

순환 서비스 시스템에서의 근사화된 체류시간 분포와 토큰 패싱 네트워크에의 응용

(Approximate sojourn time distribution for cyclic service systems and its applications to token passing networks)

권 옥현 o 정 법 진 박 홍 성
(W.H. Kwon B.J. Chung H.S. Park)

서울대학교 자동화 시스템 공동 연구소, 제어계측공학과

In this paper, an approximate sojourn time distribution is obtained for cyclic service systems. We consider symmetric and limited service systems in which each queue has an infinite capacity. The combined service time is defined which consists of the frame service time and server waiting time that is approximated by two cases of the uniform and exponential distributions. The approximate sojourn time distribution is obtained from the Pollaczek-Khinchine formula where the combined service time is used for the service time in the M/G/1 model. And some numerical examples are given to validate the suggested approximate analysis.

1. 서 론

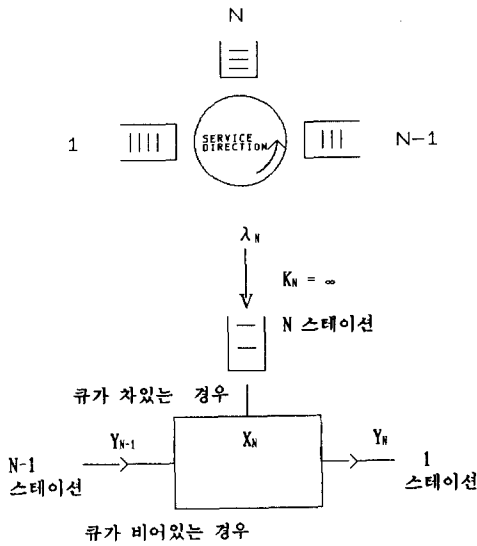
순환 서비스 시스템은 하나의 서버(server)에 의해서 두개 이상의 큐들이 미리 정해진 순서에 의해서 순환 방식으로 서비스를 받는 시스템을 일컫는 것으로, 컴퓨터와 통신 분야, 특히 토큰 패싱 네트워크(token passing network)의 성능 해석을 위한 해석적인 모델로 주로 쓰이고 있다[1]. 순환 서비스 시스템은 큐의 용량에 따라서 무한 용량 큐(infinity capacity queue)와 한정 용량 큐(finite capacity queue)시스템으로 분류할 수 있으며, 무한 용량의 큐를 갖는 경우에는 큐의 제한으로 인한 프레임(frame)의 막힘(blocking)문제나 손실되는 경우가 없으므로 해석이 용이한 장점이 있다. 한정 용량 큐 시스템의 특별한 경우로 단일 용량 큐(single capacity queue)시스템이 성능해석에 사용되고 있다. 서버의 서비스방식에 따라서는 크게 고갈 서비스(exhausted service) 방식과 비고갈 서비스(nonexhausted service) 방식으로 분류되는데 비고갈 서비스방식은 다시 게이트 서비스(gated service)방식과 제한서비스(limited service)방식으로 나뉘어진다. 고갈 서비스방식은 서버에 의해서 큐에 대기중이던 모든 프레임(packet)을 서비스하는 것을 의미하는데 이때 서비스 도중에 도착한 프레임에 대해서도 서비스가 된다. 반면 게이트 서비스 방식은 고갈 서비스 방식과 같으나, 기존의 프레임을 서비스하는 도중에 도착한 프레임에 대해서는 서비스가 이루어지지 않는다는 차이점이 있다. 제한 서비스 방식은 한번의 서비스동안 제한된 수(최대 k개) 이하의 프레임만이 서비스될 수 있는데, 토큰 패싱 버스 네트워크의 표준안으로 널리 알려진 IEEE 802.4 표준안[2]에 따르면 한 스테이션에서 토큰(token)을 받았을 때 자신의 큐에 있던 프레임을 서비스하는 시간의 상한선이 제한되어 있다. 따라서 이를 고려한다면 앞의 두 서비스 방식보다는 제한 서비스 방식의 모델을 통한 성능 해석을 하는 것이 더 적절하므로, 본 논문에서는 무한 용량 큐와 제한 서비스(k=1)방식의 대칭(symetric) 시스템을 모델로 하였다. 순환 서비스 시스템에 대한 연구로는 Leibowitz[3]이 스테이션 전환시간(station switchover time)이 상수인 게이트 서비스 방식의 대칭 시스템에 대해서 근사적인 해를 제시하였으며, 고갈/게이트 서비스 방식의 시스템의 대기 시간 분포에 대해서는 Eisenberg[4]와 Aminetzah[5]의 연구 결과가 있다. 본 논문에서 사용된 모델에 대한 연구로는 [6]가 있는데 여기서는 대칭 시스템에서 프레임의 평균 대기 시간만을 구하였고 비대칭 시스템에서의 근사적인 평균 대기 시간에 대한 연구로는 [7]가 있다. 순환 서비스 시스템의 해석은 다른 스테이션과의 연관성(correlation) 때문에 해석이 어려워지는데 지금까지 평균의 개념에서의 연구는 상당히 진행되어왔으나 실제 시스템의 성능 해석을 함에

