A-ϕ를 이용한 3차원 와전류 문제의 유한요소 해석

홍 성 표 , 한 송 엽
서울대학교

Finite Element Analysis of 3-D Eddy Current Problems using A - ϕ

Sung Pyo Hong, Song Yop Hahn
Seoul National University

Abstract

This paper descibes an analysis of the three-dimensional eddy current problems by the finite element method using magnetic vector potential and electric scalar potential. The finite element formulation uses first-order shape functions and tetrahedral elements.

The validity of this formalation is ensured as the result of the sphere conductor model problem in a sinusoidal magnetic field.

1. 서 론

최근 3차원 와전류 해석이 관심의 촛점이 되어왔다. 사실 유한한 길이의 도체에서의 와전류를 계산함에 있어서 2-D FEM을 이용하여 와전류 분포와 효과를 얻는다는 것은 그리 좋은 방법은 아니다.

그리하여 본 논문에서는 3-D FEM 을 이용하였으며 그 결과의 타당성을 입증하기 위하여 구도체 모델을 택하여 축대칭 해석 결과와 해석적 결과를 3차원해석 결과와 비교하여 보았다.

2. A - ϕ 정식화 및 유한요소법의 적용

2.1 지배방정식

변위 전류를 무시한 전자장 Maxwell 방정식과 보조 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_e + \vec{J}_0 \tag{2-1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2-2}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2-3}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{2-4}$$

$$\vec{J}_e = \sigma \vec{E} \tag{2-5}$$

여기서 각 기호의 의미는 다음과 같다.

$\vec{H}$: 자기장의 세기 [A/m]

$\vec{B}$: 자속 밀도 [Wb/m^2]

$\vec{E}$: 전기장의 세기 [V/m]

$\vec{J}_0$: 여자 전류 밀도 [A/m^2]

$\vec{J}_e$: 와 전류 밀도 [A/m^2]

σ : 도전율 [Ω/m]

μ : 자기 투자율 [H/m]

식 (2-3)으로부터 자기 벡터 포텐셜(magnetic vector potential) A는 식 (2-6) 의 관계로 정의되고

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{2-6}$$

식 (2-2)와 식 (2-6)으로부터 다음 식이 성립한다.

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

여기서 ϕ : 전위(electric scalar potential)

식 (2-4), (2-5), (2-6), (2-7)을 식 (2-1)에 대입하면 다음과 같은 편미분 방정식이 유도된다.

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = -\sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) + \vec{J}_0 \tag{2-8}$$

여기서 ν 는 자기 저항율이며 $\frac{1}{\mu}$ 로 주어진다.

그런데 식 (2-8)은 벡터 식으로 3개 인데 미지수는 4개(Ax Ay, Az, ϕ)이므로 한개의 수식이 더

필요하게 된다. 전하의 축적을 무시한 전류 연속 방정식(current continuity equation)과 식 (2-7)으로부터 또 하나의 방정식이 얻어진다.

$$\nabla \cdot \left(\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \nabla \phi \right) = 0 \qquad (2\text{-}9)$$

단, 여기서 $\nabla \cdot \vec{J}_e = 0$ 이다.

2.2 정식화 및 이산화

2.1절에서의 지배 방정식 (2-8) (2-9)를 정식화하는 방법으로 여러가지가 있을 수 있겠으나 여기서는 Galerkin법을 택하였다. 그리고 지배 방정식에서의 시간 미분항에 대하여는 정상 상태 해석을 하였다.

지배 방정식 (2-8)에 대한 잔차(residual) $\vec{R}$은

$$\vec{R} = \int_v N_i \nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) dv + j\omega\sigma \int_v N_i \vec{A} dv + \sigma \int_v N_i \nabla \phi dv - \int_v N_i \vec{J}_e dv \qquad (2\text{-}10)$$

가 되며 식 (2-10)의 첫번째 항은

$$\int_v N_i \nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) dv$$
$$= \int_v \nabla \times (N_i \nu \nabla \times \vec{A}) dv - \int_v \nabla N_i \times (\nu \nabla \times \vec{A}) dv$$
$$= \oint_S \hat{n} \times (N_i \nu \nabla \times \vec{A}) ds - \int_v \nabla N_i \times (\nu \nabla \times \vec{A}) dv$$

