

# 저압 수은 방전에서 근사화한 충돌 단면적을 사용한 전자 에너지 분포함수 해석

'89추계학술발표회

89 - 3

The analysis of electron energy distribution function using the approximated collision cross section in the low-pressure mercury discharge

류 명선            이 진우            지 철근

Ryou, Myoungseon Yi, Chinwoo Chee, Cholkon

서울대학교 공과대학 전기공학과

Dept. of Electrical Eng. Seoul National University

## Abstract

The electron energy distribution function in mercury discharge positive columns are calculated numerically from the Boltzmann equation under a set of parameters, such as the electron temperature  $T_e$ , the atomic temperature  $T_w$ , the electron number density  $n_e$ , and the electric field  $E$ . Especially, using the approximation that collision cross sections only depend on the energy, the calculated electron energy distribution function was shown that it falls off rapidly in the high energy tail.

## 1. 서론

방전시 기체는 약 이온화되어 있으며, 전자 에너지 분포는 전자와 중성기체와의 충돌인, 탄성충돌과 비탄성충돌 그리고 전자 상호간의 충돌에 의하여 Maxwellian으로부터 많은 편차를 보이게 된다.

분포함수의 정확도는 수치적으로 해석할때 입력되는 데이터에 크게 의존하게 된다. 전자 에너지 분포함수를 구하기 위하여 문헌으로부터 구한 많은 데이터들이 Boltzmann equation 에 사용 되었다.

본 논문에서는 방전 변수들 — 전자온도  $T_e$ , 수은의 관벽온도  $T_w$ , 전자밀도  $n_e$ , 수은의 밀도

$N$  — 을 입력으로 하여 충돌단면적을 에너지의 함수로 근사화하였다. 근사화한 충돌 단면적을 사용하여 Boltzmann equation 을 해석함으로써 전자에너지 분포함수를 구하려 한다.

## 2. 저압수은 방전의 모델링

일반적인 분포함수는 아래와 같은 식에서 구할수 있다.

$$\frac{df}{dt} + \nabla_r \cdot \vec{v} f + \nabla_v \cdot \frac{e\vec{E} f}{m} = C(f) \quad (1)$$

### 1) Homogenous Boltzmann equation

(1)식으로부터 전계가 일정하고 공간적인 영향을 받지않는 전자에너지 분포함수는 다음과 같은 식으로 유도될 수 있다.

$$\frac{d}{du} \left[ H(u) \frac{df}{du} f(u) + J(u) f(u) \right] = C(f) \quad (2)$$

무차원(dimensionless)의 에너지

$$u \left[ = \frac{\epsilon}{k \cdot T_e} \right] \text{를 정의하면,}$$

( 이때  $k$ 는 Boltzmann constant 이다.)

$$\begin{aligned} H(u) = & \frac{e^2 E^2 u}{3 N Q_m(u) (k T_e)^2} \\ & + \frac{2m}{M} \frac{T_w}{T_e} u^2 N Q_m(u) \\ & + 3 n_e Q_{ee} A_1(u) \end{aligned}$$

$$J(u) = \frac{2m}{M} u^2 N Q_m(u) + 3 n_e Q_{ee} A_2(u)$$

$$Q_{ee} = 6\pi \left( \frac{e^2}{12\pi\epsilon_0 k T_e} \right)^2 \ln \left( \frac{12\pi(\epsilon_0 k T_e)^{3/2}}{n_e^{1/2} e^3} \right)$$

$$A_1(u) = \frac{4\pi}{3n_e} \left( \frac{2kT_e}{m} \right)^{3/2} \left\{ \int_0^u u^{3/2} f(u) du + u^{3/2} \int_u^\infty f(u) du \right\}$$

$$A_2(u) = \frac{2\pi}{n_e} \left( \frac{2kT_e}{m} \right)^{3/2} \int_0^u u^{1/2} f(u) du$$

- m : 전자의 질량
- M : 원자의 질량
- $\epsilon_0$  : 진공의 유전율
- $Q_m$  : 전자와 원자간의  
운동량 전달 단면적
- $Q_{ee}$  : 전자간의 충돌 단면적
- $C(f)$  : 충돌항

Homogenous Boltzmann equation 은 Coulomb collision 적분에 대한 가정을 사용하여 선형화시켜 간략화할수 있다.

