

## 주파수 영역에서의 Ritz 모드 중첩법

### Ritz Mode Superposition Method in Frequency Domain

주 관 정(\*)  
Joo, Kuan Jung

#### ABSTRACT

According to the Rayleigh-Ritz approximation method, a solution can be represented as a finite series consisting of space-dependent functions, which satisfy all the geometric boundary conditions of the problem and appropriate smoothness requirement in the interior of the domain. In this paper, an efficient formulation for solving structural dynamics systems in frequency domain is presented. A general procedure called Ritz modes (or vectors) generation algorithm is used to generate the admissible functions, i.e. Ritz modes. Then, the use of direct superposition of the Ritz modes is utilized to reduce the size of the problem in spatial dimension via geometric coordinates projection. For the reduced system, the frequency domain approach is applied. Finally, a numerical example is presented to illustrate the effectiveness of the proposed method.

#### 1. 서 론

시간에 존속하는 문제들(rate problems)에 대해 유한요소법(finite element method)나 유한차분법(finite difference method)을 적용하여 풀려면, 결국은 규모가 큰 미분방정식 시스템을 적분하는 문제로 귀결된다. 이와 같은 문제들은 동력학적 구조해석문제 뿐만 아니라, 파형의 전파에 관련된 문제, 열 또는 유체의 흐름에 관한 문제등과 같은 응용과학 문제들의 해를 구할 때에도 직면하게 된다. 기구의 동력학적인 문제들에 대한 편분할 시스템(partial discrete system)은 다음과 같이 시간에 대한 2차 미분시스템으로 표현될 수 있다 [1].

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = p \quad (1.1)$$

동력학적 구조 시스템의 경우 위식에서  $M$ 과  $K$ 는, 각각 질량과 강도를 의미하는 매트릭스로서, 일반적으로,  $N \times N$  대칭 매트릭스이고 시간에 불변한다.  $C$ 는 점성(viscosity)을 나타내는 댐핑(damping) 매트릭스이다.  $p$ 는 시간의 함수인데 공간의 위치에 따라 분포를 갖는 함수  $f(s)$ 와 시간의 함수  $g(t)$ 로 분리될 수 있다. 즉  $p(s,t) = f(s)g(t)$ . 식(1.1)을 푸는 방법은 크게 2가지로 분류할 수 있다. 직접 시간 적분법(direct step-by-step time integration method)과 모드 중첩법(mode superposition method)으로 분류할 수 있는데, 두 방법들은 장, 단점들이 있다. 직접 적분법은 비선형 문제를 풀 때 적합하지만, 적분시간이 경과함에 따라, 응답(response)의 크기를 감소시키는 '알고리

즘에 의한 댐핑'(spurious algorithmic damping)의 영향과 주기(period)를 증가시키는 문제점등을 안고있다. 이러한 불안정 영역 문제일수록 심해진다. Implicit 수치 해석 방법을 사용하면 적분시간 구간을 크게 늘릴 수 있으나, 이런 경우에는 고주파 성분(high frequency mode)의 영향을 포착해 낼 수 없게 되는 단점이 있다. 모드 중첩법에서는 해는 서로 독립적인 모드 성분들로 중첩되어 있다고 가정된다. 과거에는 모드를 계산할 때 고유치 문제(eigenvalue problem)를 풀어야 했으므로 모드 중첩법은 작은 문제에만 적용 했으나, 최근에는 간단한 순환방법(iterative method)으로 Ritz 모드(또는 Ritz 벡터)를 계산하고 이들을 이용해서 시스템의 크기를 작게하여 시간적분법을 적용하거나 축소된 시스템에 대해 모드 중첩법을 적용하는 방법이 사용 되었다[1,2].

