

# 선형 다변수 시스템의 강인한 최적 안정기의 설계

○ 이재혁\*, 변증남\*

\* : 한국과학기술원 전기및전자공학과  
서울시 동대문구 청량리동 207-43

## ABSTRACT:

In this study, a design method to obtain a robust optimal regulator for linear multivariable system is presented. When assigning eigenvalues of linear multivariable system, the feedback gain is not unique. So we can assign robustness index to optimality so that we can fully use the remained degree of freedom.

## 1. 서론

일반적으로 LQR(Linear Quadratic Regulator)는 좋은 강인성을 가지고 있다고 알려져 있다.[1][2][3] 하지만 모든 LQR 이 강인한 것이 아니며 경우에 따라 작은 시스템 변화에도 불안정해 지는 예[4]가 제시되는 등 모든 LQR이 강인성을 가지고 있는 것은 아님이 밝혀지고 있다.

따라서 지금까지 LQR 문제를 설계할 때 전혀 고려하지 않았던 강인성(Robustness)를 최적 설계 방식에 고려하여야 좀 더 신뢰성있는 안정기를 개발할 수 있을 것이다. 물론 지금까지 최적 안정기 설계에 파라미터 변화에 대한 강인성을 고려한 설계방식이 전혀 없었던 것은 아니다.[5][6][7][8]

하지만 이러한 기존의 방법은 대부분 시스템의 파라미터가 어떤 매개변수의 함수로 표시된다는 가정하에 시스템의 상태변수를 이 매개변수로 미분한 새로운 상태변수를 도입하여 설계하고 있다. 이러한 방법의 단점은 첫째 시스템의 파라미터 { A, B }를 어떤 매개변수의 함수로 표현하여야 하는데 이 가정이 상당히 제약이 되고 있다. 실제 시스템의 파라미터가 소자의 노후등의 이유로 조금씩 변하는 것을 수식으로 표현 한다는 것은 거의 불가능하다고 할 수 있다. 둘째로 만약에 표현이 가능하다고 하여도 비선형 함수로 표현되는 경우 동작점에서 선형화시켜야

하므로 오차가 뒤따른다고 할 수 있다. 따라서 극히 제한된 곳에서만 사용가능한 방법이라고 할 수 있다. 마지막으로 새로운 변수의 도입으로 시스템의 차수가 2배로 증가하여 계산상에 여러가지 어려움이 따른다.

본 논문에서는 선형 다변수 시스템의 강인한 최적 안정기를 설계하는데 있어 고유구조(eigen-structure) 지정 방식에 의한 궤환 이득(feedback gain)을 결정하는 방법을 응용하여 고유치를 지정하고 남은 자유도를 강인한 최적 고유 벡터를 지정하는데 이용하여 최적 안정기에 강인성이 추가된 강인한 최적 안정기의 설계 방법을 제시한다.

## 2. 고유구조 지정에 의한 최적 안정기의 설계

고유구조에 의한 안정기 설계는 선형 다변수 시스템의 궤환이득(feedback gain)을 결정하는 한가지 방법으로 먼저 시스템의 고유치(eigenvalue)를 지정하고 고유벡터(eigenvec-tor)를 지정하여 궤환이득을 결정한다.[9] 이때 고유벡터를 결정하는 방법에 따라 최적 안정기(optimal regulator)인가 강인한 안정기(robust regulator)인가 가 결정된다. 먼저 원하는 시스템의 고유치를 지정하고 나서 설계자가 정한 { Q, R } 값에 대한 목적 함수를 최소화시키는 고유벡터를 지정하는 경우[10]는 강인성을 전혀 고려하지않은 단순한 최적 제어 방법에 의한 최적 안정기가 된다.

일반적인 선형 다변수 시스템의 고유구조 지정 방식에 의한 계산이득 결정 알고리즘은 다음과 같다.

