

스위칭 동태방정식을 이용한 선형 다변수서보메카니즘에 대한 견고한 제어기 설계  
 The Robust Controller Design for Linear Multivariable Servo  
 Mechanism using Switching Dynamics

박귀태, 오국근, 김동식, 최증경, 주영중  
 (G.T.Park, C.P.Kuo, D.S.Kim, J.K.Choi, Y.J.Ju)

고려대학교 전기공학과  
 (Korea Univ., Dept. of Elec. Eng.)

This paper presents an approach for designing a linear multivariable servo mechanism for the case of constant and time varying disturbances. In this paper, we use an "observer-based" approach to consider the disturbance vector as states of the system and the resulting servomechanism design involves the design of an asymptotic observer which estimates both the actual plant states and the disturbance states. The design makes use of switching dynamics instead of switching logics to obtain the sliding mode and from the switching dynamics we can remove the undesirable chattering phenomena.

1. 서론

계통에 외란이 존재하게 되면 원점 부근의 스위칭 평면에서 슬라이딩 모드가 무너지게 되어 불안정하게 되거나 정상상태 오차가 남게 되는 등 여러 가지 바람직하지 못한 현상을 나타낸다. 이러한 현상을 제거하기 위해 Utkin은 슬라이딩 모드를 이용하여 외란을 제거하기 위한 가변구조계(Variable Structure System : VSS)의 설계를 제안하였다. [1,2] 여기서는 외란의 동태방정식은 본질적으로 모른다고 가정하였으며 단지 외란의 변동범위만을 이용하여 제어기를 구성하였으며 이러한 설계 기법은 넓은 범위에 걸쳐 응용되어 왔다.

일반적으로 선형 다변수 서보 메카니즘의 제어기 설계문제에는 Kwatny [3]와 Davison [4]에 의해 주도되어 왔다. Kwatny는 외란을 상태로 가정하고 이러한 외란을 상태관측기를 이용하여 추정한 후 제어기를 구성하였다.

1980년 초에 이르러 Kwatny와 Davison의 기법을 이용한 가변 구조 서보메카니즘에 대한 연구가 발표되기 시작하였다. [5,6,7] 하지만 가변 구조 제어입력은 본질적으로 불연속이기 때문에 이와 같은 입력이 계통에 가해지면 계통의 비모델화된 동태를 여기하여 고주파 진동현상을 발생한다. 따라서 본 논문에서의 제어목적은 이러한 단점을 제거하기 위해 외란이 존재하는 선형 다중 입력 계통에서 상태관측기를 이용하여 외란을 계통의 상태로 고려하여 상태 및 외란을 추정하고 이 결과들을 이용하여 계통의 출력이 기준 입력을 추종하도록 제어기를 구성하는 것이다. 또한 제어기 설계방법은 슬라이딩 모드를 얻기 위해 스위칭 논리 대신 스위칭 동태방정식을 사용했다. 그러므로 스위칭 동태방정식으로 부터 얻어진 연속적 제어입력에 의해 계통의 진동현상을 제거하였다. 먼저 2장에서 선형 시불변 다변수 서보 메카니즘에 대해서 기술했으며 3장에서는 가변구조제어이론에 대해서 기술하였다. 그리고 4장에서는 본 논문의 핵심인 슬라이딩 모드 제어 알고리즘을 제시한다. 또한 5장에서는 수치예를 통해 본 알고리즘의 우수성을 보이며 끝으로 6장에서 결론을 맺는다.

2. 선형 시불변 다변수 서보메카니즘

선형 시불변 다중 입력 계통의 동태방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{x} = Ax + Bw + Bu \quad (2-1)$$

$$\dot{w} = Zw \quad (2-2)$$

$$y = Cx + Fw \quad (2-3)$$

$$\dot{w} = Dw \quad (2-4)$$

여기서  $x$ 는  $n$ 차원을 갖는 플랜트의 상태벡터이고  $w$ 는  $q$ 차원을 갖는 외란벡터이며  $y$ 와  $\dot{w}$ 는 각각  $r$ 차원을 갖는 출력벡터와 기준 입력 벡터이다. 또한  $u$ 는  $m$ 차원을 갖는 제어 입력벡터이다. 여기서  $(A, B)$ 는 가제어하고  $(C, A)$ 는 가관측하며 행렬  $B$ 와  $C$ 는 full rank를 갖는다고 가정한다.