있어서 구하고자 하는 성능 지표(performance index)의 분산이 큰 경우에는 평균의 정보만으로는 그 시스템을 정확하게 알 수가 없다. 이러한 이유에서 불대 평균만을 구하는 것보다는 근사적인 식이라 하더라도 그 확률 분포를 구하는 것이 시스템을 파악함에 있어서 더 중요하다 할 수 있다.

어느 한 스테이션에 도착한 프레임은 서버에 의한 자신의 서비스가 시작될 때까지 큐에서 대기하여야 하는데 체류시간이란 이러한 큐에서의 대기시간과 해당 프레임이 서버에 의해서 서비스될 때 소요되는 서비스시간과의 합으로 나타내어진다. 프레임의 체류시간에 영향을 미치는 인자중에서 순환 서비스 시스템에서만 나타날 수 있는 것은 순환 시간(cycle time)이 있는데 이는 어느 한 큐가 서버에 의해서 서비스를 받기 시작한 시간부터 다시 서버가 그 큐에 할당될 때까지의 시간으로서 토큰 패싱 네트워크의 경우에는 토큰 회전 시간(token rotation time)에 해당된다. 순환 시간은 프레임의 도착간 시간 간격(interarrival time)과 도착한 프레임에 대한 서비스시간 및 스테이션 전환 시간으로서 표시되어 질 수 있는데 이들이 확률 변수(random variable)이므로 순환 시간도 확률 변수가 된다. 순환 서비스 시스템에서 이 순환 시간의 분포를 구하기 위해서 사용되는 가정으로 스테이션 독립성(station independence)을 들 수 있는데 이는 어느 한 스테이션에서 프레임의 존재 확률은 다른 스테이션과는 서로 상호독립(mutual independence)이라는 가정이다. 이 가정은 Hashida와 Ohara[10]에 의해서 처음 사용된 이래 순환 서비스 시스템의 해석에 있어서 자주 인용되고 있는 가정이다. 본 논문의 차례는 2장에서는 체류시간의 분포를 구하기 위해서 사용된 큐잉 모델을 제시하고 3장에서는 토큰 패싱 네트워크 시스템을 대상으로하여 순환 서비스 시스템의 임의의 한 스테이션에서의 서비스 과정을 일반적인 큐잉 모델인 M/G/1으로 근사시키는 과정을 유도하고 체류시간에 대한 LST(Laplace-Steiltjt Transform)을 제시하며, 4장에서는 3장에서 구한 체류시간 LST의 근사화된 형태를 구하여 이의 예를 소개하고, 제한 서비스방식(k=1)에서 [11]의 평균 체류시간 식과 본 논문에서의 구한 식과를 비교하며 또한 이를 시뮬레이션의 결과와도 비교한다. 마지막으로, 5장에서는 앞으로의 확장 및 문제점을 지적한다.

2. 순환 서비스 시스템의 큐잉 모델

순환 서비스 시스템은 하나씩의 큐를 갖는 N개의 스테이션이 논리적인 링의 형태로 이루어지는 큐잉 모델로 표현될 수 있다. 순환 서비스 시스템에 대한 큐잉 모델은 그림 1.과 같다.



1. 순환 서비스 시스템의 큐잉 모델

그림1.의 아래 그림은 스테이션에 서버를 상징하는 토큰(token)의 도착시 이의 처리과정 및 스테이션간의 연결 상태를 나타낸 것이다. 그림에서 사용되는 기호와 확률 변수(r.v)들은 다음과 같다.

- K_j 스테이션 j에서의 큐의 용량 ($j \in S, S = \{1, 2, \dots, N\}$)
- λ_j 스테이션 j에서의 평균 도착률
- μ_j 스테이션 j에서의 하나의 프레임의 평균 서비스율
- Y_i 스테이션 j-1에서 스테이션 j로 서버를 전환하는데 소요되는 시간을 나타내는 r.v ($W_i(Y_i) = Y_i$ 의 c.d.f)
- X_i 스테이션 j에서 하나의 프레임의 서비스를 하는데 소요되는 시간을 나타내는 r.v ($B_j(X_j) = X_j$ 의 c.d.f)

3. 체류 시간 분포

3장에서 2장에서의 모델을 기초로 하여 순환 서비스 시스템에서의 체류 시간 분포의 LST식을 구하기 위하여 임의의 스테이션 j에서 큐의 크기가 무한 용량 큐($K = \infty$)이며 프레임의 도착간 분포와 그의 서비스 분포는 평균이 각각 λ_j, μ_j 인 지수 분포(exponential distribution)로 가정한다. 또한 대칭 시스템이므로 모든 스테이션에서 λ_j, μ_j 는 같은 값을 갖는다.