로 표시 할 수 있다.여기서 경계 적분항을 정식화 한다는 것은 그리 쉬운 일이 아니므로 이를 고려하지 않아도 되는 경계를 잡는 일은 매우 중요한데 해석 영역의 모든 경계가 다음의 3가지 경계 중의 하나이면 경계 적분을 고려하지 않아도 된다.

i) Dirichlet 경계

Ni를 고려할 필요가 없으므로 경계 적분항이 고려될 필요가 없다.

ii) 자기장의 세기가 경계면의 법선 벡터와 평행인 경계 ($\vec{H} \parallel \hat{n}$)

같은 방향의 두벡터에 대한 cross product는 0이므로 경계 적분항이 고려될 필요가 없다.

iii) 자기장의 세기가 경계면의 법선 벡터와 수직인 경계 ($\vec{H} \perp \hat{n}$)

그림 1에서 보듯이 $\hat{n} \times \vec{H}$ 가 경계면의 법선 벡터와 수직이므로 경계 적분항이 고려될 필요가 없다.

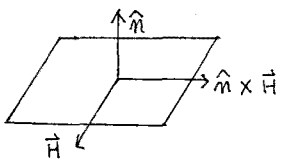


그림 1

그리하여 (2-8)식에 대한 잔차(residual)는

$$\vec{R} = -\int_v \nabla N_i \times (\nu \nabla \times \vec{A}) dv + j\omega\sigma \int_v N_i \vec{A} dv + \sigma \int_v N_i \nabla \phi dv - \int_v N_i \vec{J}_e dv \qquad (2\text{-}11)$$

가 된다.

지배 방정식 (2-9)에 대한 잔차(residual) R_ϕ 는

$$R_\phi = \int_v N_i \nabla \cdot (j\omega\sigma \vec{A} + \sigma \nabla \phi) dv$$
$$= \int_v \nabla \cdot N_i (j\omega\sigma \vec{A} + \sigma \nabla \phi) dv - \int_v \nabla N_i \cdot (j\omega\sigma \vec{A} + \sigma \nabla \phi) dv$$
$$= \oint_S N_i (j\omega\sigma \vec{A} + \sigma \nabla \phi) \cdot \hat{n} ds - \int_v \nabla N_i \cdot (j\omega\sigma \vec{A} + \sigma \nabla \phi) dv. \qquad (2\text{-}12)$$

인데 여기서도 경계 적분을 고려하지 않아도 되는 경계를 잡기 위해 다음 2가지 경계중에 하나를 택하면 된다.

i) 와전류가 경계면의 법선 벡터와 평행인 경계 ($\vec{J}_e \parallel \hat{n}$)

이 경계면에 대해서는 ϕ = constant 이며 여기에 어떤 값을 줄수 있으면 Ni를 고려할 필요가 없으므로 경계 적분항이 고려될 필요가 없다.

ii) 와전류가 경계면의 법선 벡터와 수직인 경계 ($\vec{J}_e \perp \hat{n}$)

서로 수직인 두벡터에 대한 dot product는 0이므로 경계 적분항이 고려될 필요가 없다.

그리하여 (2-9)식에 대한 잔차(residual)는 다음과 같다.

$$R_\phi = -\int_v \nabla N_i \cdot (j\omega\sigma \vec{A} + \sigma \nabla \phi) dv \qquad (2\text{-}13)$$

여기서 우리가 다루는 함수 분포 영역을 유한개의 사면체 요소 (그림 2) 로 분할하고 사면체 내의 미지함수 A를 일차 함수로 근사시키고 이를 이산화 하게 되면 도체 영역에서는 16 x 16 요소 행렬 (element matrix) , 공기 영역에서는 12 x 12 요소행렬 (element matrix)를 구성할 수 있게 된다. 이를 전 요소에 대하여 조립하게 되면 계 행렬 (system matrix)을 만들 수가 있다.

