

자속밀도를 미지변수로 한 2차원 정자장 유한요소 해석

장 우 석 , 한 송 업
 서울대학교 전기공학과

Finite Element Analysis of 2-D Magnetostatic Problem
 using Magnetic flux density as an unknown variable.

Woo-sok Chang, Song-yop Hahn
 Dept. of E.E. Seoul National Univ.

Abstract

When we analyze the magnetostatic problem by the FEM, it is a traditional method to use the magnetic vector potential as an unknown variable. (abbreviated to A Method) Therefore, we should differentiate this magnetic vector potential to get the magnetic flux density. In this procedure of differentiation, the accuracy of the calculation is reduced. In order to overcome this problem, this paper uses the magnetic flux density as an unknown variable. (abbreviated to B Method) The validity of this new method (B Method) to use the magnetic flux density directly as an unknown variable, is ensured as the result of the application example researches.

1. 서론

정자장 문제를 유한요소법을 이용하여 해석함에 있어서, 일반적으로 자기 벡터 포텐셜을 미지변수로 하여 구한다. 따라서 자속밀도를 구하려면 미분과정을 거치게 됨에 따라 계산의 정밀도가 낮아지게 될 수 밖에 없다. 그러나 자속밀도를 직접 미지변수로 하면 미분과정이 불 필요하므로 좀더 정확한 계산을 기대 할 수 있다.

사례연구 결과, 동일한 요소수에서 자속밀도를 직접변수로 한 방법 (이하 B법이라 약칭) 이, 자기 벡터 포텐셜을 변수로 한 기존의 방법 (이하 A법이라 약칭) 보다 우수함이 입증되었다.

2. 지배방정식 및 유한요소법에의 적용

정자장 문제의 지배방정식은 식(1), 식(2)로 표현 된다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{H} = \nu \vec{B} \quad (3)$$

관계식 (3)을 식 (1)에 대입하고 양변에 로테이션 (rotation)을 취하면 식 (4)와 같이 된다.

$$\nabla \times \nabla \times \nu \vec{B} = \nabla \times \vec{J}_s \quad (4)$$

매질계수를 상수로 가정하고, 식 (2)를 식 (4)에 대입 하면 식 (5)로 표현된다.

$$\nabla \times \nabla \times \nu \vec{B} = \nu [\nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}]$$

$$-\nu \nabla^2 \vec{B} = \nabla \times \vec{J}_s \quad (5)$$

2차원 직교 좌표계로 (5)식을 표현하면 식(6), 식(7)과 같이 된다.

$$-\nu \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} B_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} B_x \right] = \frac{\partial J_{zs}}{\partial y} \quad (6)$$

$$-\nu \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} B_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} B_y \right] = -\frac{\partial J_{zs}}{\partial x} \quad (7)$$

갈러킨법을 적용하여 식(6), 식(7)을 유한요소 이산화 시키면 식(8), 식(9)와 같이 표현된다.

$$\nu \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} B_x \right] dx dy - \nu \int_{\Gamma} N_i \frac{\partial}{\partial n} B_x d\Gamma = \iint_{\Omega} N_i \frac{\partial J_{zs}}{\partial y} dx dy \quad (8)$$

$$\nu \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} B_y + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} B_y \right] dx dy - \nu \int_{\Gamma} N_i \frac{\partial}{\partial n} B_y d\Gamma = -\iint_{\Omega} N_i \frac{\partial J_{zs}}{\partial x} dx dy \quad (9)$$

식 (8)과 식 (9)의 좌변 첫째항은 기존의 자기 벡터 포텐셜을 미지변수로 취했을 경우와 동일한 방법으로 처리된다.

3. 경계 적분항 처리 및 전류항 면적적분 처리

3.1 단일매질 일 경우의 경계적분항의 처리

해석영역 전체가 단일매질이라면 자속밀도는 연속이 되므로 요소와요소사이의 경계적분은 상쇄되고 최외각 경계에 대한 적분만 남게 된다. 이때 기존의 방법(A법)과 같이 해석모델의 대칭성등에 의해 인가되는 자연경계조건 및 고정경계조건에 의해 동일한 양식으로 처리 될 수 있다.