3.1 결합 서비스 시간 분포($t, r.v$)

순환 서비스 시스템은 일반적인 큐잉 모델과는 프레임의 서비스 방식에서 다음과 같은 차이가 있다. 큐잉 모델의 경우에는 서버가 서비스를 끝내고 큐가 비어있지 않은 경우에 바로 다음의 프레임을 서비스하는데 반해서, 순환 시스템의 경우에는 서버가 하나의 프레임에 대해서 서비스를 끝낸 후에는 다음의 큐로 넘어가게 된다. 따라서 큐에 있는 다음 차례의 프레임이 서비스를 받기 위해서는 서버가 시스템을 한번 순환하고 다시 자신의 큐에 올 때까지 기다려야 한다. 본 논문에서는 서버에 의한 프레임의 서비스 시간과 서버가 자신의 큐에 오기를 기다리는 시간의 합을

새로운 서비스 시간인 결합 서비스 시간(b_i)으로 정의한다. 대칭 시스템의 경우 어느 특정한 스테이션에 관계없이 모든 스테이션에서의 확률 분포가 일정한 형태를 갖으므로 $b_i = b$ 로 쓸 수 있다. 따라서 결합 서비스 시간 분포 $f_b(b)$ 는 식(1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_b(b) = p \cdot f_{w_1}(b) + q \cdot f_{w_2}(b) \quad (1)$$

여기서 $q =$ 프레임이 도착했을 때 해당 큐가 비어있지 않음 확률로 [9]에 의하면 $q = \lambda E[c]$ 로 주어지며 평균 순환 시간은 다음 식(2)와 같다.

$$E[c] = \frac{Mt}{1 - \sum_{k=1}^N \lambda_i / \mu_i} \quad (2)$$

$$p = 1 - q$$

$f_{w_1}(\cdot) =$ 서버를 기다리는 시간(w_1) + 프레임의 서비스 시간(s)
(프레임이 도착시 큐가 비어있는 경우)

$f_{w_2}(\cdot) =$ 서버를 기다리는 시간(w_2) + 프레임의 서비스 시간(s)
(프레임이 도착시 큐가 비어있지 않은 경우)

위 식에서 볼 수 있듯이 $f_b(b)$ 를 구하기 위해서는 서버를 기다리는 시간에 대한 분포를 구하여야 하는데 스테이션 j의 큐가 비어있는 상태에서 i번째 프레임이 도착한 임의의 고정된 시각을 $t_{(i)}$ 라 하면 w_1 은 다음과 같다.

$$w_1 = c_{k(i)} - t_{(i)}, (c_{k(i-1)} \leq t_{(i)} < c_{k(i)}) \quad (3)$$

여기서 $c_{k(i)} =$ 스테이션 j에서 k번째 서버의 도착시각(r.v)

($c_{k(i)}$ 는 스테이션에 관계없이 i.i.d이므로 $c_{k(i)} = c_k$.)

$t_{(i)}$ 를 확률 변수인 $c_{k(i)}$ 의 임의의 값이라고 하면 $f_{w_1}(x)$ 는 식(4)과 같이 표현될 수 있다[10].

$$f_{w_1}(x) = \frac{1 - Fc(x)}{c} \quad (4)$$

여기서 $Fc(x) =$ 순환 시간 분포
 $c = E[c]$

식 (4)으로부터 w_1 의 확률 밀도 함수의 LST, $f_{w_1}(s)$ 를 구하면 식(5)와 같다.

$$f_{w_1}(s) = f_{w_1}(s) \cdot fs(s) \quad (5)$$

반면 w_2 의 경우에는 프레임이 도착했을 때 큐에 먼저 대기중인 프레임들이 있는 경우이므로 이 경우의 서버를 기다리는 w_2 는 식 (6)와 같이 나타낼 수 있다.

$$w_2 = \sum_{S_i} X_j' + Mt \quad S = \{1, 2, \dots, N\} \quad (6)$$

$$S_i = S / \{i\}$$

여기서 X_i' 는 $F_{X_i}'(x) = qB(x) + p$ 의 분포를 갖으므로 $F_{X_i}'(s)$ 는 다음 (7-a)와 같으며 Mt 는 스테이션 전환시간 Y_i 의 합으로서 다음 식 (7-b)과 같다.