본 논문에서는, 시간 존속문제들을 주파수 영역에서 Ritz 모드의 중첩을 응용하는 방법을 제시한다. 시스템의 크기를 줄이기 위해 기하학적 좌표변환(geometric coordinate transformation)을 행하게 되는데, 이 과정에서 질량 매트릭스에 대해 단위 직교성(mass orthonormality)을 갖는 Ritz 모드를 기본(basis)으로 이용하고, 축소된 시스템에 대해 고유치문제를 풀어 강도매트릭스와 질량 매트릭스 모두에 대해 직교성을 갖는 Ritz 모드를 계산해서 해를 구한다. 응용예제로서, 하모닉(harmonic)하중 하에 있는 2차원 연속체에 대한 동력학적 해를 구하는 문제를 통해 재래의 방법인 고유 모드(eigen mode)를 사용한 결과와 수렴도를 비교한다. Ritz 모드들은 동력학적 응답의 원인이 되는 입력 source의 영향을 반영하는 pattern으로서 그림1에 예시되어 있다.

(\*)정회원 三星電機 종합연구소 CAD/CAM실장

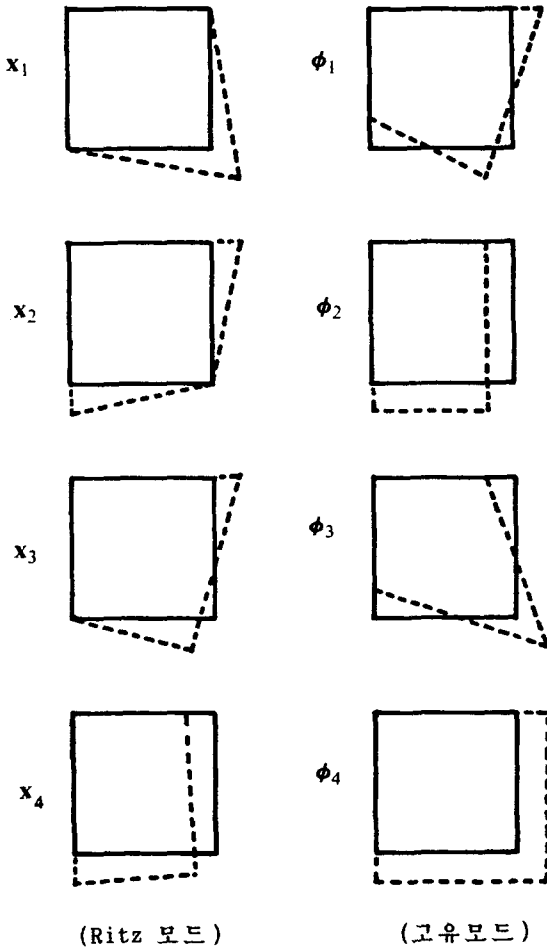
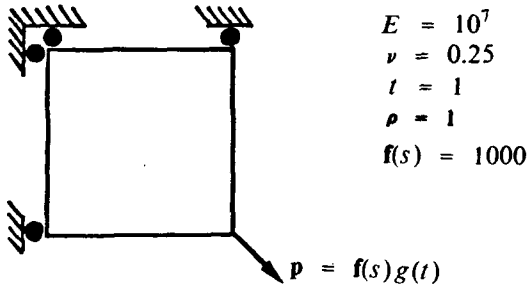


그림 1. Ritz 모드와 고유모드의 형상 (lumped 질량 이용 했음)

## 2. 주파수 영역 방법

주파수 영역 해석 방법에 있어서 기본 원리는, 하모닉 진동 하중 하에서 정상상태(steady state)의 응답은, 그 진동 하중의 주파수를 갖는 하모닉 응답함수로 표현된다는 것이다.

가령, 시간 영역에서의 하중이 다음과 같다면,

$$p(t) = \hat{p}(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} \quad (2.1)$$

그 정상상태의 응답도 역시, 같은 주파수를 갖는 다음과 같은 함수로 된다.

$$u(t) = \hat{u}(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} \quad (2.2)$$

여기서,  $i$  는  $\sqrt{-1}$  을 나타내며,  $\bar{\omega} (=2\pi f; f$ 는 주파수)는 하중의 각속도를 의미한다.  $\hat{p}(\bar{\omega})$ 와  $\hat{u}(\bar{\omega})$ 는 Fourier 변환에 의해 시간 영역의 함수로부터 계산된다.

$$\hat{p}(\bar{\omega}) = FT(p(t)) \quad (2.3)$$

$$\hat{u}(\bar{\omega}) = FT(u(t)) \quad (2.4)$$

FT 는 forward Fourier 변환을 의미하며, 아래와 같이 정의된다.

