$) 이라 놓을 수 있으므로, k 구간을 음극한에서 양극한까지 확장하여 생각할 수 있다. 따라서, Parseval의 정리를 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_k y'(k)y(k) \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} Y'(e^{-jw})Y(e^{jw}) dw \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \delta'(e^{-jw})H'(e^{-jw})H(e^{jw})\delta(e^{jw}) dw \\ &\leq r^2 (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \delta'(e^{-jw})\delta(e^{jw}) dw \\ &= r^2 \sum_k d'(k)d(k) \end{aligned}$$

여기서 $Y(), \delta()$ 는 각각 $y(), d()$ 의 Laplace 변환함수이다. (증명끝)

이 존재 정리를 이용하여 (전제정리2)는 t 가 양수인 경우, 식(5)의 해가 존재하는 범위를 식(6)의 해를 이용하여 표시했다. 이 증명은 t 가 음수인 경우로 확장하기 위하여 필요하다.

전제정리2: 시스템(S)가 (가정1,2,3,4)를 만족시킨다 하자. 이때 t 가 양수인 경우, (5)의 P 를 P_n , (6)의 P 를 P_m 이라 하면, P_n 의 범위는 다음과 같다.

$$tP_m \geq P_n \geq [t/(t+1)]P_m \quad (7)$$

증명: t 가 양수이므로 (5)는 일반적인 무한 시간 LQ 문제의 DARE 해가 됨으로 이 식을 만족시키는 $P_n(>0)$ 이 존재하여 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} & x'(0)P_n x(0) \\ &= \min_u \sum_{k=0}^{\infty} [r^2 d'(k)d(k) + ty'(k)y(k)] \end{aligned} \quad (8)$$

$y(k)$ 를 영상태응답(zero state response) $y_1(k)$ 와 영입력응답(zero input response) $y_2(k)$ 로 나눈다.

$$y(k) = y_1(k) + y_2(k)$$

g, h 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} g^2 &= x'(0)P_n x(0) = \sum_{k=0}^{\infty} y_2'(k)y_2(k) \\ h^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} y_1'(k)y_1(k) \end{aligned}$$

(전제정리1)의 결과를 이용하여 정리하면

$$\begin{aligned} & x'(0)P_n x(0) \\ & \geq h^2 + t g^2 - \left| \sum_{k=0}^{\infty} 2ty_1'(k)y_2(k) \right| + th^2 \end{aligned}$$

한편 Schwarz 부등식에 의하여 다음이 성립한다.

$$2 \left| t \sum_{k=0}^{\infty} ty_1'(k)y_2(k) \right|$$

이 결과를 위 식에 대입하면

$$\begin{aligned} & x'(0)P_n x(0) \\ & \geq t g^2 - 2 \left| t \sum_{k=0}^{\infty} ty_1'(k)y_2(k) \right| + th^2 \end{aligned} \quad (9)$$

따라서, $h = \left| t \sum_{k=0}^{\infty} ty_1'(k)y_2(k) \right|$ 에서 최소값 $[t/(1+t)]g^2$ 를 갖는다. 그러므로,

$$x'(0)P_n x(0) \geq [t/(1+t)]x'(0)P_n x(0) \quad (10)$$

한편, (6) 식을 다음과 같이 변형하여 (5) 식과의 차를 구하면

$$\begin{aligned} & A'(tP_m)A - (tP_m) = -tE'E \\ & A'[tP_m - P_n]A - [tP_m - P_n] \\ & = -A'P_n D(r^2 I + D'P_n D)^{-1} D'P_n A \end{aligned}$$

따라서, (가정1)로부터 상한값은 다음과 같이 주어진다.

$$tP_m \geq P_n \quad (11)$$

따라서, t 가 양수인 경우는 (10), (11)에 의하여 (7) 식이 성립함을 알 수 있다. (증명끝)

앞 증명을 t 가 $(-1, 0)$ 사이까지 확장한 내용을 (정리1)에서 다루었다. 이 정리에서는 식(5)의 해가 존재하는 영역이 식(7)과 같은 형태의 연장으로 표시되고 이 해는 t 에 대하여 단조 증가 성질을 가짐을 증명한다.