$$F_{X_i}'(s) = \frac{q\mu}{s + \mu} + p \quad (7-a)$$

$$Mt = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_N \quad (7-b)$$

본 논문에서는 이 Mt 를 상수로 놓았는데 그 이유는 토큰 패싱 버스 네트워크의 경우에 스테이션간에 논리적인 링(logical ring)을 구성하게 되므로 스테이션 전환 시간인 토큰 패싱 시간(token passing time)은 스테이션간의 거리와 전송 속도가 고정되어 있으므로 그 값은 상수가 된다. 따라서 그 합인 Mt 도 상수가 된다. 그러므로 w_2 의 LST $f_{w_2}(s)$ 는 스테이션 독립성의 가정에 의하여 식 (8)과 같다.

$$f_{w_2}(s) = \prod_{k=1}^{N-1} f_{x_k}(s) e^{-sMt} \\ = \left[\frac{q'}{s + \mu} + p' \right]^{N-1} \cdot e^{-sMt} \quad (8-a)$$

여기서

$$q' = \frac{1/\mu + Mt}{1 - \lambda(N-1)/\mu} \quad (8-b)$$

$$p' = 1 - q'$$

$f_{x_k}(x)^N$ 는 큐에 전송할 프레임이 이미 존재하는 경우에 자신의 큐에 대한 서비스가 종료된 후부터 다시 자신에게 서버가 돌아올 때까지의 시간에 대한 분포함수이며 이때 q' 은 큐에 있는 프레임을 전송한 후 서버가 다시 돌아올 때까지 자신의 큐에 프레임이 도착할 확률을 의미한다. 식(4), (5), (8)로부터 결합 서비스 시간 분포의 LST $f_b(s)$ 를 구하면 다음의 식(9)로 주어진다.

$$f_b(s) = p \cdot \frac{\mu}{s + \mu} \cdot \frac{1 - f_c(s)}{E[c] \cdot s} + \\ q \cdot \frac{\mu}{s + \mu} \cdot \left[\frac{q'}{s + \mu} + p' \right]^{N-1} \cdot e^{-sMt} \quad (9-a)$$

여기서

$$f_c(s) = \left[\frac{q\mu}{s + \mu} + p \right]^N \cdot e^{-sMt} \quad (9-b)$$

식(9)에서와 같이 서비스 분포를 구하면 순환 서비스 시스템에서 어느 한 스테이션에서의 큐와 서버간의 관계는 일반적인 M/G/1 큐잉 모델처럼 근사적으로 모델링될 수 있다. 따라서 순환 서비스 시스템에서의 프레임의 체류 시간 분포는 M/G/1 큐잉 모델에서 체류시간 분포에 관한 LST 식인 Pollaczek-Khinchine 변환식에 식(9)를 대입함으로써 구할 수 있다. 즉 체류시간 분포의 LST, $J(s)$ 는 다음 식(10)로 나타낼 수 있다.

$$J(s) = \frac{s f_b(s) (1 - \rho)}{(s - \lambda) + \lambda \cdot f_b(s)} \quad (10)$$

여기서 ρ 는 결합 서비스 시간의 트래픽 밀도(traffic intensity)로서 프레임의 평균 도착율과 평균 결합 서비스율의 비(ratio)로 주어지므로 ρ 는 다음 식(11)과 같다.

$$\rho = \frac{\lambda}{E[b]} \\ = \frac{\lambda}{p(1/\mu + 1/\alpha) + q(1/\mu + q'(N-1)/\mu + Mt)} \quad (11-a)$$

여기서

$$\alpha = \frac{2 \cdot E[c]}{E[c^2]} \quad (11-b)$$

4장 근사화된 체류시간 분포

3장에서 구한 체류시간의 분포함수의 경우에는 $J(s)$ 의 특성식(characteristic equation)의 차수가 시스템에서의 스테이션의 수가 증가할수록 커지며 또한 $\exp(-sMt)$ 항이 있기 때문에 실제 식(11)에서 체류시간에 대한 LST 형태의 식을 구하였다 하더라도 이를 역변환(inverse LST)시켜서 시간 영역에서의 체류시간 분포함수가 쉽게 얻어지지 않는다. 따라서 보다 간단하게 체류시간의 분포를 구할 수 있도록 식(9)를 근사시킴으로써 식(9)의 차수를 줄인다. 식(9)의 차수가 높은 이유는 서버를 기다리는 시간에 대한 분포를 포함에 있어서 이 분포함수가 순환 시간과 밀접한 관계를 갖기 때문이다. 그러므로 이 서버를 기다리는 시간을 나타내는 확률 변수 W_1, W_2 를 다음과 같이 근사시킨다.