1) 최대 랭크 행렬 (maximal rank matrix)를 계산한다.

$$N_i = \begin{pmatrix} N_{1i} \\ N_{2i} \end{pmatrix}$$

각  $N_i$  는 아래식을 만족한다.

$$(\lambda_i I - A, B)N_i = 0$$

여기서

$$N_i \in C^{(n+m)*m}$$

2) 파라미터 벡터  $P_i$  를 결정한다.

$$P_i = (P_{i1}, \dots, P_{im})^T$$

$$V = V_0 P, \quad W = W_0 P$$

여기서

$$V_0 = (N_{11}, \dots, N_{1n})$$

$$W_0 = (N_{21}, \dots, N_{2n})$$

$$P = \text{diag}(P_i)_{i=1, n}$$

3) 계산 이득을 구한다.

$$F(P) = -W^* V^{-1}$$

### 3. 강인한 최적 안정기

한편 시스템 고유 벡터가 단위직교(ortho-normal)한 경우 시스템 파라미터 변화에 의한 고유치의 변화량이 가장 작다는 수학적 사실에 근거하여[11] 선형 다변수 시스템의 안정기 설계시 고유치를 지정하고 단위직교 고유벡터를 지정하여 강인한 안정기를 설계하는 연구가 많이 발표되고 있다.[12][13][14]

본 논문에서는 고유벡터를 지정하는 한가지 방법으로, 강인성을 지닌 최적 고유벡터를 지정하여 새로운 안정기 설계 방법을 제시한다. 즉 앞의 [10]의 최적 안정기 설계 방법에 [12]의 강인한 안정기 설계 방법을 결합하여, 최적 성능 지수 함수와 강인성 지수 함수를 적절한 비중 상수(weighting factor)로 결합하여, 경우에 따라 최적 안정기, 강인한 안정기, 상인한 최적 안정기등을 설계자가 임의로 선택하여 설계 가능하다.

이 강인한 최적 안정기 설계 문제를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

대상 시스템 :

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = X_0$$

$$x : n*1 \text{ state vector}$$

$$u : m*1 \text{ input vector}$$

$$A, B : \text{constant matrices}$$

(1) 최적 안정기의 설계 방법

원하는 고유치를 지정하고 다음과 같은 성능 지수를 최소화하는 계산 이득  $F$  를 구한다.

$$J_1 = E \left\{ \int_{t=0}^{t=\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \right\}$$

$$Q : \text{symmetric positive semi-definite}$$

$$R : \text{symmetric positive definite}$$

$$X_0 : \text{random variable with } E\{X_0 X_0^T\} = I$$

여기서

$$E : \text{expectation value}$$

(2) 강인한 안정기의 설계 방법

원하는 고유치를 정하고 시스템의 고유벡터를 단위 직교벡터로 지정한다. 따라서 고유벡터를 행(column)으로하여 이루어진 행렬  $V$  는  $V^T V = I$  가 된다. 따라서 최소화 시킬 성능 지수 함수로 다음과 같이 정의할 수 있다.[12]

$$J_2 = \text{tr} \{ (I - V^T V)^2 \}$$

$$V : \text{matrix with column eigen-vector}$$

(3) 강인한 최적 안정기의 설계

(1),(2) 두 방법을 결합한 강인한 최적 안정기의 설계 방법은 다음과 같은  $J$  를 최소화시켜 구한다.

$$J = \alpha * J_1 + \beta * J_2$$

여기서 앞의  $J_1$  은 최적화에 대한 성능 지수 함수이고  $J_2$  는 강인성에 대한 성능 지수 함수이다. 두 성능 지수 함수에 적절한 비중 상수  $\alpha, \beta$  를 곱하여 우리가 원하는 안정기를 설계할 수 있다. 즉  $\alpha \neq 0$  이고  $\beta = 0$  이면 최적 안정기가 되고  $\alpha = 0$  이고  $\beta \neq 0$  이면 강인한 안정기를 얻을 수 있다. 그리고 적절한  $\alpha, \beta$  의 선택으로 강인성을 지닌 최적 안정기를 설계할 수 있다.