즉,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \left\{ \int_0^u u^{3/2} f(u) du + u^{3/2} \int_0^\infty f(u) du \right\} \\ & \approx \frac{1}{2} \int_0^u u^{1/2} f(u) du \\ & \approx 0.385 \times \frac{u}{2\bar{u}} \quad \text{for } u < 1.5 \bar{u} \\ & \approx 0.5 \quad \text{for } u > 1.5 \bar{u} \end{aligned}$$

이때 평균 에너지  $\bar{u}$  는 초기에 설정되어지며 이러한 근사는 분포함수의 15% 이내의 오차를 포함하게된다.

$f(u)$ 의 normalization condition 은

$$2\pi \left\{ \frac{2ekT_e}{m} \right\}^{3/2} \int_0^\infty u^{1/2} f(u) du = N_e \quad (3)$$

이다.

## 2) 충돌단면적의 근사화

### ① Momentum transfer cross section

다른 기존의 논문에서 유도된 자료를 토대로 하여서 운동량 전달 단면적은

$$u \leq 0.6 \\ Q_m(u) = 2.3 \times 10^{-17} x e^{5(u-0.3)}$$

$$0.6 < u \leq u_{12} \\ Q_m(u) = 2.3 \times 10^{-17} x e^{(-5(u-u_{12}))/u_{12}}$$

$$u > u_{12} \\ Q_m(u) = 2.3 \times 10^{-17} x e^{(1/u)}$$

위와 같이 에너지의 함수로 표현하였다.

### ② Inelastic cross section

여기와 전리의 충돌 단면적은 에너지의 함수로 근사화하였으며, 여기에 대한 충돌 단면적과 전리에 대한 충돌단면적에 대해서 식 (4) 와 (5) 를 사용하였다.

$$Q_{ex}(u) = a_1 (u - u_0) e^{-(u-u_0)} \quad (4)$$

$$Q_{ion}(u) = a_2 \frac{(u - u_0)}{u^{1.5}} \quad (5)$$

$u_0$  는 임계 에너지를 나타낸다.

식 (4) 로 표현된 근사식은 전자에너지가 증가함에 따라 최대값에 도달한 후 완만한 감소를 나타내는 충돌단면적을 위한 것이고 식 (5) 는 급격한 감소를 나타내는 경우에 해당된다.

크기를 결정하는 상수 a 는 충돌 단면적의 최대값과 임계 에너지 부근에서의 변화가 기존의 데이터에 근사하도록 주어졌다.

수치해석을 위하여 식 (2) 를 식 (6) 으로 재구성하였다.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{du} \left\{ H(u) \frac{df}{du}(u) + G(u) f(u) \right\} \\ & = Nu Q_{in}(u) f(u) \quad (6) \end{aligned}$$

이때,

$$\begin{aligned} u \leq u_{12} \quad Q_{in}(u) &= 0 \\ u \geq u_{12} \quad Q_{in}(u) &= Q_{ion}(u) + Q_{ex}(u) \end{aligned}$$

로 하여 분포함수를 구함에 있어서 최초의 비탄성 에너지  $u_{12}$  보다 작은 에너지일 경우 탄성충돌과 비교하여 모든 비탄성 process 는 무시할 수 있다고 가정하였다.

### 3. 구성된 방정식의 해

#### 1) 탄성충돌 영역에서의 해

$u \leq u_{12}$  인 영역에서 비탄성충돌 단면적은 0 이 되므로 식 (6) 을  $u$  에 대해서 적분을 하면 식 (7) 이 된다.

$$H(u) \frac{df}{du}(u) + G(u)f(u) = K_1 \quad (7)$$

식 (7) 과 같은 미분방정식의 해는

$$f(u) = J(u) \left[ K_2 + K_1 \int_0^u \frac{dy}{H(y)J(y)} \right] \quad (8)$$

$$J(u) = \exp \left[ - \int_0^u \frac{G(x)}{H(x)} dx \right]$$

이며  $K_2$  는 상수이다.

식 (7) 에서  $u=0$  일때  $\frac{df}{du}$  의 값을  $-f(0)$

로 대신하면 식 (8) 은 아래와 같이 된다.

$$f(u) = K_2 I(u) \quad (9)$$

$$I(u) = J(u) \left[ 1 + \frac{G(0) - H(0)}{H(0)} \int_0^u \frac{dy}{H(y)J(y)} \right]$$

#### 2) 비탄성 충돌 영역에서의 해

$u > u_{12}$  일 경우 식 (6) 의 우변이 0 이 되지 않으므로  $x$  에서  $\infty$  까지 적분하면

$$\begin{aligned} H(x) \frac{df}{dx}(x) + G(x)f(x) \\ = - \int_x^\infty Nu Q_{in}(u) f(u) du \end{aligned} \quad (10)$$

이때의 경계조건은  $u \rightarrow \infty \quad f(u) \rightarrow 0$   
 $\frac{df}{du} \rightarrow 0$  이다.