본 연구의 제어 목적은 피드백 제어기에 의해 식 (2-5)로 나타내어지는 1차원의 오차 벡터  $e$ 를 조정 (regulation)하는 것이다.

$$e = y - \bar{y} = Crx + Frw \quad (2-5)$$

만약 계통이 internal stability하고 output regulation되어진다면 정상상태에서의 상태와 입력벡터  $\bar{x}$ 와  $\bar{u}$ 는 외란  $w$ 의 선형함수로서 나타낼 수 있다. 즉

$$\bar{x} = Ww \quad (2-6a)$$

$$\bar{u} = Uw \quad (2-6b)$$

윗식에서 계수 행렬  $W$ 와  $U$ 는 다음의 대수 방정식을 만족해야 한다.

$$AW + BU + E - WZ = 0 \quad (2-7a)$$

$$CrW + Fr = 0 \quad (2-7b)$$

식 (2-7)은 다음과 같은 의미이다. 즉  $\sigma_i = \lambda_i(z)$ 에 대해 다음의 rank조건을 만족해야 한다.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \sigma_i I & B \\ Cr & 0 \end{bmatrix} = n + 1 \quad (2-8)$$

이상으로부터 상태와 입력 벡터의 편차(deviation)는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\Delta x = x - \bar{x} = x - Ww \quad (2-9a)$$

$$\Delta u = u - \bar{u} = u - Uw \quad (2-9b)$$

미지의 외란이 존재할때 우리는 상태관측기를 사용하여 상태 및 외란을 추정해야 하므로 식 (2-9)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \hat{x} = \hat{x} - W\hat{w} \quad (2-10a)$$

$$\Delta \hat{u} = \hat{u} - U\hat{w} \quad (2-10b)$$

여기서  $\Delta \hat{x}$ ,  $\hat{x}$ ,  $\hat{w}$ 는 각각  $\Delta x$ ,  $x$ ,  $w$ 의 추정치이다. 따라서 계통의 상태관측기는 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - H_1 C & E - H_1 F \\ -H_2 C & Z - H_2 F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} y \quad (2-11)$$

여기서 상태관측기의 이득  $H_1$ 과  $H_2$ 는 각각  $t \rightarrow \infty$ 일때  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ 와  $\hat{w}(t) \rightarrow w(t)$ 가 되게 선정한다. 또한 식 (2-11)에서 계통의 제어입력  $u$ 는 식 (2-10b)로부터 다음과 같이 구성된다.

$$u = \Delta u + U\hat{w} \quad (2-12)$$

식 (2-1) - (2-3), (2-10), (2-11)로부터 전체

서보계통은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \dot{x} - \hat{x} \\ \dot{w} - \hat{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (H_1 - WH_2)C & (H_1 - WH_2)F \\ A & A - H_1C & E - H_1F \\ 0 & -H_2C & Z - H_2F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{x} \\ x - \hat{x} \\ w - \hat{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u \quad (2-13)$$

### 3. 가변구조 제어 이론

식 (2-13)은 관측기의 이득  $H_1$  및  $H_2$ 를  $t \rightarrow \infty$  일때  $\hat{x} \rightarrow x$  및  $\hat{w} \rightarrow w$  이 되게 선정하므로 결과적으로 다음과 같은 조정기 계통을 나타낸다.

$$\Delta \dot{x} = A \Delta \hat{x} + B \Delta u \quad (3-1)$$

가변구조 조정기 (Variable Structure Regulator)의 설계목적은 임의의 초기조건  $x(0) = x_0$ 로부터  $t \rightarrow \infty$  이면 상태가 점근적으로 원점으로 가계해 주는 것이다.

스위칭평면은 다음과 같이 정의된다.

$$s_j(\Delta \hat{x}) = \{ G_j \Delta \hat{x} : G_j \Delta \hat{x} = 0 \} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3-2)$$

여기서  $G_j \in R^{m \times n}$ 는 행벡터이다.

만약 상태가 동시에 각 초평면 (hyperplane)  $S_j$ 에 놓여진다면, 이상적인 슬라이딩 모드가 일어난다. 즉 상태가 식 (3-3)으로 표현되는 스위칭 평면  $S$ 에 도달하여 머물게 되면 이상적인 슬라이딩 모드가 일어나게 된다.

$$S(\Delta \hat{x}) = \{ \Delta \hat{x} : G \Delta \hat{x} = 0 \} \quad (3-3)$$

슬라이딩 모드내에서는 다음과 같은 식이 만족되어진다.

$$S(\Delta \dot{x}) = 0 \quad (3-4a)$$

$$S(\Delta x) = 0 \quad (3-4b)$$

식 (3-4)로 부터 계통이 슬라이딩 모드내에 있을 때는 식 (3-5)와 같이 표현된다.

$$S = G \Delta \dot{x} = G A \Delta \hat{x} + G B \Delta u = 0 \quad (3-5)$$

윗 식으로부터 등가제어입력  $\Delta u_{eq}$ 는 다음과 같다. 따라서 계통의 상태가 슬라이딩 모드내에 있을 때의 계통의 동태방정식은 식 (3-6)과 (3-1)로 부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \dot{x} = [I - B(GB)^{-1}G] A \Delta \hat{x} = A_{eq} \Delta \hat{x} \quad (3-7)$$

식 (3-7)로 부터 계통이 슬라이딩 모드에 있을 때 계통의 응답은 스위칭 평면행렬  $G$ 의 선택에 달려있음을 알 수 있다. 따라서  $\lambda_j(A_{eq}) < 0$  되게  $G$ 를 선정하면 계통의 상태가 슬라이딩 모드내에서 안정함을 알 수 있다.