정리1: 시스템(S)가 (가정1,2,3,4)를 만족시킨다. 이때 t 가 $(-1, 0)$ 사이에 있는 경우, (4)의 방정식에 대하여 $P(<0)$ 가 존재하며, 이때 되먹임항에 의한 $A-D(r^2 I + D'PD)^{-1} D'PA$ 는 안정 행렬이며 P 는 t 에 대하여 증가 함수이다.

증명: (5) 식으로부터 다음 관계가 유도된다.

$$\begin{aligned} & [I + (r^2 I + D'PD)^{-1} D'PA(I - e^{jw}A)^{-1} D]'(r^2 I + D'PD)^{-1} \\ & [I + (r^2 I + D'PD)^{-1} D'PA(I - e^{-jw}A)^{-1} D] \\ & = r^2 I + tH'(e^{-jw})H(e^{jw}) \\ & \geq r^2 I - H'(e^{-jw})H(e^{jw}) \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

이 사실과 함께 (가정4)에 의해 $[-1, 0)$ 사이에 있는 모든 t 에 대하여 $r^2 I + D'PD > 0$ 가 성립한다. 따라서 $(r^2 I + D'PD)^{-1}$ 이 잘 정의된다(well-defined). 그러므로, (7)식에서 t 의 영역이 $[-1, 0)$ 으로 확장될 수 있으며, (8)식에서의 관계가 t 가 $(-1, 0)$ 사이에 있을 경우에도 성립한다. 즉 식(8)를 만족시킴으로 P 는 Lyapunov 함수가 되어 t 가 $(-1, 0)$ 사이에서는 되먹임 항에 의한 $A-D(r^2 I + D'PD)^{-1} D'PA$ 는 안정 행렬이라는 것을 알 수 있다. 한편, (5)식의 P 를 t 에 대하여 미분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$[A-D(r^2 I + D'PD)^{-1} D'PA]'(dP/dt)[A-D(r^2 I + D'PD)^{-1} D'PA] - (dP/dt) = -E'E$$

이 두 사실로부터 t 가 -1 보다 큰 경우에 다음이 성립한다.

$$(dP/dt) > 0 \quad (12)$$

따라서 t 가 -1 보다 큰 경우, 식(5)가 해석적이고 t 에 대하여 증가함수이므로, t 가 $(-1, 0)$ 사이에서 식(8)를 만족시키는 유일한 음정칙해 $P(<0)$ 가 존재한다. (증명끝)

첫 정리에서의 t 값이 -1 로 접근하는 경우에 해가 유한한 값을 가지며 (4)식을 만족함을 다음에서 다루었다.

정리2: 시스템(S)가 (가정1,2,3,4)를 만족시킨다 하자. 이때 t 가 -1 인 경우, (4)의 방정식에 대하여 $P(<0)$ 가 존재한다.

증명: $t=-1$ 인 경우 (9) 식은 다음과 같다.

$$x'(0)Px(0) \geq -g^2 - 2gh$$

(가정2),(전제정리1)에 의해 h 는 유한한 값을 지니며, g 또한 유한한 값을 가진다. 따라서, $x'(0)Px(0)$ 역시 음수방향에 대하여 제한되어 있다. 그러므로 (12)과 함께 $t = -1$ 에서의 $P(<0)$ 의 존재성을 알 수 있다. (증명끝)

(4) 식의 해에 대한 존재성의 증명이 위하여 변형된 식 (13) 식의 존재성을 다음 정리에서 다루었다. 이 변형된 식은 3.절에서 제어기 설계를 위한 식을 유도짓 증명을 위하여 필요하다.

정리3: 시스템(S)가 (가정1,2,3,4)를 만족시키면 (13) 식을 만족시키는 $T(>0)$ 가 존재한다. 이때 (4) 식의 해 P 와 T 와 관계식은 (14) 식과 같다.

$$A'TA - T + TD(r^2I + D'TD)^{-1}D'T + E'E = 0 \quad (13)$$

$$T^{-1} = -P^{-1} - r^{-2}DD' \quad (14)$$

증명: (가정4)에 의해 (전제정리2)에서 보인 것처럼

$$r^2I + D'TD > 0$$

가 성립하므로 다음과 같은 결론에 이른다.