식 (10) 을 수치적인 해를 얻기 쉽게 하기 위하여 적당한 미분방정식의 형태로 고치면

$$\begin{aligned} f(u) = f(u_{12}) \exp \left\{ - \int_{u_{12}}^u \frac{G(x)}{H(x)} dx \right. \\ \left. - \int_{u_{12}}^u \left[ \frac{1}{H(x)f(x)} \int_x^\infty Nu Q_{in}(y) f(y) dy \right] dx \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

이 되며  $f(u_{12})$  는 식 (9) 에서  $u=u_{12}$  일 경우의 값이다.

### 4. 수치해석 결과

#### 1) 해석방법

식 (9) 와 (11) 의 수치해석 해는 입력변수에 의존하므로 변수의 값을 변화하며 해석하였다. 또한 수은의 포화 증기압 밀도는 Wall Temperature 에 의해 변화하게 되므로 근사식을 사용하여

$$\log(N(T_w)) = A_0 + \frac{A_1}{T_w} + A_2 \log(T_w) \quad [m^{-3}]$$

$$A_0 = 3.676 \times 10^4$$

$$A_1 = -3.391 \times 10^3 \quad [m^{-3} \cdot K]$$

$$A_2 = -2.262$$

위와 같은 형태로 표현하여  $T_w$  에 의존하도록 하였다. 식 (11) 에서 사용한  $f(x)$  와  $f(y)$  는 Maxwellian 을 가정하여  $f(u)$  를 얻기 위하여  $\infty$  인 에너지를 임계 전리 에너지 값의 세배인  $u_{max}$  로 정의 하여 Composite Simpson 적분법을 사용하여 적분하였다.

2) 결과

입력변수에 의한 전자에너지 분포함수는 그림 1. 에서 그림 6. 에 나타내었다.

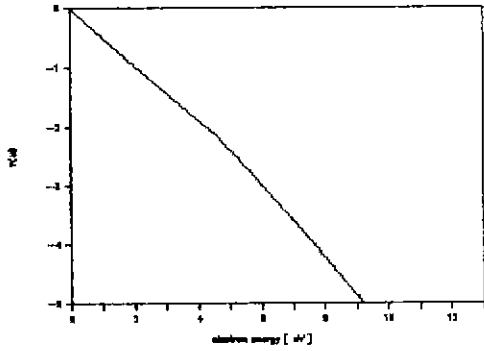


그림 1.  $T_e = 10000$  [K]  
 $n_e = 4 \times 10^{-17}$  [ $m^{-3}$ ]  
 $T_w = 300$  [K]  
 $E = 80$  [V/m]

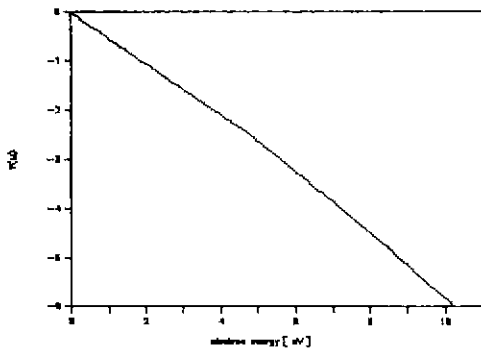


그림 2.  $T_e = 10000$  [K]  
 $n_e = 4 \times 10^{-17}$  [ $m^{-3}$ ]  
 $T_w = 300$  [K]  
 $E = 90$  [V/m]

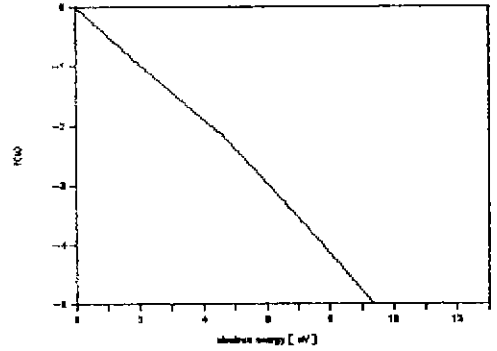


그림 3.  $T_e = 10000$  [K]  
 $n_e = 4 \times 10^{-17}$  [ $m^{-3}$ ]  
 $T_w = 300$  [K]  
 $E = 100$  [V/m]

