

정상상태 추적편차를 고려한 가중행렬의 선택
 (A method for deciding weighting matrices by considering
 a steady-state deviation in a LQ tracking problem)

*이진익, 전기준
 (J. I. Lee, G. J. Jeon)

경북대학교 공과대학 전자공학과
 (Kyung Pook National Univ., Dept. of Elec. Eng.)

Abstract

Quadratic weighting matrices have an effect on the transition and steady - state responses in a LQ tracking problem. They are usually decided on trial and error in order to get a good response. In this paper a method is presented which calculates a steady - state deviation without solving Riccati equation. By using this method, a new procedure for selecting the weighting matrices is proposed when a tolerance on the steady - state deviation is given.

1. 서론

시스템의 출력 또는 상태벡터가 주어진 목표치를 추적하도록 궤환이득 및 보상벡터를 구하는 최적추적 제어이론은 페루프 시스템이 가지는 구조적 장점이 있으나, 과도응답 및 정상상태 추적편차에 영향을 미치는 가중행렬 Q 및 R의 선택이 문제점으로 대두되어 왔다.

이러한 가중행렬의 선택방법을 처음으로 제안한 Kalman[1]은 R을 스칼라로 축소한 단일력의 경우에 대해서 연구하였으며, 그 후 Anderson[2]등이 연속시간 시스템의 다입력인 경우에 대해서 발표하였다. Yokoyama와 Kinnen[3]은 가제어(controllable)와 불가제어(uncontrollable) 시스템에서 가중행렬의 선택에 대한 필요충분조건을 제안하였으며 Fujii[4]는 Riccati 방정식을 풀지않고 극배치방법을 이용하여 가중행렬을 선택하여 궤환이득을 구하였다. 또한 Broussard[5]와 Medanic[6]등은 페루프의 고유치와 Riccati 방정식의 해와의 관계로부터 가중행렬을 선택하는 방법을 제안하였으며, Kawasaki[7]등도 이산시간 시스템에 대해서 연구하였으나 이들 대부분은 페루프 시스템의 고유치와 관련된 과도응답특성과 가중행렬과의 관계에 관한 연구들이다.

본 논문에서는 선형 시불변 연속시간 시스템에서 추적목표치가 상수벡터일 때 가중행렬이 정상상태에 미치는 영향을 고려하여 정상상태 추적편차를 구하였으며, 이를 이용하여 정상상태 허용편차가 주어졌을 경우 시스템의 가중행렬을 구하는 알고리즘을 제안하였다.

본 논문의 구성은 2장에서는 정상상태에서 최적추적기를 해석하였으며 3장에서는 가중행렬 선택방법을 제안하고, 제안한 알고리즘의 타당성을 확인하기 위하여 간단한 예제에 대한 컴퓨터 모사 및 분석을 하였으며 마지막 4장에서는 결론을 서술하였다.

2. 정상상태에서의 최적추적기 해석

선형 시불변 시스템이

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (1)$$

와 같을 때 추적기의 성능지수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ \|x(t) - x^d\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2 \} dt \quad (2)$$

여기서 $\|y\|_W^2 = y^T W y$ 이고 첨자 T는 전치행렬을 의미한다. 그리고 $x(t)$ 는 n차원 상태벡터, $u(t)$ 는 m차원 입력벡터, x^d 는 n차원 추적목표치이고 A는 n x n차원, B는 n x m차원 상수 계수행렬이다. Q는 n x n차원 반양한정(psd:positive-semi definite), R은 양한정(pd:positive definite) 대칭행렬로 각각 상태 및 입력벡터의 가중행렬이다. 또한 (A,B)는 가제어이다.

식 (1)을 만족하면서 제어목적인 식 (2)의 성능지수 J를 최소화하는 최적추적기의 제어입력 $u(t)$ 를 구하기 위해 Hamiltonian을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} H(x(t), u(t), p(t)) &= \frac{1}{2} \{ \|x(t) - x^d\|_Q^2 \\ &+ \|u(t)\|_R^2 \} + p^T(t) [A x(t) + B u(t)] \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $p(t)$ 는 부상태벡터(co-state vector)이며 최적해를 구하기 위한 필요조건은 다음과 같다.

$$\textcircled{1} \frac{\partial H}{\partial u(t)} = 0 \quad (4)$$

$$\textcircled{2} \frac{\partial H}{\partial x(t)} = -\dot{p}(t) \quad (5)$$

$$\textcircled{3} \frac{\partial H}{\partial p(t)} = \dot{x}(t) \quad (6)$$

식 (4)로부터 최적 제어입력을 구하면

$$u(t) = -R^{-1}B^T p(t) \quad (7)$$

이며, 식 (5)로부터 부상태벡터 방정식의 해의 형태를

$$p(t) = K(t) x(t) + s(t) \quad (8)$$

로 놓으면 다음과 같은 Riccati 방정식을 얻는다.