$$P - PD(r^2I + D'TD)^{-1}D'TP \\ = (P^{-1} + r^{-2}DD')^{-1} < 0$$

한편 (전제정리2)에 의해 (4)을 만족시키는 $P(<0)$ 는 존재한다. 따라서 (14)에 의해 정의된 T 는 양정식 행렬이다(즉, $T>0$). (14) 식을 변형하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A'[(P^{-1} + r^{-2}DD')^{-1} + T]A - [P + (T^{-1} + r^{-2}DD')^{-1}] = 0$$

이 식을 (4) 식에 대입하면 (13) 식이 구성된다. 따라서 (13)를 만족시키는 양정식 행렬 T 가 존재한다. (증명끝)

다음은 (정리2)에 대한 예로서 단일 입력, 단일 출력 시스템에 대하여 적용시켜 본 것이다.

예제: 다음과 같은 시스템에 대하여 $P(>0)$ 가 존재하는 r 의 범위를 구하여 보면 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 1 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = -E'E \quad Ac = A - D(R + D'PD)^{-1}D'PA$$

한편, 모든 w 에 대하여

$$rI - D'(e^{-jw}I - A')^{-1}E'E(e^{jw}I - A)^{-1}D \geq 0$$

가 되도록 하는 r 의 하한값을 구하면 $r_c = 51.02$ 가 된다. 이 값 이상에서 r 이 감소하면 P 도 감소하며 이 영역에서는 Ac 행렬이 안정하다.

| r | P의 고유치 | Ac의 고유치 |
|-------|-------------------------|--|
| 100 | -0.302643 -10.726773 | 0.252894 0.569121 |
| 60 | -0.360262 -12.780965 | 0.237783 0.741592 |
| 52 | -0.416790 -15.351840 | 0.233143 0.900566 |
| 51.02 | -0.453061 -17.378890 | 0.232513826 0.999999974 |
| 50 | -1.403954 -47.484934 | 0.94100 + i0.10810 0.94100 - i0.10810 |
| 30 | -1.433911 -27.899622 | 0.82179 + i0.56980 0.82179 - i0.56980 |

(예제끝)

3. H^∞ 제어기 구성

3.절에서는 이산 선형 시불변 시스템의 H^∞ 제어기 설계를, 상기 2절의 결과를 이용하여 새로이 제시된 방정식을 사용하여 구성하는 방법을 다루었다. 이 방법이 적용되는 대상 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A x(k) + B u(k) + D d(k) \\ w(k) &= E x(k) \end{aligned} \quad (\Sigma)$$

여기서 $x(k) \in R^n$ 는 상태변수, $d(k) \in R^m$ 는 입력측 외란, $u(k) \in R^r$ 는 입력, 그리고 $w(k) \in R^q$ 는 제어하려는 출력이다. 일반적인 H^∞ 최적화 문제는 $y(k)$ 를 이용한 동적 제어를 이용하여 $d(k)$ 에서 $w(k)$ 로의 전달함수의 H^∞ 크기를 최소화하는데 반하여 여기서는 상태 변수의 최대값 상수 제어를 목적으로 한다. 제어기 구성을 위한 이론을 전개하기에 앞서 다음 두가지 정의를 내린다.

정의1: 다음 조건을 만족시키면 시스템 Σ 이 외란 감쇄 영역 r 을 가지고 안정화 된다고 한다.

1. $Ac = A + B K$ 가 안정 행렬이다.
2. $H(z) = E(zI - Ac)^{-1}D$ 라할 때, 모든 $w \in [0, 2\pi]$ 에 대하여

$$r^2I \geq H'(e^{-jw})H(e^{jw})$$

가 성립한다.

정의2: 시스템 Σ 이 외란 감쇄 영역 r 을 가지고 MDARE 조건을 만족시킨다는 것은 주어진 $r(>0)$ 에 대하여 다음과 같은 방정식을 만족시키는 $P(>0)$, $Q(>0)$, $R(>0)$ 이 존재하여야 한다.

$$\begin{aligned} A'PA - P - A'PB(R + B'PB)^{-1}BTPA + Q \\ + PD'(rI + D'PD)^{-1}DP + r^{-1}E'E = 0 \end{aligned} \quad (MDARE)$$

앞에서 정의된 MDARE 식이 시스템을 안정화 시킬 수 있고 이때 입력측 외란의 영향의 상한값을 제시할 수 있음을 다음 정리에서 나타낸다.