### 4. 시뮬레이션 결과

앞의 최적 안정기는 몇가지 과정을 거쳐 다음과 같이 다시 수식화될 수 있다.[10]

$$J_1 = E\{X_0^T Q_1 X_0\}$$

다시 다음과 같이 쓸 수 있다.[10]

$$J_1 = tr\{Q_1\}$$

여기서  $Q_1$ 은 다음 식을 만족한다.

$$(A+BF)^T Q_1 + Q_1(A+BF) + Q + F^T R F = 0$$

따라서 전체 성능 지수함수는 다음과 같다.

$$J = \alpha * tr(Q_1) + \beta * tr((I - V^T V)^2)$$

여기에서 조건은

$$(A+BF)^T Q_1 + Q_1(A+BF) + Q + F^T R F = 0$$

이다.

위 성능 지수 함수를 최소화 시키는 파라미터 벡터

$P$ 를 적당한 gradient 방법으로 구한다.[15]

이때의 제환이득은 앞에서 설명한 바와 같이

$$F = -(W_0 P)(V_0 P)^{-1}$$

이다.

시뮬레이션 대상 시스템은 [10]에서 선택하였다.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

그리고

$$Q = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

한편 시스템 파라미터의 변화에 대한 응답을 보기위해 다음과 같이 임의로 파라미터를 변화시켰다.

$$\bar{A} = A + \alpha * I, \quad (\alpha = 0.5)$$

### (1) 최적 안정기의 경우

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0$$

이때 제환 이득은

$$F = \begin{bmatrix} 0.66 & -1.137 \\ -6.45 & 0.07 \end{bmatrix}$$

폐루프 시스템 행렬의  $K$ (condition number)는

$$K = 25.87$$

### (2) 강인한 최적 안정기의 경우

$$\alpha = 0.001, \quad \beta = 1000$$

이때 제환 이득은

$$F = \begin{bmatrix} 1.12 & -1.5 \\ -8.4 & 2.3 \end{bmatrix}$$

폐루프 시스템 행렬의  $K$ 는

$$K = 12.24$$

### (3) 강인한 안정기의 경우

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1$$

이때 제환 이득은

$$F = \begin{bmatrix} 0.72 & -1.87 \\ -9.8 & 4.856 \end{bmatrix}$$

폐루프 시스템 행렬의  $K$ 는

$$K = 1.94$$

위에서  $K$ 는 행렬의 고유벡터의 단위직교(orthonormal)정도를 나타내며 1에 가까울수록 단위직교 고유벡터이다. (3)의 경우가 가장 강인성을 갖는 안정기이므로  $K$ 가 가장 작다. 여기서 1이 아닌 이유는 수치에러(numerical error)에 의한 것이다.

위의 시뮬레이션에 대한 응답곡선은 그림1 에서 그림10 까지 나타내었다.

그림1, 그림 2 는 3가지 안정기의 응답으로 각각 강인한 최적 안정기의 응답이 중간의 응답을 보임을 알 수 있다.

그림 3, 그림 4, 그림 5 는  $\alpha = 0.5$ 일때 바뀐 파라미터에 대한 3가지 안정기의 응답으로, 최적 안정기는 파라미터 변화에 응답의 변화가 크고, 강인한 안정기는 변화가 매우 작음을 볼 수 있다. 강인성이 추가된 최적 안정기는 중간의 응답을 보이고 있다. 그림 6, 그림 7, 그림 8 는  $x_2$  의 응답으로 마찬가지로 결과를 나타내고 있다.

물론 강인성만 고려한 안정기의 응답이 좀더 변화가 적지만 항상 이러한 안정기를 사용할 수 없는 이유는 그림 9, 그림 10 에서 보듯이 강인한 안정기는 시스템의 제어 입력의 크기가 지나치게 커서 실제로 적용할 수 없는 경우가 생기고 또 필요 이상의 에너지를 낭비 할 수 있다.