3.2 다매질 일 경우의 경계적분항의 처리

그림 (1)과같이 매질이 다른 영역을 서로 분리시키고 차후에 매질과 매질사이의 경계를 결합시킴으로써 전체 영역에 대한 해석을 할 수 있다.

분리된 각 영역의 경계중에 전체영역의 최외각에 해당되는 경계는 단일매질 일 경우의 처리법과 동일하다. 그러나 매질이 다른 영역사이의 경계, 즉 매질경계에 대한 경계적분은 서로 매질이 다른 영역을 결합시키는 역할을 해야 하므로 특수한 처리가 필요하다.

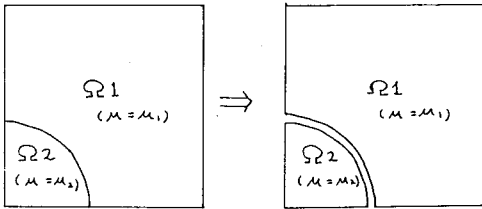


그림 (1) 영역의 분리

3.3 매질이 다른 영역사이의 결합조건식의 도출

매질경계에서 (1)식은 (10)식과 같이 표현된다.

$$\nabla \times (\nu \vec{B}) = \vec{0} \quad (10)$$

원통 좌표계에서 (2)식과 (10)식은 (11)식, (12)식과 같이 된다.

$$B_r + r \frac{\partial}{\partial r} B_r + \frac{\partial}{\partial \phi} B_\phi = 0 \quad (11)$$

$$B_\phi + r \frac{\partial}{\partial r} B_\phi - \frac{\partial}{\partial \phi} B_r = 0 \quad (12)$$

여기서 \hat{s} 방향을 경계에대한 \hat{s} 방향으로, $\hat{\phi}$ 방향을 경계에대한 $\hat{\phi}$ 방향으로 간주하면 (11)식, (12)식은 (13)식, (14)식으로 변형된다.

$$B_n + r \frac{\partial}{\partial n} B_n + \frac{\partial}{\partial t} B_t = 0 \quad (13)$$

$$B_t + r \frac{\partial}{\partial n} B_t - \frac{\partial}{\partial t} B_n = 0 \quad (14)$$

한편 익히 알려진 두 식 (15)식, (16)식은 경계방향으로 편미분하여도 성립하므로 식 (17), 식 (18)도 성립한다.

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (15)$$

$$\nu_1 B_{t1} = \nu_2 B_{t2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{n1} = \frac{\partial}{\partial t} B_{n2} \quad (17)$$

$$\nu_1 \frac{\partial}{\partial t} B_{t1} = \nu_2 \frac{\partial}{\partial t} B_{t2} \quad (18)$$

여기서 첨자 1, 2 는 영역을 나타내고 있다.

(13)식, (14)식과 (17)식, (18)식을 결합하면 다음의 최종적인 두 결합식 (19)식, (20)식이 도출된다.

$$\frac{1}{r} B_{t1} + \frac{\partial}{\partial n} B_{t1} = \frac{1}{r} B_{t2} + \frac{\partial}{\partial n} B_{t2} \quad (19)$$

$$\nu_1 \left[\frac{1}{r} B_{n1} + \frac{\partial}{\partial n} B_{n1} \right] = \nu_2 \left[\frac{1}{r} B_{n2} + \frac{\partial}{\partial n} B_{n2} \right] \quad (20)$$

여기서 r은 곡률반경으로 취한다.

식 (19), 식 (20)을 고려하여 매질 사이의 경계적분을 한다. 즉 각 매질의 매질경계 적분을 할 때 식 (19), 식 (20)을 이용하여 상대 매질의 변수로써 치환한 이후에 계산하면 경계적분과 매질사이의 결합이 동시에 이루어지게 된다.