$$FT(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cdot) e^{i\bar{\omega}t} dt \quad (2.5)$$

실제 계산시에는, Fourier 적분은 분할구간형태(Riemann sum)로 계산되는데 이를 분할 Fourier 변환이라 부른다. 예로서, 시간 영역을 0 부터  $2\pi$  까지의 영역을 갖는 원으로 본다면, 그 원을  $M$ 개의 노드(또는 분할점)로 분할했을때 그 분할된 시간영역(discrete time domain)에서 정의된 시간함수  $f(t)$ 를 생각해 보면, Fourier 변환은 다음과같이 계산된다.

$$\hat{f}(\bar{\omega}_j) = FT(f(t_k)) \quad (2.6a)$$

$$= \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t_k \in C_t} f(t_k) e^{i\bar{\omega}_j t_k} \quad (2.6b)$$

$$\Delta t = 2 \frac{\pi}{M}$$

$$\bar{\omega}_j = j \Delta \bar{\omega} \in C_{\bar{\omega}}$$

$$0 \leq k, j \leq M-1$$

윗식에서  $C_t$ 는 분할된 시간영역을 나타내며,  $C_{\bar{\omega}}$ 는  $\bar{\omega}_j$ 의 영역 즉, 분할 주파수 영역을 의미한다.  $M$ 이 2의 제승일경우, 식(2.6)의 특이한 구조와 대칭성을 고려하여 FFT(fast Fourier transformation)를 이용한다.

식(2.3)과(2.4)를 식(1.1)에 대입하면,

$$I(\bar{\omega}) \hat{u}(\bar{\omega}) = \hat{p}(\bar{\omega}) \quad (2.7)$$

를 얻는다.  $I(\bar{\omega})$ 는 복소수 강도 매트릭스로서 다음과 같이 정의된다.

$$I(\bar{\omega}) = [-\bar{\omega}^2 M + i\bar{\omega} C + K] \quad (2.8)$$

식(2.7)을 풀기 위해서는 복소수 강도 매트릭스  $\mathbf{I}(\bar{\omega})$ 의  $L(\bar{\omega})\mathbf{D}(\bar{\omega})L(\bar{\omega})$  (또는  $L(\bar{\omega})\mathbf{U}(\bar{\omega})$ ) 분해 등이 이용되는데, 계산 시간이 오래 걸린다. 자유도가 많은 시스템의 경우 계산시간이 치명적인 단점이 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 본 논문에서는 Ritz 모드를 이용한다(참조:표1). 시간 영역에서 필요한 갯수(편의상  $L$ 개라고 하면)의 질량 단위 직교성(mass orthonormality)있는 Ritz 모드를 계산하고 이들을 이용하여 시스템을  $L \times L$  시스템으로 축소시키고, 축소된 시스템의 특성벡터 방정식(참조:표1)을 일반적으로 계수 매트릭스  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ 는 시간( $t$ ), 주파수( $f$ ), 해( $\mathbf{u}$ )의 변화에 변하지 않으므로, 연관된(coupled) 시스템(식(2.7))을 모달좌표(modal coordinate)로 용이하게 변환시킬수 있다. 그 모달 좌표 변환을 다음과 같이 표현 한다면,

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{X}\mathbf{z} \quad (2.9)$$

식(2.7)은  $L \times L$  연관된 시스템으로 축소된다.

$$\mathbf{I}^*(\bar{\omega})\mathbf{z}(\bar{\omega}) = \hat{\mathbf{p}}^*(\bar{\omega}) \quad (2.10)$$

여기서,

$$\mathbf{I}^*(\bar{\omega}) = \mathbf{X}^T \mathbf{I}(\bar{\omega}) \mathbf{X} \quad (2.11)$$

$$\hat{\mathbf{p}}^*(\bar{\omega}) = \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{p}}(\bar{\omega}) \quad (2.12)$$