정리1: 시스템 Σ 이 외란 감쇄 영역 r 을 가지고 MDARE 조건을 만족시키면 이 시스템은 외란 감쇄 영역 r 을 가지고 안정화 되고 이때 이득 행렬은 다음과 같다.

$$K = -(R + B'PB)^{-1}B'PA$$

증명: 가정에 의해 주어진 $r(>0)$ 에 대하여 MDARE를 만족시키는 $R(>0), Q(>0), P(>0)$ 가 존재한다. 이 경우 $Ac = A + BK$ 라 두면 다음 식이 성립한다.

$$Ac'PAc - P = -A'PB(R+B'PB)^{-1}R(R+B'PB)^{-1}B'PA \\ - PD(rI+D'PD)^{-1}D'P - r^{-1}E'E$$

따라서 $\lambda_i(Ac) < 1$, 즉 Ac 는 안정 행렬이다. 이제 $r^2I - H'(z^{-1})H(z)$ 를 고려하자. MDARE 식을 정리하면 다음과 같다.

$$-r^{-1}E'E = (I-Ac'z)P(I-zAc) - P(I-zAc) - (I-zAc')P \\ + A'PB(R+B'PB)^{-1}R(R+B'PB)^{-1}B'PA \\ + PD(rI+D'PD)^{-1}D'P$$

그러므로, 다음 식이 성립한다.

$$rI - r^{-1}D'(z^{-1}I-Ac')^{-1}E'E(zI-Ac)^{-1}D \\ = (I-(D'PD+rI)^{-1}D'P(I-zAc)^{-1}D)'(rI+D'PD) \\ (I-(D'PD+rI)^{-1}D'P(I-z^{-1}Ac)^{-1}D) \\ + D'(z^{-1}I-Ac')^{-1}A'PB(R+B'PB)^{-1}R(R+B'PB)^{-1} \\ B'PA(zI-Ac)^{-1}D$$

따라서 $z = e^{jw}$, $w \in [0, 2\pi]$ 에 대하여 다음 항등식이 성립한다.

$$r^2I - D'(z^{-1}I-Ac')^{-1}E'E(zI-Ac)^{-1}D \geq 0$$

윗 두 사실로부터 이 시스템은 외란 감쇄 영역 r 을 가지고 안정화 된다. 또한 이득 행렬은 다음과 같이 주어진다.

$$K = -(R+B'PB)^{-1}B'PA \quad (\text{증명끝})$$

상기 내용과 상대적인 내용으로 다음이 제시된다. 우선 (정리2)에서는 $Ac=A+BK$ 가 비특이 행렬인 경우 외란 감쇄 영역 $r1$ 을 가지고 안정화될 수 있을 때 MDARE 를 구성하는 방법을 서술하고 다음 정리에서는 Ac 의 제한 조건을 제거하기 위한 내용이 다루어진다.

정리2: 시스템 Σ 의 행렬 $Ac=A+BK$ 와 B 가 비특이 행렬이고 외란 감쇄 영역 $r1$ 을 가지고 안정화 될 수 있다면, 이 시스템은 외란 감쇄 영역 $r(>r1)$ 을 가지고 MDARE 을 만족시킨다.

증명: r 을 $r1 + a$ 라 놓자($r1>0, r>0, a>0$). 조건으로부터 다음이 만족된다.

$$Ac = A + BK \text{ 는 안정 행렬이다.} \quad (15)$$

$$H'(e^{-jw}) H(e^{jw}) \leq (r-a)^2 I, \quad w \in [0, 2\pi] \quad (16)$$

$$D'(z^{-1}I-Ac')^{-1}E'E(zI-Ac)^{-1}D \leq (r^2 - 2ar + a^2)I$$

한편, 다음을 정의하자.

$$W(z) = (zI-Ac)^{-1}D$$

이 경우 $W(z)$ 는 단위원에서 해석적이고 분모차수가 분자차수보다 큼으로 모든 w 에 대하여 다음과 같은 한계점 $b(>0)$ 가 존재한다.

$$W'(e^{-jw})W(e^{jw}) \leq bI$$

따라서,

$$D'(e^{-jw}-Ac')^{-1}E'E(e^{jw}I-Ac)^{-1}D \\ \leq (r^2 - ar)I - arb^{-1}W'(e^{-jw})W(e^{jw})$$