슬라이딩 모드가 일어나기 위해서는 스위칭 평면 근방에 있는 모든 상태 궤적들이 모두 이 평면으로 향해야 한다. 슬라이딩 모드가 일어나기 위한 필요충분조건은 식 (3-8)과 같다.

$$\lim_{s \rightarrow 0} S_j \Delta \dot{x} < 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3-8)$$

식 (3-1), (3-4), (3-8)로 부터 가변구조 제어 이론에 의한 제어 입력  $\Delta u$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta u(\Delta \hat{x}) = \begin{cases} \Delta u_+^*(\Delta \hat{x}) & s(\Delta \hat{x}) > 0 \\ \Delta u_0^*(\Delta \hat{x}) & s(\Delta \hat{x}) = 0 \\ \Delta u_-^*(\Delta \hat{x}) & s(\Delta \hat{x}) < 0 \end{cases} \quad (3-9)$$

윗 식에서  $\Delta u_+^*$ 와  $\Delta u_-^*$ 는 각각 연속함수이지만  $\Delta u$ 는 스위칭 평면에 의해  $\Delta u_+^*$ 와  $\Delta u_-^*$ 중 같은 시간에 하나의 값만 취할 수 있게 스위칭 로직이 정해지므로 전체 시간 구간에서 불연속적인 값을 갖게 된다.

본 논문의 제어대상은 다중 입력률계통이므로 단일 입력인 경우와 같은 제어기 설계기법에 의해서는 스위칭 이득을 구할수 없다. 따라서 스위칭 이득을 구하기 위해 대각화 기법(Diagonalization method)를 사용하였다.

대각화 기법은 제어입력  $\Delta u$  대신 새로운 제어입력 벡터  $\Delta u^*$ 를 이용하여 원래 계통의 제어입력  $\Delta u$  대신 비선형 변환(nonlinear transformation)을 취한 것이다.

$$\Delta u^* = Q^{-1} G B \Delta u, \quad |Q| \neq 0 \quad (3-10)$$

여기서 행렬  $Q \in R^{m \times m}$ 는  $q_j > 0$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ )의 성분들을 갖는 임의의 대각행렬이다. 이러한 비선형 변환행렬  $Q$ 를 이용하면 식 (3-1)과 같은  $m$ 개의 입력을 갖는 다변수 계통은 결국  $m$ 개의 단일 입력을 갖는 계통의 제어기 설계문제와 같아진다. 따라서 식

(3-10)을 식 (3-1)에 대입하면

$$\Delta \dot{x} = A \Delta \hat{x} + B(GB)^{-1} Q \Delta u^* \quad (3-11)$$

식 (3-11)로 부터 스위칭 평면 함수  $S$ 의 1차도함수는 다음과 같다.

$$S = C A \Delta \hat{x} + Q U \dot{\Delta \hat{x}} \quad (3-12)$$

슬라이딩 모드의 존재조건인 식 (3-8)을 이용하면 식 (3-9)의 제어입력은 다음과 같이 결정된다.

$$q_j \Delta u^* < G_j A \Delta \hat{x}, \quad S_j > 0 \quad (3-13a)$$

$$q_j \Delta u^* > -G_j A \Delta \hat{x}, \quad S_j < 0 \quad (3-13b)$$

따라서 실제 제어입력  $\Delta u$ 는 식 (3-10)으로 부터 다음과 같이 결정된다.

$$\Delta u = (GB)^{-1} Q \Delta u^* \quad (3-14)$$

### 4. 스위칭 동태방정식을 이용한 제어계통 설계

VSS이론에서 제어입력이 불연속인 것은 슬라이딩 모드를 얻기 위해 슬라이딩 모드의 존재조건을 만족하도록 이득값들을 스위칭 로직에 따라 바꾸어 주기 때문이다. 따라서 이러한 불연속 입력에 의한 계통의 진동현상을 제거하기 위하여 스위칭 로직 대신 식 (4-1)과 같은 슬라이딩 모드의 존재조건을 만족하도록 다음과 같은 스위칭 동태 방정식을 정의한다.

$$S = -\gamma S \quad (4-1)$$

여기서  $\gamma$ 는 설계인자로서  $\gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ 이며  $\gamma_j > 0$ 이다.

식 (4-1)은 스위칭 함수의 일차 미분방정식으로 그 해는 다음과 같다.

$$S_j(t) = S_j(0) e^{-\gamma_j t} \quad (4-2)$$

$$S_j(0) = G_j \Delta \hat{x}(0) \quad (4-3)$$

식 (4-2), (4-3)에 의해 스위칭 함수값은  $\gamma$ 에 따라 지수함수적으로 0에 접근하게 되며 그 속도는  $\gamma$ 에 따라 달라진다.