변환된 basis 즉  $\mathbf{z}$  를 다시 또 다른 basis 로 변환하면,

$$\mathbf{z} = \Phi_2 \hat{\mathbf{y}} \quad (2.13)$$

식(2.10)은  $L$ 개의 비연관성(uncoupled) 스칼라 방정식으로 분해될 수 있다.  $\Phi_2$  는 축소된  $L \times L$  시스템의 특성벡터(eigenvectors)이며, 직교성이 있다.

$$\Phi_2^T \Phi_2 = \mathbf{I} \quad (2.14)$$

여기서,

$$\Phi_2 = [ \Phi_{z_1} \ \Phi_{z_2} \ \dots \ \Phi_{z_L} ] \quad (2.15)$$

$\mathbf{I}$  는  $L \times L$  항등 매트릭스(identity matrix)를 나타낸다. 분해된 방정식들은 다음 형태가 된다.

$$I_i^*(\bar{\omega}) \hat{y}_i(\bar{\omega}) = \hat{p}_i^*(\bar{\omega}), \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (2.16)$$

여기서,

$$I_i^*(\bar{\omega}) = (-\bar{\omega}^2 + i\alpha\bar{\omega}) + (i\bar{\omega}\beta + 1)\bar{\omega}_i^2 \quad (2.17)$$

$$\bar{\omega}_i^2 = \Phi_{z_i}^T \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} \Phi_{z_i} \quad (2.18)$$

$$\hat{p}_i^*(\bar{\omega}) = \Phi_{z_i}^T \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{p}}(\bar{\omega}) \quad (2.19)$$

식에서,  $\alpha$  와  $\beta$  는 Rayleigh Damping 계수다  $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$ . 만일 Rayleigh damping 이 아

닌 경우는 (즉  $\mathbf{C}$  가  $\mathbf{M}$  과  $\mathbf{K}$  의 선형조합이 아닌 경우) 식(1.1)을 아래와 같이 변환시킨 후 위의 방법을 적용한다.

$$\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{d} \quad (2.20)$$

여기서,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.21b)$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (2.21c)$$

윗 경우의 Ritz 벡터 계산 알고리즘은 참고 문헌 [3]을 참조바란다. 식(2.20)을  $2L \times 2L$  로 축소시키면 이 경우 특성치(eigenvalues)는 다음형태로 나타낸다.

$$\tilde{\Lambda} = \text{diag}(\tilde{\mathbf{J}}_1, \tilde{\mathbf{J}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{J}}_q) \quad (2.22)$$

여기서  $\tilde{\mathbf{J}}_i$  는  $m_i \times m_i$  Jordan block을 나타낸다. [4]. 이 Jordan 블록은

$$\tilde{\mathbf{J}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}_i & 1 & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \tilde{\Lambda}_i \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

의 형태로 주워지며,  $m_1 + \dots + m_q = 2L$  이 된다. 식(2.9)부터 식(2.19)까지의 과정을 따르면, 축소된  $2L \times 2L$  시스템의  $i$ 번째 Jordan 블록 즉  $\tilde{\mathbf{J}}_i$  , 에 대한 분해된 스칼라 방정식들은 다음과 같다.

$$(i\bar{\omega} + \tilde{\Lambda}_i) \hat{y}_j(\bar{\omega}) + \hat{y}_{j+1}(\bar{\omega}) = \hat{p}_j^*(\bar{\omega}), \quad (2.24a)$$

$$j = m_i + 1, \dots, m_i - 1$$

$$(i\bar{\omega} + \tilde{\Lambda}_i) \hat{y}_j(\bar{\omega}) = \hat{p}_j^*(\bar{\omega}), \quad j = m_i \quad (2.24b)$$

여기서,

$$\hat{p}_j^*(\bar{\omega}) = \Phi_{z_j}^T \hat{\mathbf{p}}^*(\bar{\omega}) \quad (2.25)$$

$\Phi_{z_j}$  는 축소된 시스템의  $j$  번째 특성벡터이다. 이론전개의 복잡성을 피하기 위해, 다시 Rayleigh damping 의 경우로 되돌아 가면, 시간 영역의 해는 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{X} \Phi_2 \mathbf{y}(t) \quad (2.26a)$$

$$= \mathbf{X} \Phi_2 \text{IFT}(\hat{\mathbf{y}}(\bar{\omega})) \quad (2.26b)$$

$$= \mathbf{X} \Phi_2 \text{IFT}(\mathbf{D}(\bar{\omega})^{-1} \Phi_2^T \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{p}}(\bar{\omega})) \quad (2.26c)$$