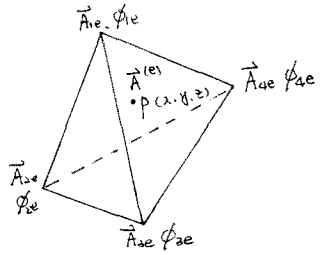


그림 2 사면체 요소

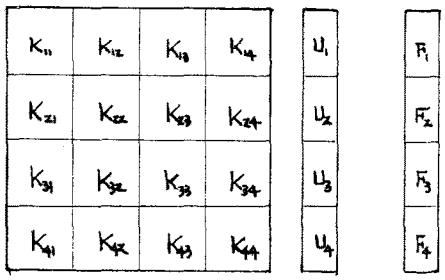


그림 3 16 x 16 요소행렬

여기서

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} k^{xx} & k^{xy} & k^{xz} & k^{x\phi} \\ k^{yx} & k^{yy} & k^{yz} & k^{y\phi} \\ k^{zx} & k^{zy} & k^{zz} & k^{z\phi} \\ k^{\phi x} & k^{\phi y} & k^{\phi z} & k^{\phi\phi} \end{pmatrix} \quad U_i = \begin{pmatrix} A_{xi} \\ A_{yi} \\ A_{zi} \\ \phi_i \end{pmatrix} \quad F_i = \frac{V^e}{4} \begin{pmatrix} J_{ox} \\ J_{oy} \\ J_{oz} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k^{xx} = \frac{1}{36V^e} \cdot \frac{1}{\mu_o \mu_r} (c_i c_j + d_i d_j) + j\omega\sigma \frac{V^e}{20} (1+\delta_{ij})$$

$$k^{xy} = -\frac{1}{36V^e} \cdot \frac{1}{\mu_o \mu_r} c_i b_j$$

$$k^{xz} = -\frac{1}{36V^e} \cdot \frac{1}{\mu_o \mu_r} d_i b_j$$

$$k^{x\phi} = \frac{\sigma}{24} b_j$$

$$k^{yx} = -\frac{1}{36V^e} \cdot \frac{1}{\mu_o \mu_r} b_i c_j$$

$$k^{yy} = \frac{1}{36V^e} \cdot \frac{1}{\mu_o \mu_r} (b_i b_j + d_i d_j) + j\omega\sigma \frac{V^e}{20} (1+\delta_{ij})$$

$$k^{yz} = -\frac{1}{36V^e} \cdot \frac{1}{\mu_o \mu_r} \cdot d_i c_j$$

$$k^{y\phi} = \frac{\sigma}{24} c_j$$

$$k^{zx} = -\frac{1}{36V^e} \cdot \frac{1}{\mu_o \mu_r} \cdot b_i d_j$$

$$k^{zy} = -\frac{1}{36V^e} \cdot \frac{1}{\mu_o \mu_r} \cdot c_i d_j$$

$$k^{zz} = \frac{1}{36V^e} \cdot \frac{1}{\mu_o \mu_r} \cdot (c_i c_j + b_i b_j) + j\omega\sigma \frac{V^e}{20} (1+\delta_{ij})$$

$$k^{z\phi} = \frac{\sigma}{24} d_j$$

$$k^{\phi x} = \frac{\sigma}{24} b_i$$

$$k^{\phi y} = \frac{\sigma}{24} c_i$$

$$k^{\phi z} = \frac{\sigma}{24} d_i$$

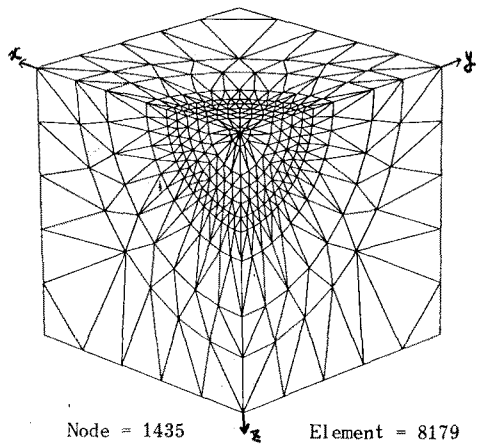
$$k^{\phi\phi} = -j\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{36V^e} (c_i c_j + d_i d_j + b_i b_j)$$

3. 사례연구

3.1 구도체 모델

구도체 모델의 대칭성은 고려하여 해석영역의 1/8 만을 자동요소분할법으로 분할한 해석영역을 그림 5에서 보여주고 있다. 그리고 그림 6.1은 등 Ax 선을 보여주며 그림 6.2는 등 Ay 선을 보여주고 있다. 그림 7는 r 이 증가함에 따른 와전류의 분포를 나타내고 그림 8 은 z = 0 인 평면에서의 와전류 분포와 방향을 나타낸다.

여기서 구도체의 도전율은 5.7 x E7, 투자율 1, 외부에서 주어지는 자속 밀도의 크기는 1 로 하였으며 주파수는 60Hz로 하였다.