식 (3-3)의 스위칭 함수를 미분하여 식 (3-1)을 대입하면

$$S = G \Delta \dot{x} = G A \Delta \hat{x} + G B \Delta u \quad (4-4)$$

식 (4-4)를  $\Delta u$ 에 대해 정리하면

$$\Delta u = -(GB)^{-1} (G A \Delta \hat{x} - S) \quad (4-5)$$

여기서  $S$  대신 식 (4-1)의 스위칭 동태방정식을 대입하면 제어입력은 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\Delta u = -(GB)^{-1} (G A \Delta \hat{x} + \gamma S) \quad (4-6)$$

윗 식에서의 두번째항은 상태궤적이 스위칭 평면에서 벗어나 있는 경우 스위칭 평면으로 향하게 하는 제어입력이며 식 (4-2)에 의하여  $S$ 가 0으로 접근하므로 이 제어입력은 곧 0이 되고 따라서 계통은 슬라이딩 모드에 들어가게 된다. 이때 식 (4-6)의 첫번째항은 계통이 슬라이딩 모드에 있을 때의 제어입력이며 이 입력을 가하면 계통의 상태방정식은 식 (3-7)과 같게 된다.

이 설계 방법에서는 결정해야 할 이득이  $\gamma$ 로서  $m$ 개 밖에 없다. 따라서 4장의 가변구조 제어이론에 비해 좋은 응답을 얻기 위한 이득동조가 쉽다. 또한 본 방법에서는 스위칭 로직 대신 스위칭 동태방정식을 정의했기 때문에 복잡한 스위칭 로직이 없어 물리적인 실현이 간편하다. [8] 본 제어입력에는 진동현상이 없다. 왜냐하면 식 (4-6)의 두번째항의 입력에 의해 슬라이딩 모드에 들어가면 이상적인 슬라이딩 모드가 일어나며 스위칭 평면 근처에서  $S$ 는 0에 가까운 값이 되므로 식 (4-6)의 제어입력은 연속적인 입력이 되기 때문이다.

### 5. 수치예

본 장에서는 컴퓨터 모의실험을 통해서 2가지 방법으로 설계한 제어계통의 응답특성을 비교검토하고자 한다.

#### 5.1 시불변 외란이 존재하는 다중 입력률 계통

이 절에서는 시불변 외란이 존재하는 식 (5-1)과 같은 서보계통의 제어계통을 설계한다.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u \quad (5-1)$$

$$\dot{w} = 0 \quad (5-2)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w \quad (5-3)$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} w \quad (5-4)$$

위 계통은 4개의 상태변수와 2개의 입력 및 출력 그리고 하나의 시변 외란을 갖는 다중 입출력 계통이다. 본 계통에서 관측기의 이득  $H_1, H_2$ 는 시간  $t \rightarrow \infty$  일때  $\hat{x} \rightarrow x, \hat{w} \rightarrow w$  가 되도록 다음과 같이 선정했다.

$$H_1 = \begin{bmatrix} -5 & 8 & 7 & 4 \\ -8 & 8 & -4 & -5 \end{bmatrix}^T, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

또한 행렬  $W$ 와  $U$ 는 식 (2-7)로 부터 구하면 다음과 같다.

$$W = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1.778 \end{bmatrix}, \quad U = [-1.889 \quad 1.1778]^T$$

### 5.1.1 VSS 이론에 의한 제어계통 설계방법

기존의 VSS 이론에 의한 설계방법을 편의상 알고리즘 I이라고 한다. 계통이 슬라이딩 모드내에 있을 때 계통의 고유치가  $-3 \pm j 2$ 를 갖도록  $G_1$ 과  $G_2$ 를 선정하면 스위칭 평면  $S_1$ 과  $S_2$ 는 식 (5-5)와 같다.

$$S_1 = G_1 \Delta \hat{x} = [4 \quad 4 \quad 2 \quad 1] \Delta \hat{x} = 0 \quad (5-5a)$$

$$S_2 = G_2 \Delta \hat{x} = [6 \quad 2 \quad 2 \quad 1] \Delta \hat{x} = 0 \quad (5-5b)$$

식 (5-1)과 같은 계통에 대해  $\Delta u^*$ 를 다음과 같이 선정하면

$$\Delta u^* = - \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \end{bmatrix} \Delta \hat{x} \quad (5-6)$$

식 (3-8)의 슬라이딩 모드의 존재 조건으로 부터 스위칭 이득을 구하여 그 결과를 정리하면 표 1과 같다. 따라서 실제 제어 입력  $u$ 는 식 (3-14)로 부터 구성되어 진다. 본 연구에서 행렬  $Q$ 는  $\text{diag}(1,1)$ 으로 선정했다.