다음을 정의하자.

$$U'U = E'E + arb^{-1}I$$

그러면,

$$D'(z^{-1}I-Ac')^{-1}U'U(zI-Ac)^{-1}D \leq (r^2 - ar)I$$

또한, 다음을 정의하자.

$$Y(z) = (z^{-1}I-Ac')^{-1}D'$$

이 경우 $Y(z)$ 는 단위원에서 해석적이고 분모차수가 분자차수보다 큼으로 모든 w 에 대하여 다음과 같은 한계점 $c(>0)$ 가 존재한다.

$$Y'(e^{-jw})Y(e^{jw}) \leq cI$$

따라서,

$$U(e^{jw}-Ac)^{-1}DD'(e^{-jw}I-Ac')^{-1}U' \\ \leq (r^2 - ar)I - arc^{-1}Y'(e^{-jw})Y(e^{jw})$$

다음을 정의하자.

$$GG' = DD' + arc^{-1}I \quad (17)$$

그러면,

$$U(e^{jw}I-Ac)^{-1}GG'(e^{-jw}I-Ac')^{-1}U' \leq r^2I \\ G'(e^{-jw}I-Ac')^{-1}U'U(e^{jw}I-Ac)^{-1}G \leq r^2I \quad (18)$$

앞의 3가지 사실 (15), (18), 그리고 $[Ac, G, U]$ 가 $H(z)$ 의 관측가능, 제어가능 상태 변수 구현 행렬)로부터 다음과 같은 방정식을 만족시키는 $P(>0)$ 가 존재한다. ((2. 절)의 존재성 증명: 정리3)

$$Ac'PAc - P + PG(rI+G'PG)^{-1}G'P + r^{-1}U'U = 0 \quad (19)$$

한편

$$G(rI+G'PG)^{-1}G' - D(rI+D'PD)^{-1}D' = \\ ar^2b^{-1}[(rI+DD')'(rI+DD'P)+arb^{-1}PDD'P+ar^2b^{-1}P]^{-1} > 0$$

따라서,

$$PG(rI+G'PG)^{-1}G'P - PD(rI+D'PD)^{-1}D'P > 0 \quad (20)$$

그러므로, (15), (17), (19), 그리고 (20) 을 결합하면 다음 식이 유도된다.

$$A'PA - P + PD(rI+D'PD)^{-1}D'P + r^{-1}E'E \\ + K'B'PA + A'PBK < -arb^{-1}I - K'B'PBK$$

$B'PAx=0$ 이 되는 x 에 대하여

$$x'(A'PA - P + PD(rI+D'PD)^{-1}D'P + r^{-1}E'E)x \\ < -x'(arb^{-1} + K'B'PBK)x$$

한편 Ac 가 비특이 행렬이라는 가정으로부터

$$-P + PD(rI+D'PD)^{-1}D'P + r^{-1}E'E \\ < -P + PG(rI+G'PG)^{-1}G'P + r^{-1}U'U \\ < -Ac'PAc \\ < 0$$

그리고, B 가 비특이 행렬이므로 작은 R(>0) 을 선택할수록

$$A'PA - A'PB(R+B'PB)^{-1}B'PA = A'(P^{-1} + BR^{-1}B')^{-1}A$$

가 영으로 간다.

따라서 R(>0) 이 존재하여 다음 식을 만족시킨다.

$$\min \sigma(-P + PD(rI + D'PD)^{-1}D'P + r^{-1}E'E) \\ > \max \sigma(A'PA - A'PB(R+B'PB)^{-1}B'PA)$$

즉, 다음 식을 만족시키는 R(>0), Q(>0) 가 존재한다.

$$A'PA - P + PD(rI + D'PD)^{-1}D'P + r^{-1}E'E \\ - A'PB(R+B'PB)^{-1}B'PA + Q = 0$$

따라서 이 시스템은 외란 감쇄 영역 r 을 가지고 MDARE 조건을 만족시킨다. (증명끝)

윗 정리에서 사용된 Ac 가 비특이 행렬이라는 가정을 없애기 위해 다음 정리를 증명하여 외란 감쇄 영역 r 을 가지고 안정화 되게 하는 되먹임을 Ac 가 비특이 행렬이 되게 할 수 있도록 구성할 수 있음을 보인다.