4.1 근사화된 W_1 의 분포함수 (ω_1)

W_1 의 근사적 확률 변수를 ω_1 으로 나타낼 경우 ω_1 의 분포함수를 대개 구간이 0부터 평균 순환시간까지인 균일 분포(uniform distribution)로써 표현하고 있는데 이는 시스템의 분산값에 대한 고려를 하지 않았기 때문에 그대로 사용할 경우에 순환 시간의 분산값이 커질수록 오차가 많이 나게되므로 근사화 과정에서 순환 시간의 분산에 대한 정보를 고려하여 다음과 같이 근사화하였다.

$$\omega_1 = \text{균일 분포} [0 \cdot (1 + \sigma_c^2)/E[c]] \quad (12)$$

$(1 + \sigma_c^2)/2$ 는 식(4)의 평균값으로 분산에 대한 정보가 포함되어 있으므로, 식(12)와 같이 근사화시킬 경우에 순환시간의 평균값을 상한으로 한것에 비하면 보다 정확한 결과를 얻을 수 있으나, 순환시간의 분산값이 커질수록 W_1 를 균일 분포로 근사화시키는데 따른 오차는 완만하게나마 증가한다. 따라서 근사화된 체류시간의 분포가 보다 정확성을 갖기위한 하나의 요건은 순환시간의 분산이 적은 시스템이 되어야한다는 것이고 분산값은 스테이션의 평균 서비스율이 클수록 그리고 스테이션의 수가 많을수록 적어진다.

4.2 근사화된 W_2 의 분포함수(ω_2)

W_2 의 분포함수를 근사시키기 위해서 임의의 확률 변수(T)에 대한 지수 분포함수로서의 근사 방법을 사용한 다[11]. 이는 다음의 식(13)과 같다. ($c = T$ 의 분산 계수(coefficient of variation)

$$0 \leq c \leq 1 \\ F(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq t_1 \\ 1 - \exp(-(t - t_1)/t_2) & t_1 \leq t \end{cases} \quad (13-a)$$

여기서

$$t_1 = E[T] \cdot (1 - c), \quad t_2 = E[t] \cdot c$$

$$1 \leq c$$

$$F(t) = 1 - p \exp(-t/t_1) - (1-p) \exp(-t/t_2) \quad (13-b)$$

여기서

$$t_{1,2} = E[T] \cdot (1 \pm ((c^2 - 1)/(c^2 + 1))^{1/2})$$

$$p = E[T]/2 \cdot t_1$$

식(13)에서 볼 수 있듯이 W_2 의 근사화를 위해서는 W_2 의 평균과 분산 계수(σ_w)를 구하여야 하는데 이를 식(8)로부터 구하면 다음 식(14)로 주어진다.

$$E[W_2] = (N-1) \cdot q'/\mu + Mt \quad (14-a)$$

$$\sigma_{w_2} = \frac{q'/\mu^2 [2(N-1) - q']}{E[W_2]} \quad (14-b)$$

전술한 바와 같이 서버 대기시간은 순환 시간 분포와 밀접한 관계를 갖는데 특히 W_{2s} 의 경우에는 그 식에서도 볼 수 있듯이 순환 시간 분포와 거의 같은 형태를 갖고 있다. 따라서 W_{1s} 의 근사화 과정에서 요구된 적은 순환 시간의 분산을 갖는 대칭 시스템의 경우에 W_{2s} 의 분산값도 적은 값을 갖게 되므로 W_{2s} 의 근사화 과정에서 사용되는 식은 (13-a)가 된다.

식 (13-b)가 지수함수만으로 이루어진데 반해서 식(13-a)의 경우에는 t_1 만큼 이동된 지수함수 형태를 갖기 때문에 W_{2s} 의 근사화된 확률 변수인 ω_2 의 LST에는 다음 식(15)에서처럼 $\exp(-st_1)$ 의 항이 곱해지게 된다.

$$f_{W_2}(w) = \frac{\beta}{s + \beta} \cdot e^{-st_1} \quad (15-a)$$

여기서

$$\beta = \frac{1}{E[W_{2s}] \cdot \sigma w} \quad (15-b)$$

$$t_1 = E[W_{2s}] \cdot (1 - \sigma w) \quad (15-c)$$

적은 분산값을 갖는 순환 시스템의 경우에 t_1 은 거의 $E[W_{2s}]$ 에 의해서 결정되어지는데, $-s \cdot E[W_{2s}]$ 의 값이 약 10^{-1} 보다 적은 양을 갖는 경우에는 $\exp(-st_1)$ 를 식(16)과 같이 s 의 선형 분수 형태로 근사화할 수 있다.

$$\exp(-st_1) = \frac{1 - st_1/2}{1 + st_1/2} \quad (16)$$

제한 서비스($k=1$)방식의 대칭 순환 시스템이 안정되기 위한 조건은 다음의 식(17)과 같다[12].