여기서,  $\mathbf{D}(\bar{\omega})$ 는  $L \times L$  대각 매트릭스(diagonal matrix)이며 아래와 같이 계산되어 진다.

$$\mathbf{D}(\bar{\omega}) = \Phi_2 \mathbf{X}^T \mathbf{I}(\bar{\omega}) \mathbf{X} \Phi_2 \quad (2.27a)$$

$$= \text{diag}(\mathbf{I}_1^*(\bar{\omega}), \dots, \mathbf{I}_L^*(\bar{\omega})) \quad (2.27b)$$

IFT는 역 Fourier 변환(inverse Fourier transformation)을 나타내며 다음과 같이 정의된다.

$$\text{IFT}(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cdot) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} \quad (2.28)$$

위의 IFT의 적분은 식(2.6)의 경우처럼 계산한다.

$$f(t_k) = \text{IFT}(f(\bar{\omega}_j)) \quad (2.29a)$$

$$= \frac{\Delta\bar{\omega}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\bar{\omega}_j \in C_a} \hat{f}(\bar{\omega}_j) e^{-i\bar{\omega}_j t_k} \quad (2.29b)$$

여기서도 FFT를 적용한다.

표1. Ritz 모드(벡터)생성 알고리즘

Solve  $\mathbf{K} \mathbf{u}_1 = \mathbf{f}$

$\mathbf{M}$ -normalize  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}_1 / \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{M}}$

Calculate additional vectors ( $i = 2, \dots, L$ )

$$a_{i-1} = \mathbf{x}_{i-1}^T \mathbf{M} \mathbf{u}_{i-1}$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} - a_{i-1} \mathbf{x}_{i-1}$$

$$\text{Solve } \mathbf{K} \mathbf{x}_i^* = \mathbf{M} \mathbf{u}_i$$

$\mathbf{M}$ -orthogonalize:

For  $j = 1, \dots, i-1$

$$c_j = \mathbf{x}_j^T \mathbf{M} \mathbf{x}_i^*$$

$$\mathbf{x}_i^{*(j+1)} = \mathbf{x}_i^{*(j)} - c_j \mathbf{x}_j$$

$$\mathbf{M}\text{-normalize } \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^{*(i)} / \|\mathbf{x}_i^{*(i)}\|_{\mathbf{M}}$$

이상과 같이 설명된 내용을 요약하면 다음과 같다.

1. 식(1.1)의 계수 매트릭스들과 힘 벡터를 계산한다.
2. 질량에 대해 직교성을 갖는 벡터( $\mathbf{X}$ )를 구한다.(표1)
3.  $\mathbf{u}(t)$ 를  $\mathbf{X} \mathbf{z}(t)$ 로 변환한다(즉, 시스템 크기를 축소한다).
4. 축소된 시스템의 고유치 문제를 푼다.
5.  $\mathbf{z}(t)$ 를  $\Phi_2 \mathbf{y}(t)$ 로 변환한다.
6. 축소된 시스템을 스칼라 식들로 분해한다.
7. 각각의 스칼라 식에 대해서,

$$\hat{p}_i(\bar{\omega}) = \text{FT}(p_i(t)) \quad (2.30)$$

$$y_i(\bar{\omega}) = l_i(\bar{\omega})^{-1} \hat{p}_i(\bar{\omega}) \quad (2.31)$$

$$y_i(t) = \text{IFT}(y_i(\bar{\omega})) \quad (2.32)$$

8. 해를 계산한다.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{X} \Phi_2 \mathbf{y}(t) \quad (2.33)$$