3.4 전류항 면적적분 처리

그림 (2)와 같이 z 방향으로 Jz 의 전류가 흐르는 도체를 상정할 때 식 (5)에 의해 나타나는 요소행렬은 식 (21)과 같다.

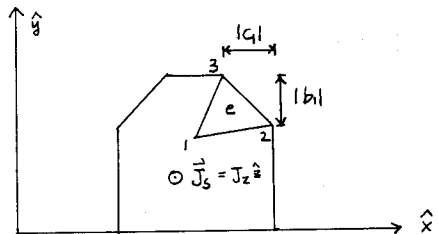


그림 (2) 전류항의 처리

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{|c1|}{2} J_z \\ -\frac{|c1|}{2} J_z \end{bmatrix} \quad (21)$$

4. 사례연구 및 오차검토

4.1 평행도선 전류가 흐를때의 자속밀도 분포문제

그림 (3)과 같이 서로 다른 방향으로 흐르는 도선전류의 문제에서, 자속밀도를 직접변수로 취한 경우에 해석적 해에 대한 상대오차가 3% 이내인 반면, 동일한 요소분할에서 자기 벡터 포텐셜을 변수로 한 방법은 5 - 20%의 상대오차를 나타냄으로써 본 논문이 제안한 방법이 우수함을 알 수 있었다.

이때 식 (8), 식 (9)의 변수가 서로 분리됨으로써 계산기의 기억용량도 기존의 방법과 같다.

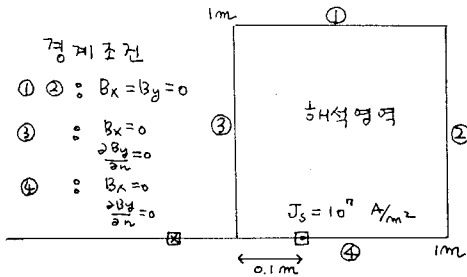


그림 (3) 평행 도선 전류 모델

4.2 평행자장속의 무한원통 자성체의 자속밀도 분포문제

그림 (4)와 같이 평행 자속밀도가 존재하는 공간에 원통의 축 방향이 자속밀도의 방향과 수직으로 자성체가 놓여져 있는 문제에 대한 해석을 시도했다. 자속밀도를 직접변수로 했을 경우의 자속밀도 분포는 그림 (5)와 같다. 자속밀도가 급격히 변하는 자성체와 공기사이의 경계주위에 대한 오차를 검토했다. 양의 x 축에 대한 각도에 대해, 자속밀도를 직접 미지변수로 택한 경우와 기존의 자기 벡터 포텐셜을 미지변수로 택한 경우, 각각에 있어서 해석적 해와의 상대 오차를 그림 (6), 그림 (7)에 나타냈다. 그림 (6), 그림 (7)은 각각 공기영역과 자성체 영역의 원주 경계를 따라 계산한 오차분포이다. 이때 요소분할은 동일했다. 비교적 기존의 방법보다 본 논문에서 제안한 방법이 우수함을 알 수 있다. 그러나 식(8), 식(9)의 변수가 매질사이의 경계에서 서로 결합되므로 기억용량면에서는 불리하다고 하겠다.