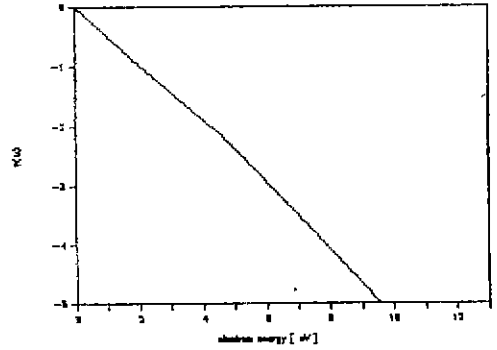


그림 4.  $T_e = 10000$  [K]  
 $n_e = 4 \times 10^{-17}$  [ $m^{-3}$ ]  
 $T_w = 300$  [K]  
 $E = 120$  [V/m]

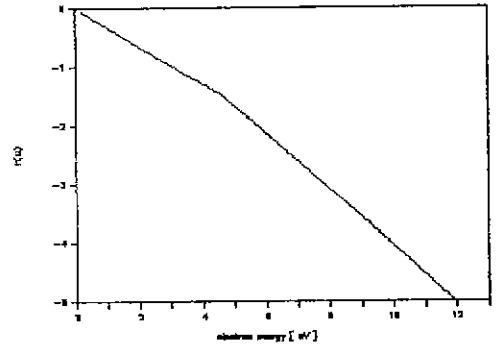


그림 5.  $T_e = 20000$  [K]  
 $n_e = 4 \times 10^{-17}$  [ $m^{-3}$ ]  
 $T_w = 300$  [K]  
 $E = 150$  [V/m]

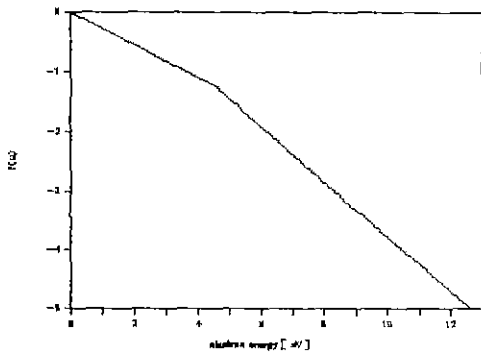


그림 6.  $T_e = 15000$  [K]  
 $n_e = 4 \times 10^{-17}$  [ $m^{-3}$ ]  
 $T_w = 300$  [K]  
 $E = 150$  [V/m]

### 5. 결론

그림에서 보는 바와 같이 전자에너지 분포함수는 에너지가 낮은 부분(body)과 높은 부분(tail)의 기울기가 서로 다름을 알수있다. 특히, 전자의 온도가 올라갈수록 body 부분의 기울기에 비해 꼬리 부분에서의 기울기가 더 급격한 것을 보여주고 있다.

### 참고 문헌

[1] H.T. Saelee : Electron energy distribution in Hg discharge, J. Phys.D : Appl. Phys. 15. p.873 (1982)

[2] J. Vloek and V. Pelikan : Electron energy distribution in the collisional radiative model of an argon plasma, J. Phys.D : Appl. Phys. 18. p.347 (1985)

[3] 여 인선 : 입자및 에너지 평형식을 사용한 저압 수은-아르곤 방전의 해석적 모델, 박사학위 논문, 서울대 (1989)

[4] T. Holstein : Energy distribution of electrons in high frequency gas discharges, Phys. Rev. 70. p.367 (1946)

[5] H. Margenau : Conduction and dispersion of ionized gases at high frequencies, Phys. Rev. 69. p.508 (1946)

[6] Stephen D. Rockwood : Elastic and inelastic cross sections for electron-Hg scattering from Hg transport data, Phys. Rev. A.8. p.2348 (1973)

[7] Yu.B.Golubovskii, Yu.M. Kagan, and K.I. Lyagushchenko : Distribution of energy and mobility of electrons in gases and semiconductors, Soviet phy. JETP 30. p.1204 (1970)

[8] B.E. Cherrington : Gaseous electronics and gas lasers, Pergamon (1979)

[9] H.S.W. Massey, E.W. Maodaniel, and B. Bederson : Applied atomic collision physics v.5 (1982)