표 1. 가변구조 제어에서 필요한 스위칭 이득값과 스위칭 모직 (알고리즘 I)

| 스위칭 이득      | 값  | 스위칭 모직                     | 이득 관계값 |
|-------------|----|----------------------------|--------|
| $\phi_{11}$ | 3  | $\Delta \hat{x}_1 s_1 > 0$ | 2      |
|             | 1  | $\Delta \hat{x}_1 s_1 < 0$ |        |
| $\phi_{12}$ | 2  | $\Delta \hat{x}_2 s_1 > 0$ | -1     |
|             | -4 | $\Delta \hat{x}_2 s_1 < 0$ |        |
| $\phi_{13}$ | 2  | $\Delta \hat{x}_3 s_1 > 0$ | 1      |
|             | -3 | $\Delta \hat{x}_3 s_1 < 0$ |        |
| $\phi_{14}$ | 2  | $\Delta \hat{x}_4 s_1 > 0$ | -2     |
|             | -4 | $\Delta \hat{x}_4 s_1 < 0$ |        |
| $\phi_{21}$ | 3  | $\Delta \hat{x}_1 s_2 > 0$ | 2      |
|             | 1  | $\Delta \hat{x}_1 s_2 < 0$ |        |
| $\phi_{22}$ | 3  | $\Delta \hat{x}_2 s_2 > 0$ | 1      |
|             | -2 | $\Delta \hat{x}_2 s_2 < 0$ |        |
| $\phi_{23}$ | 1  | $\Delta \hat{x}_3 s_2 > 0$ | -1     |
|             | -2 | $\Delta \hat{x}_3 s_2 < 0$ |        |
| $\phi_{24}$ | 5  | $\Delta \hat{x}_4 s_2 > 0$ | -2     |
|             | -4 | $\Delta \hat{x}_4 s_2 < 0$ |        |

### 5.1.2 스위칭 동태 방정식을 이용한 제어계통 설계

본 논문에서 제시한 설계방법을 알고리즘 II라 한다. 스위칭 평면 행렬  $G_1$ 과  $G_2$ 는 특성을 서로 비교하기 위해 알고리즘 I에서와 같이 선정했다. 식 (4-1)의 스위칭 동태방정식에 필요한 계수  $r_1$ 과  $r_2$ 는 모두 10으로 선정했다. 그 나머지 필요한 이득 값들은 식 (4-6)에 의해서 곧바로 얻어진다.

### 5.2 시변 외란이 존재하는 다중 입출력 계통

이 절에서는 시변 외란이 존재하는 다음과 같은 서보 계통의 제어기를 설계한다.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \quad (5-7)$$

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} w \quad (5-8)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w \quad (5-9)$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} w \quad (5-10)$$

위 계통은 4개의 상태변수와 2개의 입력 및 출력 그리고 2개의 시변 외란이 존재하는 다중 입출력 계통이다.

본 계통에서 관측기의 이득  $H$ 과  $H$ 는 다음과 같이 선정했다.

$$H_1 = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 6 & 10 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \end{bmatrix}^T, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

또한 행렬  $W$ 와  $U$ 는 식 (2-7)로 부터 구하면 다음과 같다.

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad U = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 5.2.1 VSS 이론에 의한 제어계통 설계방법

계통이 슬라이딩 모드에 있을때 계통의 고유치가  $-5 \pm j 3.8$ 를 갖도록  $G_1, G_2$ 를 선정하면 다음과 같다.

$$S_1 = G_1 \Delta \hat{x} = [4 \quad 4 \quad 2 \quad 1] \Delta \hat{x} = 0 \quad (5-11a)$$

$$S_2 = G_2 \Delta \hat{x} = [4 \quad 2 \quad 6 \quad 1] \Delta \hat{x} = 0 \quad (5-11b)$$

5.1.1절과 같은 방법으로 스위칭 이득을 구하여 그 결과를 표 2에 나타내었으며 제어 입력  $\Delta u$ 는 식 (3-14)로 부터 구성하였다.

표 2. 가변구조 제어에서 필요한 스위칭 이득값과 스위칭 모직 (알고리즘 I)