$$\dot{K}(t) = -A^T K(t) - K(t)A + K(t)BR^{-1}B^T K(t) - Q \quad (9)$$

$$\dot{s}(t) = -[A^T - K(t)BR^{-1}B^T] s(t) - Q x^d \quad (10)$$

여기서 경계조건은 $K(t_f) = 0, s(t_f) = 0$ 이다.

추적목표치가 상수벡터일 때 상수궤환이득 및 보상벡터를 구하기 위해 식 (9) 및 식 (10)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$0 = A^T K + KA - KBR^{-1}B^T K + Q \quad (11)$$

$$s = [A^T - KBR^{-1}B^T] Q x^d \quad (12)$$

식 (7) 및 식 (8)로부터 페루프의 제어입력은

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}B^T K x(t) - R^{-1}B^T s \\ &\equiv G x(t) + d \end{aligned} \quad (13)$$

와 같다.

(A, B)가 가제어이고 추적목표치가 상수벡터일 때 $t \rightarrow \infty$ 인 정상상태에서 식 (1)과 식 (13)으로부터 시스템의 페루프를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A + BG] x(t) + B d \\ &\equiv F x(t) + h \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 라플라스변환을 이용하여 첫 식의 해를 구하면

$$x(t) = e^{-Ft} x_0 + F h - F e^{-F(t-t_0)} h \quad (15)$$

이므로 정상상태에서의 상태벡터는

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= [A + BG]^{-1} B d \\ &\equiv x_0 \end{aligned} \quad (16)$$

로 상수벡터가 되며 식 (13)으로부터

$$u_0 = G x_0 + d \quad (17)$$

로 역시 상수벡터가 된다. 여기서 첨자 s는 정상상태를 의미한다. 따라서 정상상태에서 식 (1)은 다음과 같다.

$$A x_0 + B u_0 = 0 \quad (18)$$

그리고 추적편차 V를 추적목표치와 정상상태의 상태벡터와의 합으로 정의하면, 즉

$$V \equiv x^d - x_0 \quad (19)$$

추적편차 V는 다음 [정리 1]과 [정리 2]를 이용하여 구할 수 있다.

[정리 1] (A, B)가 가제어이고 $\text{rank}(B) = n$ 이면 상수 추적목표치를 갖는 최적추적기의 정상상태 추적편차 V는 다음과 같다.

$$V = \{I - [A^T(BR^{-1}B^T)^{-1}A + Q]^{-1}Q\} x^d \quad (20)$$

(증명) 식 (13) 및 식 (18)로부터 상태벡터는

$$x_0 = [A - BR^{-1}B^T K]^{-1} BR^{-1}B^T s \quad (21)$$

이며 식 (12)를 대입하면

$$x_0 = [A^T(BR^{-1}B^T)A - A^T K - KA + KBR^{-1}B^T K]^{-1} Q x^d \quad (22)$$

이고 식 (11)을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$x_0 = [A^T(BR^{-1}B^T)^{-1}A + Q]^{-1} Q x^d \quad (23)$$

여기서 식 (19)를 이용하여 정상상태 추적편차 V를 구하면

$$V = \{I - [A^T(BR^{-1}B^T)^{-1}A + Q]^{-1}Q\} x^d \quad (24)$$

가 됨을 알 수 있다. 여기서 I는 단위행렬을 의미한다.

[정리 2] (A, B)가 가제어이고 $\text{rank}(A) = n$ 이면 상수 추적목표치를 갖는 최적추적기의 정상상태 추적편차 V는 다음과 같다.

$$V = [I + A^{-1}BR^{-1}B^T A^{-T}Q]^{-1} x^d \quad (25)$$

(증명) 식 (13)과 식 (18)로부터 정상상태에서

$$\begin{aligned} A x_0 + B u_0 &= [A - BR^{-1}B^T K] x_0 - BR^{-1}B^T s \\ &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

을 얻을 수 있으며 식 (5)로부터

$$\begin{aligned} -\dot{p} &= Q[x_0 - x^d] + A^T p \\ &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

와 같이 된다. 식 (8) 및 식 (26)을 대입하여 정리하면

$$[A - BR^{-1}B^T K] x_0 + BR^{-1}B^T \{[K + A^{-T}Q] x_0 - A^{-T}Q x^d\} = 0 \quad (28)$$

이며 식 (19)를 이용하여 정상상태 추적편차 V를 구하면 다음과 같다.

$$V = [I + A^{-1}BR^{-1}B^T A^{-T}Q]^{-1}x^d$$

$$\equiv V_1^{-1}x^d \quad (29)$$

여기서 V_1 은 양한정(pd) 행렬이므로 유일한 정상상태 편차를 구할 수 있다.