### 3. 예 제

그림2에 예시된 바와 같이 harmonic 하중 하에 있는 평판이 여섯개의 사각형 평면 응력 요소(plane stress)로 모델링되었다. 질량 매트릭스는 consistent 질량 매트릭스의 각 행의 원소의 합을 구함으로써 대각선 매트릭스로 형성됐다. 구조물에 작용하는 하중의 주파수가 단지 1개로서 제시된 주파영역 알고리즘이 효율적으로 사용될수 있다. 구조물의 재료 성질들은

$$E = 10^5$$

$$\nu = 0.25$$

$$\rho = 10$$

이고 평판두께는 0.01로 주워졌다. 점 C의 수직방향 변위성분( $d_c$ )에 대해서 Ritz 모드를 사용했을 때와 특성 벡터를 사용했을 때를 비교하였다. 첫번째 최대 변위는 표2와 같다. Ritz 모드를 사용하면, 가령 5개의 모드를 사용했을 때 이미 특성 벡터를 사용했을 때의 정확도를 얻을 수 있었다. 최대변위를 일으키는 시간의 수렴속도 까지도 이를 반영해 주고있다.

### 4. 결 론

동력학적 구조 시스템의 해를 구하기 위한 효율적인 방법으로서 Ritz 모드는 Rayleigh-Ritz 근사법과 유한요소법을 조합한 것으로서, 각 유한요소 영역에서 정의된 국지 함수(local function)들이 연속성을 유지하며 또한 구조 시스템의 경계조건을 만족하는 전체

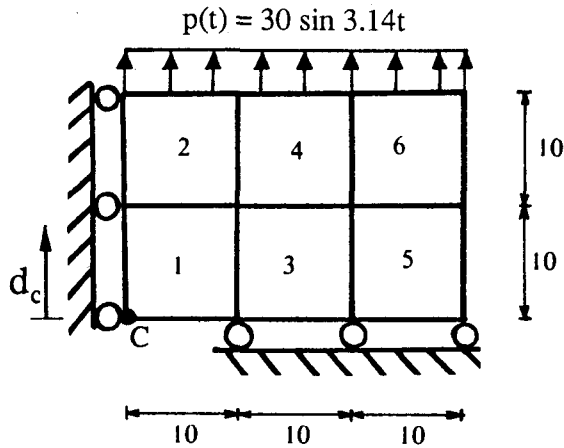


그림 1. Harmonic 하중하의 평판

함수(global function)들의 특성을 지니고 있다.

제시된 주파수 영역 방법은 외부 하중의 스펙트럼을 구성하는 주파수 성분이 적을수록, 댐핑이 큰(over-damped) 구조 시스템일수록 효율성이 높아진다. 더우기, 구조 시스템 이외에도 열응력을 구하는 문제나 전자계 해석 등 장 해석 문제(field problem)에도 적용할 수 있다.

#### 참고 문헌

1. K. J. Joo and E. L. Wilson, "An adaptive finite element method for hyperbolic problems", J. Computational Physics(submitted)
2. K. J. Joo and E. L. Wilson, "Ritz vectors and generation criteria for mode superposition analysis", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 17 (1989)
3. K. J. Joo and W. K. Liu, "A probabilistic approach for structural-acoustic finite element analysis", in Proceedings of the Joint ASME/SES Applied Mechanics and Engineering Sciences Conference, Berkeley, California, 1988, edited by W. K. Liu et al. (American Society of Mechanical Engineers, 1988).
4. G. H. Golub and C. F. Van Loan, Matrix Computations, the Johns Hopkins University press, Baltimore, Maryland (1983)

표 2. 첫번째 최대수직 변위 (d<sub>c</sub>)

모드 갯수	Ritz 모드	시간 (sec)	고유 모드	시간 (sec)
1	0.046676	1.09	0.023428	1.17
2	0.031131	1.22	0.024419	1.16
3	0.047096	1.38	0.058648	1.10
4	0.040272	1.37	0.052173	1.11
5	0.039913	1.38	0.052258	1.11
6	0.039880	1.41	0.042419	1.21
7	0.040173	1.41	0.041976	1.22
8	0.040178	1.41	0.040750	1.26
9	0.040177	1.41	0.040703	1.26
10	0.040177	1.41	0.040240	1.30
11	-	-	0.040268	1.33
12	-	-	0.043517	1.43
13	-	-	0.043498	1.43
14	-	-	0.047192	1.48
15	-	-	0.048220	1.49
16	-	-	0.049692	1.50
17	-	-	0.039975	1.41
18	0.040177	1.41	0.040177	1.41