정리3: 시스템 Σ 에서 [Ac, D, E] 이 H(z)의 관측가능, 제어 가능 상태 실현 행렬이고 (A, B) 가 제어가능하다고 하자. ρ, μ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\mu = \{ K : Ac = A + BK \text{ 가 특이 안정 행렬} \} \\ \rho = \{ K : Ac = A + BK \text{ 가 비특이 안정 행렬} \} \\ r_0 = \inf \{ r : r^2 I - H^* H \geq 0, K \in \mu \} \\ r_k = \inf \{ r : r^2 I - H^* H \geq 0, K \in \rho \}$$

그러면 다음 식이 성립한다.

$$r_0 \geq r_k$$

증명: 임의의 주어진 $a(>0)$ 에 대하여 다음 식을 만족시키는 $K_0 \in \mu$ 를 선택할 수 있다.

$$(r_0 + a/2)^2 I - H^* H \geq 0 \quad (21)$$

한편 단위 직교 좌표 변환 행렬 T 가 존재하여 $A + BK_0$ 를 다음과 같이 대각화시킨다.

$$T(A+BK_0)T' = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

여기서, A_0 는 비특이 행렬 이다. 따라서,

$$H(z) = ET(zI - (A+BK_0))^{-1}T'D \\ = ET \begin{bmatrix} (zI - A_0)^{-1} & 0 \\ 0 & (zI)^{-1} \end{bmatrix} T'D$$

한편 (A, B) 가 제어가능함으로 K_n 을 다음과 같이 정의할 수 있다. (+ 는 가상 역행렬 표시)

$$K_n = K_0 + [I \ 0 \ \dots \ 0] [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]^{-1}$$

$$[I \ A \ \dots \ A^{n-1}] T' \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n^{-1}I \\ 0 & 0 \\ 0 & n^{-1}I \\ \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & n^{-1}I \end{bmatrix} T$$

이 경우 $K_n \in \rho$ 이고 $A+BK_n$ 및 전달 함수 $H_n(z)$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$A + BK_n = T' \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & n^{-1}I \end{bmatrix} T$$

$$H_n(z) = ET \begin{bmatrix} (zI - A_0)^{-1} & 0 \\ 0 & (z - n^{-1})^{-1}I \end{bmatrix} T'D$$

$w = w_0$ 에서 고정시키자. ($z = z_0$) 여기서 $H_n'(z_0^{-1})H_n(z_0)$ 와 $H'(z_0^{-1})H(z_0)$ 를 고려하자. 이때 곱하기 전의 부분 행렬들의 구성 인자들은 해석적이고 아래와 같이 z 에 대하여 점의미수렴성(pointwise convergence)을 지닌다. 즉 임의의 주어진 q 에 대하여 적당한 $N(z_0) (>0)$ 가 존재하여 다음 식을 만족시킨다.

$$z_0 - (1/z_0 - 1/N)^{-1} < q \\ z_0 - (z_0 - 1/N)^{-1} < q$$

이때 $N(z_0)$ 는 $1 + 1/q$ 보다 크게 잡아야 된다. 따라서 전체 두 식은 $w \in [0, 2\pi]$ 에 대하여 점의미수렴성을 지닌다. 그런데, 구간이 완전구간이므로 w 에 상관 없이 수렴성을 지닌다. 따라서, 앞에서 임의로 택한 a 에 대해서 $N(>0)$ 이 존재하여 $n(>N)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$H'(e^{-jw})H(e^{jw}) - (a^2/4)I \quad (22) \\ < H_n'(e^{-jw})H_n(e^{jw}) < H'(e^{-jw})H(e^{jw}) + (a^2/4)I$$

(21), (22) 를 종합하여 정리하면 다음과 같다. 임의의 주어진 $a(>0)$ 에 대하여 다음을 만족시키는 $K_n \in \rho$ 가 존재한다.

$$(r_0 + a)^2 I - H_n^* H_n \geq 0$$

이것은 다음을 의미한다.

$$r_0 \geq r_k \quad (\text{증명끝})$$

(정리2,3)의 결과를 이용하면 B가 비특이 행렬인 경우, 폐쇄된 시스템이 외란 감쇄 영역 r 을 가지고 r 보다 큰 값에 대하여 MDARE 방정식을 풀 수 있으므로 다음과 같이 정리할 수 있다.