$$N\lambda/\mu + Mt < 1 \quad (17)$$

따라서 스테이션이 안정되기 위해서는 프레임의 도착율과 서비스율이 $\mu > \lambda$ 의 관계가 성립해야하며 식(17)로부터 s 영역에서 순환 서비스 시스템이 수렴할 때 다음의 관계를 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \sup(\text{Re}(-st_1)) &= \lambda_{\text{sup}} \cdot t_1 \\ &= \frac{\mu \cdot (1-Mt) \cdot E[W_{2s}] \cdot (1-\sigma w)}{N} \\ &< \mu \cdot E[W_{2s}]/N \\ &= \mu((N-1)q'/\mu + Mt)/N \\ &= \frac{(N-1)q'}{N} + \frac{\mu Mt}{N} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \sup(\text{Re}(-st_1)) \leq 1 \quad (18)$$

식(18)로부터 순환 서비스 시스템의 도착율 λ 을 $\lambda_{\text{sup}}/10$ 보다 적은 값을 취할 경우 $\exp(-st_1)$ 을 식(16)과 같이 근사시킬 수 있으므로 식(16)을 식(15)에 대입하면 s 에 대한 선형 분수 형태로 된 서버 대기시간을 얻을 수 있다.

$$f_{W_2}(w) = \frac{\beta}{s + \beta} \cdot \frac{1 - st_1/2}{1 + st_1/2} \quad (19)$$

식(12)와 식(19)로부터 근사화된 결합 서비스 시간 분포 함수 $f_b(s)$ 는 다음 식(20)으로 나타내어진다.

$$f_b(s) = p \cdot \frac{\mu}{s + \mu} \cdot \frac{\alpha}{s + \alpha} + q \cdot \frac{\mu}{s + \mu} \cdot \frac{\beta}{s + \beta} \cdot \frac{1 - st_1}{1 + st_1} \quad (20)$$

식(20)으로부터 체류시간 분포함수를 구하면 다음 식(21)과 같다.

$$j(s) = \frac{s(1-\rho)M(s)}{(s-\lambda)(s+\alpha)(s+\beta)(1+st_1/2) + M(s)} \quad (21)$$

여기서 $M(S) = p\alpha\mu(1+st_1/2)(s+\beta) + q\mu\beta(s+\alpha)(1-st_1/2)$ 위의 식(21)을 다시 정리하면 다음 식(22)가 된다.

$$j(s) = \frac{(1-\rho)M(s)}{N(s)} \quad (22)$$

$$N(s) = s^3 + c_1s^2 + c_2s + c_3$$

$$c_1 = \alpha + \beta - \lambda - \mu$$

$$c_2 = \alpha\beta - \mu\lambda + (\alpha+\beta) \cdot (\lambda-\mu) - \lambda\mu t_1(p\alpha - q\beta)/2$$

$$c_3 = \alpha\beta \cdot (\lambda-\mu) - \mu\lambda \cdot (\alpha+\beta) + \lambda\mu \cdot (p\alpha + q\beta + \alpha\beta t_1(p-q)/2)$$

위의 식(22)는 s 에 관한 다항식의 형태로 되어 있으며 분모의 차수가 3차, 분자의 차수가 2차이므로 이에대한 부분 분수(partial fraction)을 수행하면 $j(s)$ 의 역변환을 쉽게 구할 수 있다. $N(s)$ 의 특성근이 중근의 형태를 갖지않는 경우의 역변환된 $j(t)$ 는 다음의 식(23)처럼 지수함수의 선형 결합형태가 된다. (y_k = 특성식 $N(s)$ 의 근)

$$j(t) = \sum_{k=1}^3 dk \exp(-y_k t) \quad (23)$$

$$dk = (s - y_k) \cdot j(s) \Big|_{s=y_k}$$

4.3 토큰 패싱 네트워크에의 응용에 및 비교

이상에서 구한 체류시간의 분포식을 토큰 패싱 네트워크의 경우에 적용하기위해 사용된 시스템 변수값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{프레임 전송 속도} &= 10 \text{ Mbps} \\ \text{스테이션 전환 시간}(T_p) &= \\ &= \text{토큰 프레임의 길이} \times 8/10\text{Mbps} + 2 \text{ sec(안전 이득)} \\ &+ 10 \mu\text{sec(평균 전송 지연 시간)} \\ &= 31.2 \mu\text{sec} \\ (\text{토큰 프레임의 길이} &= 24 \text{ byte}) \end{aligned}$$

위의 값은 토큰 패싱 버스의 표준안인 IEEE 802.4의 규정을 근거로 한 것이다. Takagi에 의한 평균 체류시간 j_1 은 다음 식(24)와 같다.