| 스위칭 이득      | 값  | 스위칭 모직                     | 이득 관계값 |
|-------------|----|----------------------------|--------|
| $\phi_{11}$ | -1 | $\Delta \hat{x}_1 s_1 > 0$ | 2      |
|             | 3  | $\Delta \hat{x}_1 s_1 < 0$ |        |
| $\phi_{12}$ | 6  | $\Delta \hat{x}_2 s_1 > 0$ | 4      |
|             | -1 | $\Delta \hat{x}_2 s_1 < 0$ |        |
| $\phi_{13}$ | 3  | $\Delta \hat{x}_3 s_1 > 0$ | 1      |
|             | -2 | $\Delta \hat{x}_3 s_1 < 0$ |        |
| $\phi_{14}$ | 6  | $\Delta \hat{x}_4 s_1 > 0$ | 4      |
|             | -2 | $\Delta \hat{x}_4 s_1 < 0$ |        |
| $\phi_{21}$ | 8  | $\Delta \hat{x}_1 s_2 > 0$ | 6      |
|             | -2 | $\Delta \hat{x}_1 s_2 < 0$ |        |
| $\phi_{22}$ | 6  | $\Delta \hat{x}_2 s_2 > 0$ | 4      |
|             | -2 | $\Delta \hat{x}_2 s_2 < 0$ |        |
| $\phi_{23}$ | 3  | $\Delta \hat{x}_3 s_2 > 0$ | 1      |
|             | -1 | $\Delta \hat{x}_3 s_2 < 0$ |        |
| $\phi_{24}$ | 5  | $\Delta \hat{x}_4 s_2 > 0$ | 2      |
|             | -1 | $\Delta \hat{x}_4 s_2 < 0$ |        |

### 5.2.2 스위칭 동태 방정식을 이용한 제어계통 설계

본 절에서는 계통의 응답특성을 서로 비교하기 위하여 스위칭 평면  $G_1$ 과  $G_2$ 를 5.2.1절과 같이 선정했다. 그리고 스위칭 동태방정식에 필요한 계수  $r_1, r_2$ 는 모두 10으로 선정했다. 따라서 제어 입력  $u$ 는 식 (4-6)으로 부터 얻어진다.

### 5.3 검토

앞 절에서 설계한 두 제어계통의 특성을 비교하기 위해서 디지털 컴퓨터로 모의 실험을 수행한 결과를 나타내면 그림 1-10과 같다. 이 그림들은 시변 외

외란인 경우 (그림 1-5) 초기치가  $x(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $w(0)=10$ ,  $\hat{x}(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\hat{w}(0)=0$  일 때와 시변 외란 일 경우 (그림 6-10) 초기치가  $x(0)=[0.1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $w(0)=[0.01 \ 0.01]^T$ ,  $\hat{x}(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\hat{w}(0)=[0 \ 0]^T$  일 때의 계층의 출력이 기준입력을 추종할 때의 결과들이다.

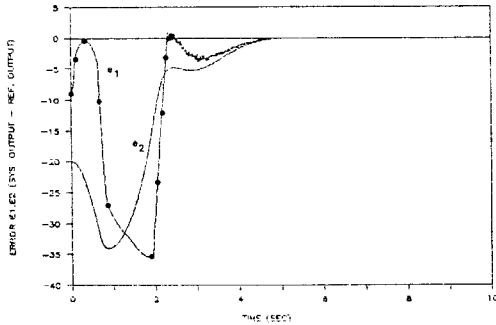


그림 1. 시불변 외란에 대한 오차 변수  $e_1$ ,  $e_2$ 의 상태궤적 (알고리즘 I)

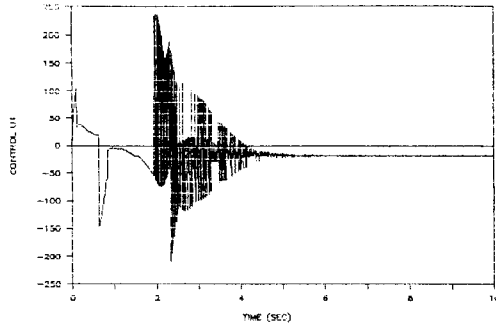


그림 2. 시불변 외란에 대한 가변구조제어이론에서의 불연속치 제어입력  $u_1$  (알고리즘 I)

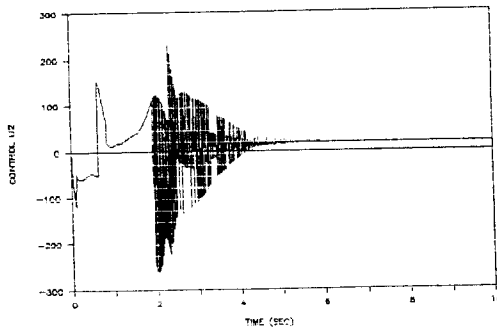


그림 3. 시불변 외란에 대한 가변구조제어이론에서의 불연속치 제어입력  $u_2$  (알고리즘 I)

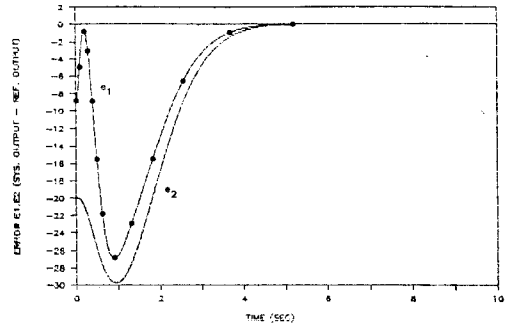


그림 4. 시불변 외란에 대한 오차 변수  $e_1$ ,  $e_2$ 의 상태궤적 (알고리즘 II)