정리4: 시스템 Σ 이 외란 감쇄 영역 r_1 을 가지고 안정화되고 (A, B) 가 제어가능하고 B가 비특이 행렬이라면 이 시스템은 외란 감쇄 영역 $r(>r_1)$ 을 가지고 MDARE 조건을 만족시킨다.

증명: (정리3)에 의해 비특이 안정 행렬 $Ac = A + BK$ 가 존재하여 외란 감쇄 영역 r_1 에 의해 안정화 될 수 있다. 따라서

(정리2)에 의해 이 시스템은 외란 감쇄 영역 $r(>r_1)$ 을 가지고 MDARE 조건을 만족시킨다. (증명끝)

앞 정리들의 결과를 이용하면, B가 비특이 행렬인 경우 MDARE 방정식을 풀어서 입력측 외란에서 출력측으로 나가는 전달 함수의 H_{∞} 크기를 최소화 시키는 제어기를 다음 단계에 의해 구성할 수 있다. 첫번째, 큰 외란 감쇄 영역에서 MDARE 식을 풀기 시작하여 해가 존재하면 감쇄 영역을 줄여 간다. 둘째, 감쇄 영역 하한 이 발견되면 이득 행렬을 구하여 제어기를 구성한다. 다음 예제는 이러한 방법을 통한 제어기를 설계하는 과정을 다루었다.

예제: 시스템 변수는 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 \\ 0.95 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.2 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = I \quad E = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.075 \\ 0.2 & -0.1 \end{bmatrix}$$

아래 도표와 그래프는 외란 감쇄 영역이 감소함에 의해 따라 표시된 것이다.

| r | P | | Ac | |
|-----|---------|---------|---------|---------|
| 100 | 0.6934 | 0.8191 | -0.1968 | -1.2655 |
| | 0.8191 | 1.0867 | 0.5187 | 1.4407 |
| 10 | 0.9338 | 1.1474 | -0.2462 | -1.3011 |
| | 1.1474 | 1.6070 | 0.4613 | 1.3280 |
| 7 | 1.1106 | 1.3921 | -0.2713 | -1.3210 |
| | 1.3921 | 1.9787 | 0.4355 | 1.2783 |
| 1 | 0.1631 | -0.0336 | 0.0497 | 0.0708 |
| | -0.0336 | 0.0521 | 0.1764 | 0.3615 |
| 0.4 | 3.2465 | -1.0722 | 0.0066 | 0.0131 |
| | -1.0722 | 0.3590 | 0.0200 | 0.0397 |

Singular Value of Transfer Function

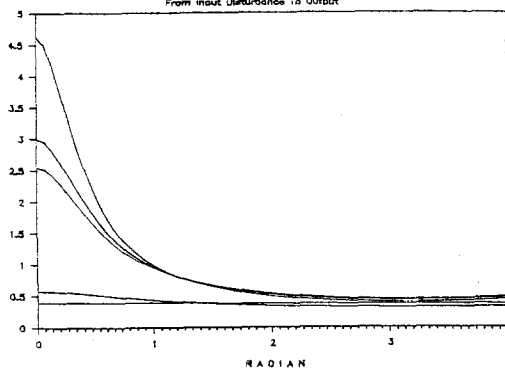


그림. $H(z)$ 의 최대 특이치

(예제끝)

4. 결론

본 논문은 안정 시스템인 경우에, 주어진 출력 가중치 행렬에 대하여 시스템이 안정 영역에 유지될 수 있도록 입력 가중치 행렬을 선택하는 방법을 제시하였다. (2절 가정 3)을 만족시키는 일반적인 시스템에서 t 가 양수인 경우의 식 (5)를 만족시키는 해는 항상 존재하지만, t 가 음수인 경우는 (2절 가정1-4)를 만족시키는 경우에 존재한다. 이때 입력 가중치 행렬은 입력측에서 출력측으로의 전달 함수가 가지는 H^∞ 크기 이상이어야 한다. 한편 출력 가중치 행렬이 단지 대칭 행렬이라도 되며 시스템이 안정 구간에 있도록 하는 대칭 해가 존재하는 조건이 (2절 가정1-4)임을 확대해석 가능하다.