지금까지의 시뮬레이션 결과로 시스템에 따라 적절한  $\alpha, \beta$ 의 선정으로 강인한 최적 안정기를 구할 수 있음을 확인하였다.

## 5. 결론 및 추후 연구 과제

본 논문에서는 선형 다변수 시스템의 강인한 최적 안정기를 고유구조 지정 방식으로 설계하는 방법을 제시하였다. 또 간단한 시뮬레이션을 통하여 실제 시스템에 적용 가능함을 보였다.

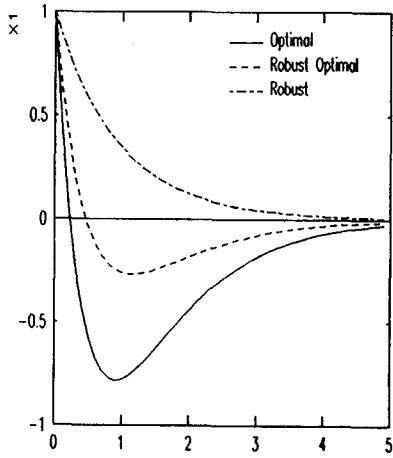


그림 1 3가지 안정기의 응답 ( $x_1$ )  
Fig 1 Responses of 3 regulator ( $x_1$ )

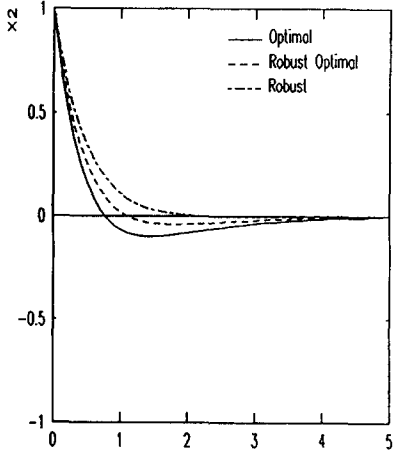


그림 2 3가지 안정기의 응답 ( $x_2$ )  
Fig 2 Responses of 3 regulator ( $x_2$ )

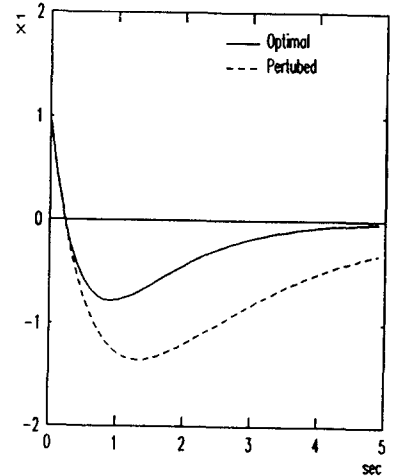


그림 3 최적 안정기의 응답 변화 ( $x_1$ )  
Fig 3 Response variation of optimal regulator ( $x_1$ )

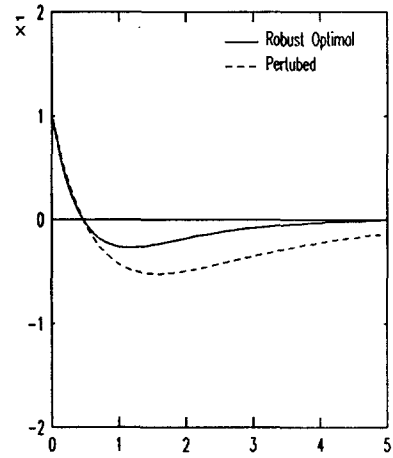


그림 4 강인한 최적 안정기의 응답 변화 ( $x_1$ )  
Fig 4 Response variation of robust optimal regulator ( $x_1$ )