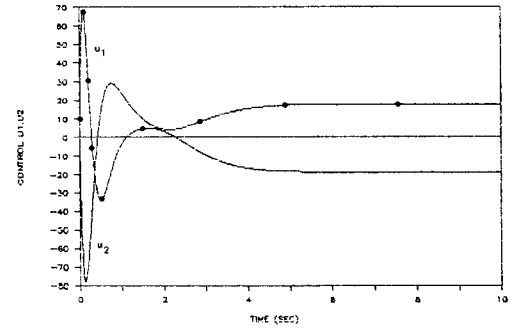


그림 5. 시불변 외란에 대한 제안된 기법에 의한 연속치 제어입력  $u_1$ ,  $u_2$  (알고리즘 II)

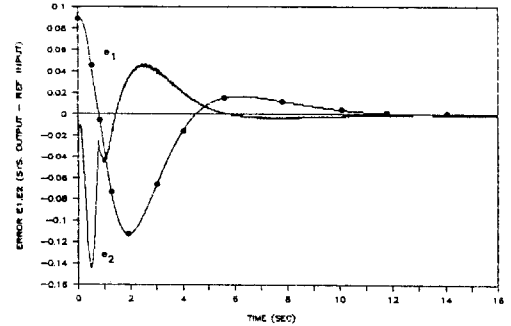


그림 7. 시변 외란에 대한 가변구조제어이론에서의 불연속치 제어입력  $u_1$  (알고리즘 I)

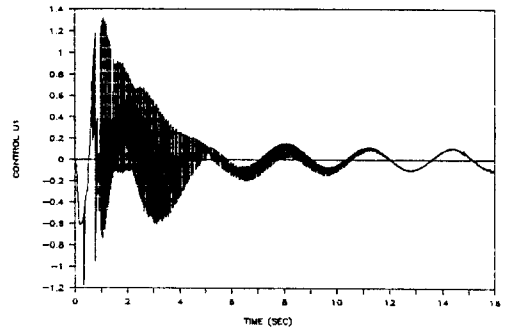


그림 6. 시변 외란에 대한 오차 변수  $e_1$ ,  $e_2$ 의 상태궤적 (알고리즘 I)

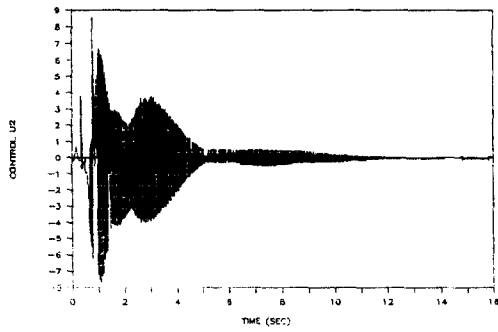


그림 8. 시변 외란에 대한 가변구조제어이론에서의 불연속지 제어입력  $u_2$ (알고리즘 I)

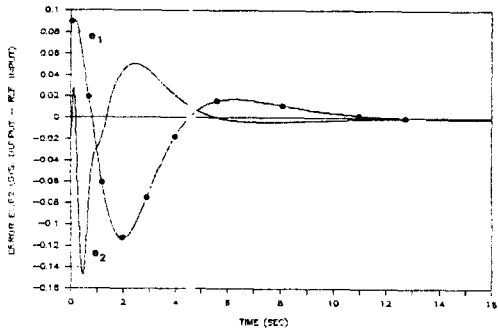


그림 9. 시변 외란에 대한 오차 변수  $e_1, e_2$ 의 상태궤적 (알고리즘 II)

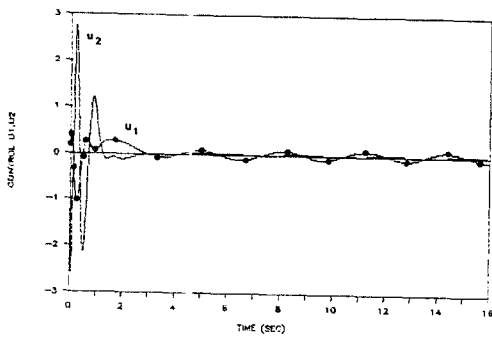


그림 10. 시변 외란에 대한 제안된 기법에 의한 연속지 제어입력  $u_1, u_2$ (알고리즘 II)

계통이 슬라이딩 모드내에 있을 때 계통의 고유치가  $-3 \pm j2$  와  $-5 \pm j3.8$ 이 되도록 식 (5-5)와 (5-11)의 스위칭 평면을 도입한 결과 외란이 존재함에도 불구하고 계통의 출력과 기준입력의 차인 오차가 안정하게 0으로 수렴하는 것을 볼 수 있다.