한편 이러한 결과를 H^∞ 에 응용한 내용이 3절에서 다루어졌다. 여기서는 입력측 외란이 출력측에 미치는 영향을 H^∞ 관점에서 최소화시키는 제어기를 구성하는 방법을 제시하였다. 이때 시스템의 입력 개수가 상태변수 개수와 같다는 제한 조건이 있다. 이는 (3절, 정리3)에서 MDARE 식을 유도하는 과정에서 도입된 가정이다. 일반적인 시스템에 대하여 MDARE 식을 이용하여 제어기를 구성할 경우, 외란 감쇄 영역값을 최소한으로 만들어 실제 출력 반응을 살펴 보면 이 감쇄 영역값은 실질적으로 이루어지는 감쇄 영역보다 큼을 확인할 수 있다. 따라서 B 행렬에 대한 제한 조건의 완화를 위한 연구가 요구된다.

참고 문헌

- [1] H.Kwakernaak and R. Sivan, Linear Optimal Control Systems, John Wiley & Sons, Inc., 1972
- [2] B.D.O. Anderson and J.B. Moore, Linear Optimal Control, Prentice Hall, Inc., 1971
- [3] J.C. Doyle and G. Stein, "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-26, Feb. 1981
- [4] G. Stein and M. Athans, The LQG/LTR Procedure for Multivariable Feedback Control Design, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-32, Feb. 1987
- [5] T. Mori, N. Fukuma, and M. Kuwahara, "Eigenvalue bounds for the Discrete Lyapunov Matrix Equation," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-30, Sep. 1985
- [6] T. Mori, N. Fukuma, and M. Kuwahara, "On the Discrete Equation," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-32, Sep. 1987
- [7] H.H. Choi, "A Closed Form Solution of Discrete-Time Riccati Equations," Proc. '89 ISL Winter Workshop, Feb 13-15, 1989
- [8] S.W. Kim, "On the Improvement of the Guaranteed Stability Margins for the Discrete Time LQ Regulator," K.A.C.C. to appear, Oct. 27-28 1989
- [9] R.W. Brockett, Finite Dimensional Linear Systems, New York: Wiley, 1970
- [10] G.Zames, "Feedback and Optimal Sensitivity: Model Referenece Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverse," IEEE Trans. Automatic Control, vol.AC-25, pp. 301-320, APRIL 1981
- [11] G.Zames and B.A.Francis, "Feedback, Minimax Sensitivity, and optimal Robustness," IEEE Trans. Automatic Control, vol.AC-28, pp.585-601, MAY 1983
- [12] B.A.Francis and G.Zames, "On H^∞ Optimal sensitivity, and Optimal Robustness," IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-29, pp. 9-16, JAN. 1984
- [13] B.A.Francis, J.W.Helton and G.Zames, " H^∞ Optimal Feedback Controller for Linear Multivariable Systems , " IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-29, pp. 888-900, OCT. 1984
- [14] K.Glover, " All Optimal Hankel-Norm approximations of Linear multivariable systems and their L error bounds, " INT.J.CONTROL, vol. AC-39, pp. 1115-1193, 1984
- [15] B.A.Francis and J.C.Doyle, " Linear control theory with H optimality criterion," SIAM J. Cont. Optim. , vol. 39, pp. 1115-1193, 1984
- [16] IAN R. Petersen, "Disturbance Attenuation and H^∞ and Optimization : A Design Method Based on the Algebraic Riccati Equation," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-32, MAY 1987
- [17] P.P.Khargonekar, IAN R.Petersen and Mario A. Rotea, " H^∞ Optimal Control with State-Feedback," IEEE Trans. Automatic Cotrol, vol. AC-33, pp. 786-788, 1988
- [18] C.Chang and B.Pearson, " Optimal Disturbance rejection in linear multivariable systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-29, pp. 880-887, 1984
- [19] H.Kimura, " Robust Stabilizability for a Class of Transfer Functions, " IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-29, pp. 788-793, SEP. 1984
- [20] H.Kimura, " Directional Interpolation Approach to H^∞ Optimization and Robust Stabilization, " IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-32, pp. 1085-1093, DEC. 1985
- [21] IAN R. Petersen and C.V.Hollot, " High Gain Observers applied to problems in disturbance attenuation, H^∞ optimization and the stabilization , " A.C.C., pp. 2490-2496, 1988