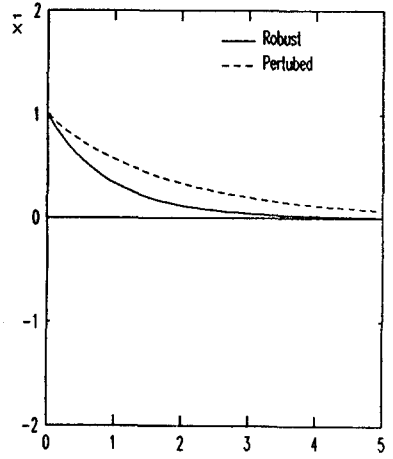


그림 5 강인한 안정기의 응답 변화 ( $x_2$ )  
Fig 5 Response variation of robust regulator ( $x_2$ )

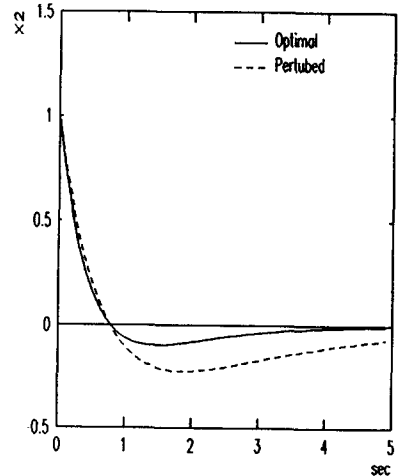


그림 6 최적 안정기의 응답 변화 ( $x_2$ )  
Fig 6 Response variation of optimal regulator ( $x_2$ )

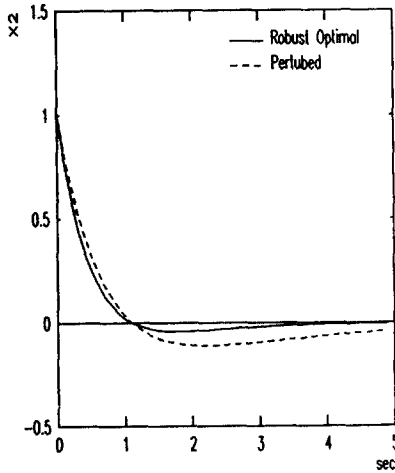


그림 7 강인한 최적 안정기의 응답 변화 ( $x_2$ )  
Fig 7 Response variation of robust optimal regulator ( $x_2$ )

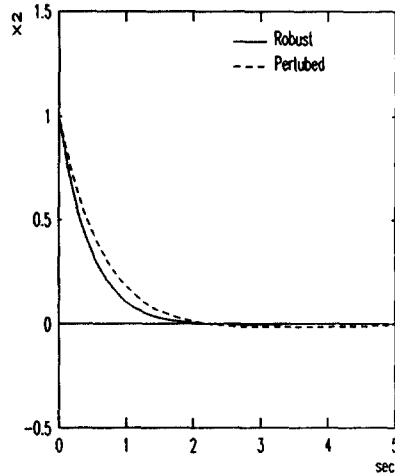


그림 8 강인한 안정기의 응답 변화 ( $x_2$ )  
Fig 8 Response variation of robust regulator ( $x_2$ )

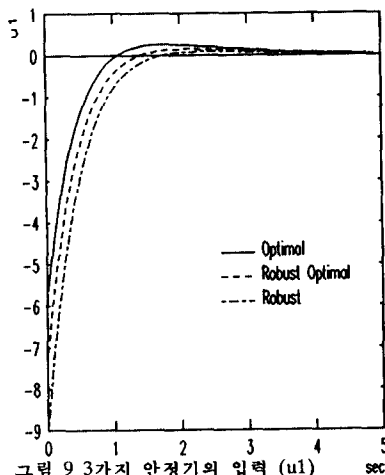


그림 9 3가지 안정기의 입력 ( $u_1$ )  
Fig 9 Inputs of 3 regulator ( $u_1$ )