$$j_1 = 1/\mu + \frac{N[2\lambda/\mu^2 + T_p(1+\lambda/\mu) + \lambda/\mu]}{2[1 - N\lambda(T_p + 1/\mu)]} \quad (24)$$

그림 3은 스테이션의 수가 10이고 프레임의 평균 도착율이 100 P/sec일 때 서비스율의 변화에 따른 식(20)에서 구한 평균 체류시간과 과 식(24)의 결과를 비교한 것이다. 그림에서 볼 수 있듯이 서버의 평균 서비스 시간이 적은 경우에는 두 결과가 거의 일치하는 반면, 평균 서비스 시간이 커질수록 차이가 커짐을 보여주고 있다.

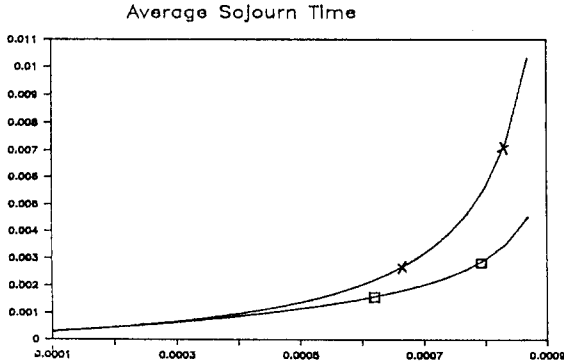


그림 3. 평균 체류시간의 서비스율에 따른 비교
(□ = 근사식으로부터 구한 평균 체류시간,
x = Takagi에 의한 평균 체류시간)

그림 4는 $N=10$, $\mu=10000$ packets/sec인 경우에 평균 도착율을 변화시킬 때 따른 체류시간의 분포함수를 나타낸 것이며 그림 5는 $N=10$, $\lambda=10$ packet/sec인 경우에 평균 서비스율을 변화시켰을 때의 체류시간의 분포함수를 나타낸 것이다.

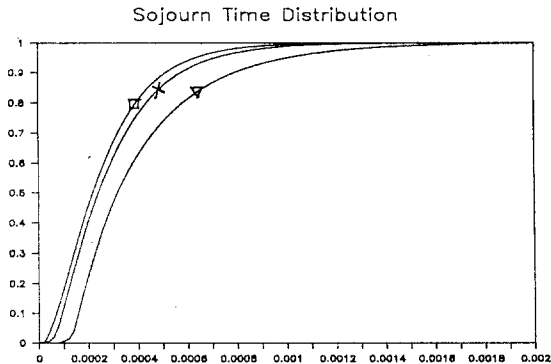


그림 4. 평균 도착율의 변화에 따른 체류시간 분포함수
(□ = 10 p/sec, x = 100 p/sec, △ = 300p/sec)

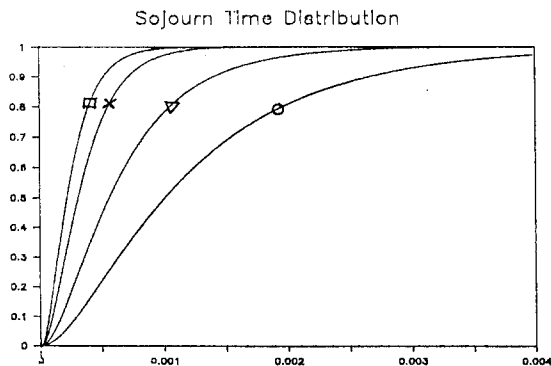


그림 5. 평균 서비스율의 변화에 따른 체류시간 분포함수
(□ = 10000 p/sec, x = 5000 p/sec, △ = 2000 p/sec,
o = 1000 p/sec)

Simulation/Analytic results

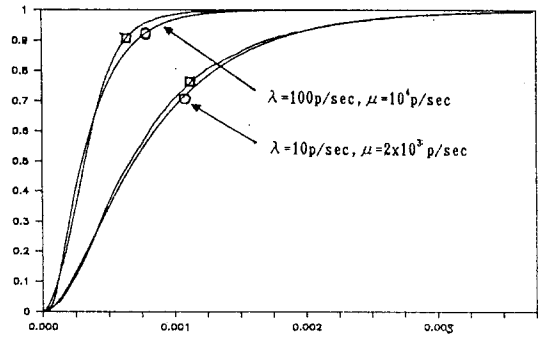


그림 6. 해석적 결과와 시뮬레이션 결과와의 비교
(□ = 시뮬레이션 결과, O 해석적 결과)