3. 가중행렬의 선택

상수 추적벡터를 갖는 추적기의 정상상태 허용편차 V 가 주어지고 Q 또는 R 중 하나가 주어진 시스템에서 나머지 가중행렬은 [정리 1] 또는 [정리 2]를 이용하여 구할 수 있다. 먼저 $\text{rank}(B)=n$ 인 경우는 [정리 1]의 식 (20)을 이용하여 쉽게 구할 수 있으며, $\text{rank}(A)=n$ 인 경우는 다음과 같이 구할 수 있다. 이때 V 는 식 (18)에서 u_0 가 존재하도록 주어져야 한다. 즉 정상상태의 상태방정식을 만족하는 식 (18)로부터

$$-A^{-1}Bu_0 = x_0 \quad (30)$$

을 만족하는 u_0 가 존재하기 위해서

- i) $\text{rank}(A^{-1}B) = n$ 이거나
- ii) x_0 가 $A^{-1}B$ 의 column space에 포함되어야 한다. [8]

여기서 [정리 2]를 이용하여 R 이 고정된 시스템에서 Q 를 선택하는 방법은 다음과 같다. 가중행렬 Q 가 대각행렬이라고 가정하면

$$Q = \text{diag.} [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n] \quad (31)$$

이 되며 식 (25)로부터

$$A^{-1}BR^{-1}B^T A^{-T}QV = x_0 \quad (32)$$

을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \#11 & \#12 & \dots & \#1n \\ \#12 & \#22 & \dots & \#2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \#1n & \#2n & \dots & \#nn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & & & \circ \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ \circ & & & Q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \#1 \\ \#2 \\ \vdots \\ \#n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \#11 & \#12 & \dots & \#1n \\ \#12 & \#22 & \dots & \#2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \#1n & \#2n & \dots & \#nn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \#1 \\ \#2 \\ \vdots \\ \#n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{01} \\ \alpha_{02} \\ \vdots \\ \alpha_{0n} \end{pmatrix} \quad (33)$$

여기서

$$[\#ij]_{n \times n} = A^{-1}BR^{-1}B^T A^{-T} \quad (34)$$

이며

$$W \equiv [\#ij]_{n \times n} \quad (35)$$

$$\tilde{V} \equiv \text{diag.} [\#1 \ #2 \ \dots \ \#n] \quad (36)$$

$$\tilde{Q} \equiv [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_n] \quad (37)$$

로 정의하면 식 (33)은 다음과 같다

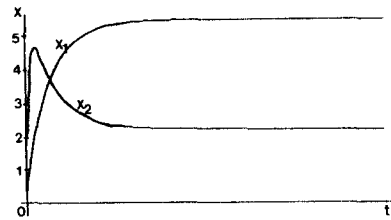
$$W \tilde{V} \tilde{Q} = x_0 \quad (38)$$

여기서 W 는 식 (34)에서 $A^{-1}B$ 의 선형 조합으로 이루어지므로 x_0 가 조건 i) 또는 ii)를 만족하면 식 (38)을 만족하는 해는 반드시 존재한다. 따라서 가우스 제거법등의 수치해석 방법으로 해를 구할 수 있다.

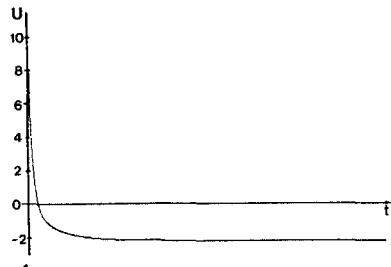
위의 알고리즘의 타당성을 확인하기 위하여 다음의 간단한 예제, 즉

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, R=1, Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, x^d = \begin{pmatrix} 6 \\ 1.5 \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

을 컴퓨터로 모사한 결과, 상태벡터와 입력벡터의 궤적은 그림 1과 같으며 $x_0 = [5.5369 \ 2.2148]^T$, $u_0 = [-2.2148]$ 및 추적편차 $V = [0.4631 \ -0.7148]^T$ 로써 식 (25)로부터 계산한 추적편차와 일치함을 알 수 있다.