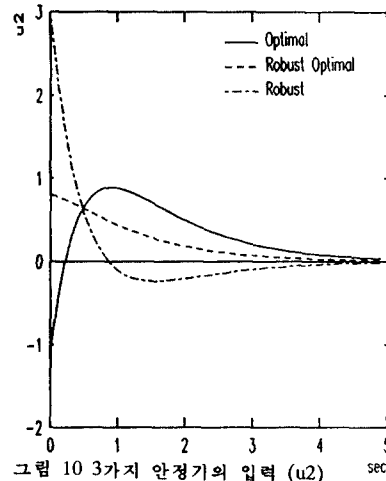


그림 10 3가지 안정기의 입력 ( $u_2$ )  
Fig 10 Inputs of 3 regulator ( $u_2$ )

본 방법은 기존의 방법과 달리 시스템의 파라미터가 어떤 매개 변수의 함수로 표현되지 않아도 되는 장점이 있으며 적절한 비중 상수를 조절하여 원하는 최적 안정기로부터 강인한 안정기까지의 모든 응답 곡선을 얻어낼 수 있으므로 설계자가 쉽게 원하는 안정기를 구현할 수 있다. 또 선형 다변수 시스템의 안정기 설계시 제한 이득을 구할 때 고유치를 지정하고 남은 자유도를 최적화와 강인화에 사용함으로써 우리가 이용할 수 있는 자유도를 최대한 이용할 수 있는 특징이 있다.

앞으로 본 논문에서 제시한 상태 피환(state feedback) 방식에서 좀 더 일반적으로 사용할 수 있는 출력 피환(output feedback) 방식으로 개념을 확장하는 일을 계속 연구할 필요가 있다.

#### 참고 문헌

- [1] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, Linear Optimal Control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971.
- [2] M. G. Safonov and M. Athans, "Gain and phase margin for multiloop LQG Regulators", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-22, pp.173-179, Apr. 1977.
- [3] N. A. Lehtomaki, N. R. Sandell, Sr., and M. Athans, "Robust Results in linear quadratic Gaussian based multivariable control designs." IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-26, pp.75-93, Feb. 1981.

- [4] E. Soroka and U. Shaked, "On The Robustness of LQ regulators," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-29, pp.664-665, Jul. 1984.
- [5] P. C. Byrne and M. Burke, "Optimization with Trajectory Sensivity Considerations," IEEE Trans. Automat. Contr., pp.282-283, Apr. 1976.
- [6] S. J. Kahne, "Low sensitivity design of optimal linear control systems," IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. AES-4, pp.374-379, May. 1968.
- [7] M. Gopal and P. Pratapachandran Nair, "Sensitivity Reduced Optimal Linear Regulator with Prescribed Closed-Loop Eigenvalues," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-29, pp.661-664, Jul. 1984.
- [8] P. J. Fleming, "Desensitizing Constant Gain Feedback Linear Regulators," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-23, pp.933-936, Oct. 1978.
- [9] William L. Brogan, "Modern Control Theory", Prentice-Hall, 1985
- [10] B. H. Kwon, "Design of Regulators by Eigenstructure Assignment for Linear Multivariable Systems", Phd. Dissertation, KAIST, Korea, 1987.
- [11] Kendalle E. Atkinson, "An Introduction to Numerical Analysis", John Wiley and Sons, 1978
- [12] R. K. Cavin III and S. P. Bhattachryya, "Robust and Well-Conditioned Eigenstructure Assignment via Sylvester's Equation", Optimal Control Appl. and Methods, Vol.4, 205-212, 1983
- [13] Srinathkamar. et.al,"Robust Eignevalue/Eigenvector Selection in Linear State Feedback Systems", CDC, 1988
- [14] L. H. Keel et.al,"Compensator Design for Robust Eigenstructure Assignment via Sylvester's Equation", ACC, 1985
- [15] J. L. Kuester and J. H. Mize, Optimization Techniques with Fortran, New York: McGraw-Hill, 1964