그림 6은 $N=10$ 일때, $\lambda=100p/sec$, $\mu=10^4 p/sec$ 인 경우와 $\lambda=10p/sec$, $\mu=2 \times 10^3 p/sec$ 인 경우에 컴퓨터 시뮬레이션으로 구한 결과와 비교한 것으로 이때의 순환 시간의 분산 계수값은 각각 0.235, 0.385이다. (시뮬레이션은 SDL/SIM 시뮬레이션 패키지(package)를 사용하였으며 시뮬레이션의 수행 시간 간격은 1 μsec 이다[13].) 그림 6에서 볼 수 있듯이 식(22)로부터 구한 체류시간 분포함수는 순환시간의 분산값이 적은 경우에는 상당히 정확한 결과를 얻을 수 있었다. IEEE 802.4/802.2 표준안에 따르는 토큰 패싱 네트워크의 경우에 한번에 전송 할 수 있는 최대 프레임 크기는 1 kbytes로 제한되므로 이에 따른 서버의 최소 서비스율은 1250 p/sec가 된다[14]. 그러므로 토큰 패싱 네트워크의 경우에는 적은 분산값을 갖게되며 본 논문에서 구한 근사식이 잘 적용될 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 제한 서비스 방식($k=1$)의 대칭 순환 서비스 시스템에서 서버에 의한 서비스 시간과 순환하는 서버가 자신의 큐에 올 때까지를 기다리는 시간을 합한 결합 서비스 시간에 대한 분포식을 구하고 이를 바탕으로 체류시간 분포의 LST를 구하였다. 또한 서버 대기시간을 균일 분포와 시간축에서 이동된 형태의 지수분포로 근사화시킴으로써 쉽게 역변환시킬 수 있도록하였다. 이와같은 근사화식은 순환 시간의 분산이 적은 시스템에 적용해야하는 제한이 있으나, 순환 시스템의 가장 대표적인 예인 토큰 패싱 네트워크의 경우에 서버의 서비스율이 10^3 이상의 큰 값을 기대할 수 있으므로 이 조건은 무리없이 받아들여질 수 있다. 따라서 본 논문에서 구한 체류시간의 분포함수를 네트워크 시스템의 성능해석에 응용시에 좋은 결과를 기대할 수 있다. 앞으로의 과제로는, 본 논문의 경우에 대칭 시스템만을 해석하였는데 보다 일반적인 결과를 얻기 위해서는 비대칭 시스템의 대해서도 이와같은 근사화된 체류시간의 분포함수를 구하여야하며, 네트워크의 경우에는 계층간의 상호 작용문제가 있기 때문에 이를 고려한 체류시간의 분포에 대한 연구가 계속되어야겠다.

감사의 글 : 본 논문은 한국 과학 재단의 연구비 지원에 의하여 이루어졌으며 이에 사의를 표합니다.

참고 문헌

- [1] Vernon Rego, Lionel M.Ni, "Analytic Model of Cyclic Service Systems and Their Application to Token-Passing Local Networks," IEEE Trans. Computers, vol. 37, No. 10, 8, 1988
- [2] IEEE 802.4 Token Passing Bus Access Method and Physical Layer Specifications revision E, 1983.
- [3] M.A. Leibowitz, "An Approximate Method for Treating a Class of Multiqueue Problems," IBM J. Res. Develop. 1961

- [4] M. Eisenberg, "Two Queues with Changeover Times," Oper. Res. 1971
- [5] Y.J. Aminetzah, M.J. Ferguson, "Exact Results for Nonsymmetric Token Ring Systems," IEEE Trans. Communications, vol. 33, No. 3, 3, 1985
- [6] H. Takagi, "Mean meage waiting times in symmetric multi-queue systems with cyclic service," Perform. Eval., vol. 7, 11, 1987
- [7] O.J. Boxma, B Meister, "Waiting time approximations for cyclic service systems with switchover times," Perform. Eval., vol. 7, 11, 1987
- [8] O. Hashida, K. Ohara, "Line accomodation capacity of a communication control unit," Rev. Elect. Commun. Lab., Nippon Telegraph and Telephone Public Corp., vol. 20, 1972
- [9] P.J. Kuehn, "Multiqueue systems with nonexhaustive cyclic service," Bell System. Tech. J., vol. 58, 4, 1979
- [10] Athanasios Papoulis, Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, pp 365-367, McGraw-Hill, 1984
- [11] P.J. Kuehn, "Approximate Analysis of General Networks by Decomposition," IEEE Trans. Commun. Com. 27, 1979
- [12] Oliver.C.lbe, Xian Cheng, "Stability Conditions for Multiqueue Systems with Cyclic Service," IEEE Trans. AC. vol. 33, No. 1, 1, 1988
- [13] B.Stavenow, J.Karsson, SDL/SIM package, Lund Inst. of Tech., 1983
- [14] ASNI/IEEE 802.2 Standard 802.2, 7, 1985