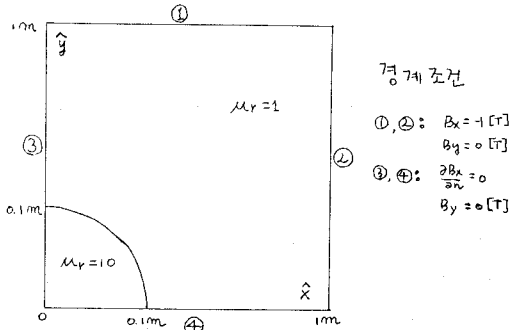


그림 (4) 평행 자장 속의 무한 원통 자성체 모델

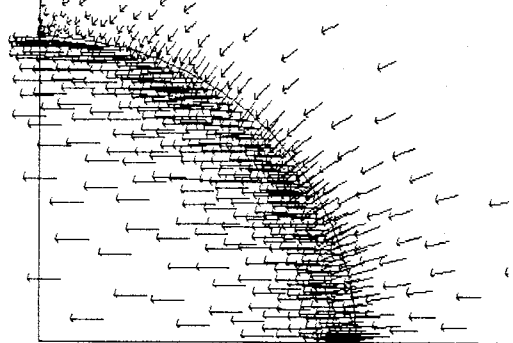


그림 (5) B 법에 의해 계산된 자속 밀도 분포
 Error along Circumference in Air

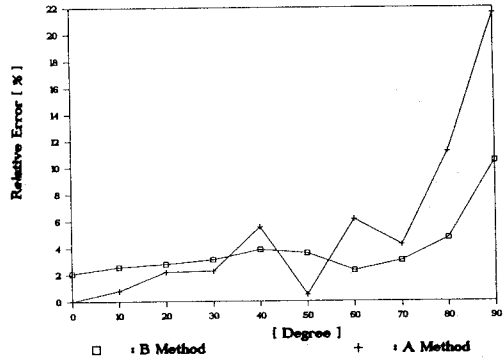


그림 (6) 공기 영역의 원주 경계를 따라 계산한 B 법과 A 법의 오차 분포
 Error along Circumference in Magnetic Material

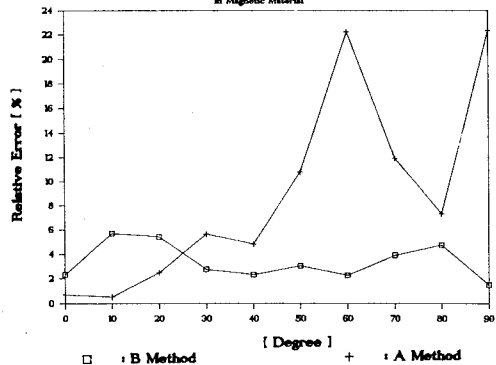


그림 (7) 자성체 영역의 원주 경계를 따라 계산한 B 법과 A 법의 오차분포

5. 결론

단일매질 문제의 경우 자기 벡터 포텐셜이 아닌 자속밀도를 직접변수로 취함에 따라 동일한 기억용량에서 계산의 정밀도가 향상됨을 알 수 있었다. 다매질 문제의 경우는 동일한 요소분할에서 본 연구에서 제안한 방법이 더 우수하기 는 하나 기억용량면에서 불리함을 알 수 있었다. 그러나 본 연구에서 제안한 자속밀도를 미지변수로 하는 새로운 해석방법이 3차원 와전류 문제까지 확장된다면 기억용량면에서도 기존의 3차원 와전류 해석법 보다 우수하리라 전망된다.

참고 문헌

- [1] H.Yamashita , Z.H.Shaikh , and E.Nakamae
" Novel finite element analysis method using magnetic flux density as an unknown variable " J.Appl.Phys., vol. 57 , no.1 , 1985 , pp 3847-3849
- [2] Z.H.Shaikh , H.Yamashita , and E.Nakamae
" A novel finite element method of computing directly magnetic flux density and it's error evaluation " Trans.IEE of Japan , section E , vol. 106 ,no.3/4 1986 , pp 42-47
- [3] Eric B.Becker, Graham F.Carey , J.Tinsley Oden
Finite Elements An Introduction vol. 1,Prentice -Hall , 1981
- [4] G.A.Toombs
Electrodynamics of Electrical Machines
Academia , Prague , 1967
- [5] 越智広志, 山下英生, 中前栄八郎
" 直接法による多媒質系の磁界解析 "
日本電気学会 研究会 資料 SA-87-28
RM-87-65