(a) 상태벡터 궤적



(b) 입력벡터 궤적

그림 1. 예제에 대한 컴퓨터 모사 결과

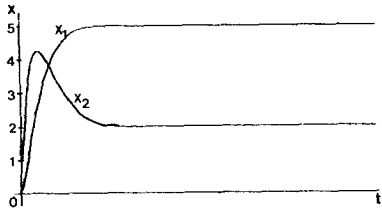
다음으로 허용 추적편차가 $V = [1 \ -1.5]^T$ 로 주어졌다고 가정하면, 이 때 가중행렬 Q 를 선택하기 위해 위 예제를 식 (25)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$5q_1 - q_2 = 4 \quad (39)$$

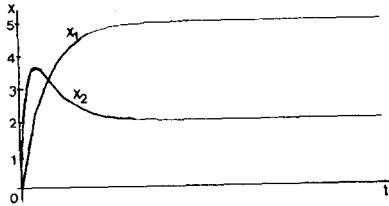
첫 식은 조건 ii)를 만족하므로 부정해(否定解)를 가지며 이 식을 만족하는 반양한정 행렬 Q 를 적절히 선택하여 컴퓨터로 모사한 결과는 다음 표 1 및 그림 2와 같다.

표1. 가중행렬에 따른 컴퓨터 모사 결과

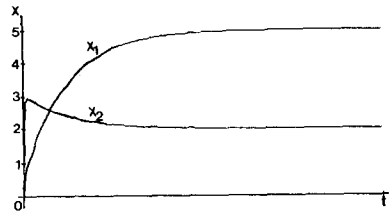
\tilde{q}^T	x_0^T	v^T	폐루프 고유치	그림
[0.8 0]	[5 2]	[1 -0.5]	-1.9747 $\pm j .9998$	2 - a
[1 1]	[5 2]	[1 -0.5]	-4.5145 -1.2724	2 - b
[20.8 100]	[5 2]	[1 -0.5]	-40.3142 -0.75401	2 - c



(a)



(b)



(c)

그림 2. 가중행렬에 따른 상태벡터 궤적

컴퓨터 모사 결과 그림 2의 (a), (b) 및 (c)는 서로 다른 가중행렬의 상태벡터 궤적으로써 각각 과도응답 및 폐루프의 고유치는 다르나 정상상태 추적편차는 동일함을 알 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 선형 시불변 연속시간 시스템에서 상태방정식이나 Riccati 방정식의 해를 구하지 않고 정상상태에서의 상태 추적편차를 구하였으며, 과도응답 및 추적편차에 영향을 미치는 가중행렬의 선택방법을 제안하였다. 즉 최적추적기에서 대부분 시행착오적으로 선택하여 왔던 가중행렬을 주어진 허용 추적편차를 이용하여 선택하는 방법을 제안하였다. 그리고 제안한 방법은 동일한 추적편차에 대해서 여러개의 가중

행렬이 존재할 수 있으므로 폐루프 시스템의 과도응답이나 고유치 등 다른 특성에 부합하는 가중행렬 선택의 자유도를 가질 수 있으며 과도응답 보다 정상상태의 추적편차가 중요한 시스템의 최적추적제어에 유용하게 적용될 수 있을 것으로 기대된다.

참고 문헌

- [1] R. E. Kalman, "When is a linear control system optimal?", J. Basic Eng., Vol. 86, pp. 51-60, Mar. 1964
- [2] P. J. Moylan and B. D. O. Anderson, "Nonlinear regulator theory and an inverse optimal control problem", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-18, pp. 460-465, Oct. 1973
- [3] R. Yokoyama and E. Kinnen, "The inverse problem of the optimal regulator", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-17, pp. 497-504, Aug. 1972
- [4] T. Fujii, "A new approach to the LQ design for the viewpoint of the inverse regulator problem", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-32, Nov. 1987
- [5] J. R. Broussard, "A Quadratic weight selection algorithm", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-27, Aug. 1982
- [6] J. Medanic, H. S. Tharpan and W. R. Perkins, "Selection of the weighting matrices and degree of relative stability to position the spectrum of the optimal regulator", IEEE Proc. Conf. Decision Contr., Greek, Dec. 1986
- [7] J. W. Shin, E. Shimemura and N. Kawasaki, "A method for deciding weighting matrices in a linear discrete time optimal regulator problems to locate all poles in the specified region", Proc. Korea Automat. Contr. Conf., Korea, 1988
- [8] W. L. Brogan, "Modern control theory", Quantum, 1974