위 그림과 같은 응답을 얻기 위해서 알고리즘 I에서는 표 1, 2에서와 같이 16개의 스위칭 이득을 결정해야 한다. 그러나 스위칭 이득값은 유일하지 않기 때문에 만일 지금의 응답이 마음에 들지 않으면

스위칭 이득값을 다시 조정해야 한다. 이때 어떤 이득을 어떻게 조정해야 할 것인지에 대한 해석적인 방법이 없으며 다만 시뮬레이션에 의하여 결정할 수가 없다. 따라서 이 설계 방법은 계통의 크면서 클수록 이득동조는 더욱 어려워진다. 반면에 크면서 큰 논문에서 제시한 새로운 설계 방법인 II에서는 이득이 입력수만큼만 필요하다. 본 연구에서는  $\gamma_1$  과  $\gamma_2$ 를 조정함으로써 응답을 쉽게 조정할 수 있다. 응답의 수렴속성은 고유치가 보다 수렴속성이 빨라질수록 더욱 커진다. 그러나 수렴속성이 빨라질수록 초기입력값이 커지는 경향이 있으므로 이 점을 고려해서 고유치를 선정해야 한다.

그림 2, 3, 7, 8은 알고리즘 I에 대해 설계한 제어계통의 제어입력신호를 나타낸 것이다. 제어입력은 불연속이며 심한 진동현상을 갖고 있다. 이러한 진동현상은 무시된 고주파 동특성을 여기하여 계통의 안정도에 나쁜 영향을 준다.

그림 5, 10은 알고리즘 II로 부터 얻은 제어입력신호를 나타낸다. 앞에서 언급했던 것처럼 제어입력은 연속이며 입력 및 상태궤적에 진동현상이 거의 없다.  $\gamma$  값을 더욱 크게 하면 식 (4-2)에 의해 스위칭 함수 S가 더욱 빨리 0으로 접근하나 반면에 초기입력값이 커지며 상태궤적들의 오우버슈팅이 증가하는 경향이 있으므로 이 점을 고려해서  $\gamma$  값을 선정해야 한다.

## 6. 결론

본 논문에서는 선형 다중 입력 계통에 시변 외란이 존재할 때 계통의 출력이 기준입력을 추종하도록 제어를 설계하였다. 일반적으로 다변수 계통에 VSS이론을 적용하기 위해서는 이득의 선정 및 출력신호에 고주파 진동현상이 나타나는 단점을 갖고 있다. 또한 계통에 외란이 존재하게 되면 원점 부근의 스위칭 평면에서 슬라이딩 모드가 무너져 계통이 불안정하게 되거나 정상상태 오차가 넘겨져 되는 등 여러가지 바람직하지 못한 현상을 나타낸다. 이와 같은 현상을 제거하기 위해 본 논문에서는 계통에 외란이 존재할 때 상태관측기를 사용하여 계통의 출력에 기준입력을 추종하도록 스위칭 로직 대신 스위칭 동태방정식을 사용한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. VSS이론의 불연속 제어입력에 비해서 본 알고리즘의 제어입력은 연속이기 때문에 계통의 출력에 고주파 진동현상이 없다.
2. 본 논문의 제어 알고리즘에는 스위칭 논리가 없기 때문에 제어 계통의 물리적 실현이 가능하다.
3. 본 방법에서는 결정해야 할 이득이 입력수만큼 필요하며 기존의 VSS이론에서의 스위칭 이득에 비하면 그 수가 훨씬 적어 이득 동조가 쉽다.

## 7. 참고 문헌

- [1] Utkin, V.I., " Compensation for the Forced -Component of Motion in VS Systems"
- [2] Utkin, V.I., " Qusai-Invariant Control of Forced Motion on Linear Plants with Variable Parameters ", Engineering Cybernetics, No. 5, pp. 149-154, 1966
- [3] Kwatny, H.G., " On Alternative Methodologies for the Design of Robust Linear Multivariable Regulators ", IEEE Trans. Aut. Contr., Vol.AC, No. 5, 1978
- [4] Davison, E.J., " The Robust Control of a Servomechanism Problem for Linear Time - Invariant Systems ", IEEE Trans. Aut. Contr. Vol.AC-21, No. 1, 1976
- [5] Kwatny, H.G., Young, K.K.D., " Turbine Overspeed Protection Control using the Variable Structure Servomechanism ", IEEE. American Control Conference, pp. wp-3D, 1981

- [6] Calise ,A.J., Raman ,K.V., " A Servo Compensator Design Approach for Variable Structure Systems ", IEEE American Control Conference, pp. 1014-1019, 1982
- [7] Young ,K.D., " A Compensator - based Approach to Variable Structure Servomechanism Design ", IEEE American Control Conference,pp.1121-1124, 1983
- [8] 박귀태, 곽근평, 김동식, 임형용, " 슬라이딩 모드를 이용한 다변수 계통의 새로운 제어 계통 설계 방법 ", 전기학회논문지 38권 1호, pp.43-50, 1989