Node = 1435 Element = 8179

그림 5 구도체 해석모델의 요소망

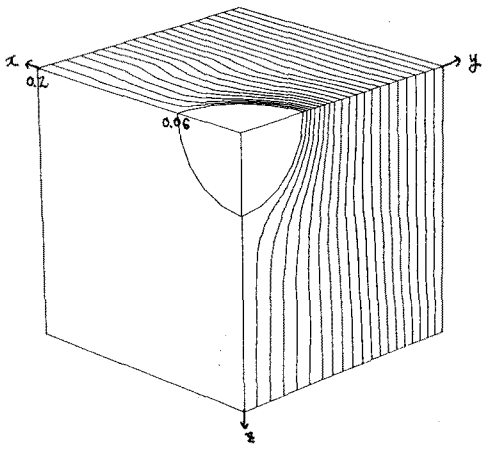


그림 6.1 등 Ax 선

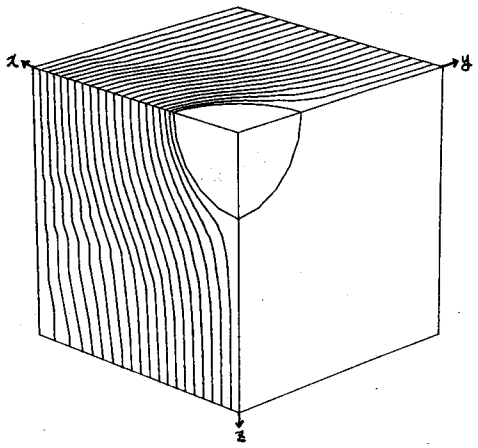


그림 6.2 등 Ay 선

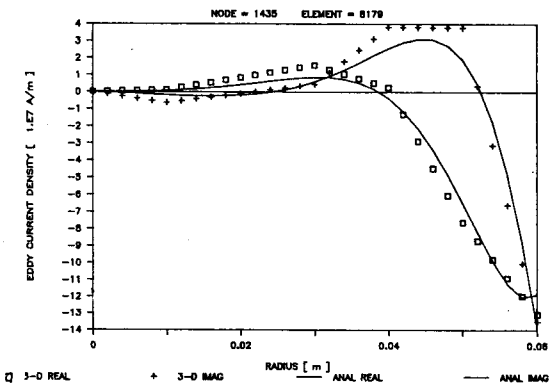


그림 7 와전류 분포 (r = 0 ~ 0.06)

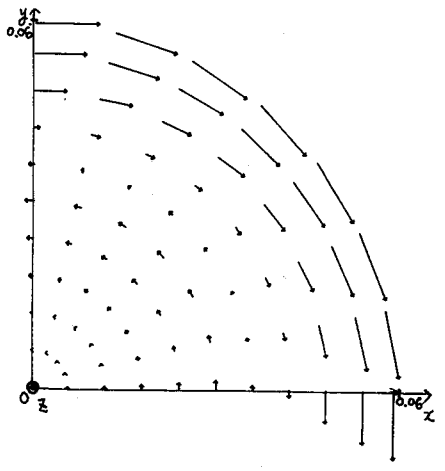


그림 8 Z = 0 인 면에서의 와전류 분포

4. 결론

아직은 적은 요소망으로 인하여 해석적인 결과와 오차가 약간 있음을 볼 수 있으나 더 많은 요소망에 의해 정확한 결과를 얻을 수 있으리라고 본다.
그리고 급속도로 발전하는 컴퓨터로 인하여 앞으로는 메모리나 속도에 구애 받지 아니하고 3차원 문제를 2-D 유한요소법에 의하지 아니하고 3-D 유한요소법으로 해결 할 수 있다.

[참 고 문 헌]

[1] M.V.K. Chari, A. konrad, M.A. Palmo, and J.D 'Angelo, "Three-Dimensional Vector Potential Analysis for Machine Field Problems", IEEE Trans. Vol.MAG-18, No.2,March 1982.

[2] T.Nakata, N.Takahashi and K.Fujiwara, "Physical Meaning of grad0 in Eddy Current Analsis using Magnetic Vector Potentials", IEEE Trans, Vol.24, No.1, January 1988.

[3] S.J.Salon and J.P.Peng, "Three-Dimensional Eddy Currents using A Four Component Finite Element Formulation", IEEE Trans. Vol.MAG-20, No.5, September 1984.

[4] W.Renhart, H.Stogner and K.Preis, "Calculation of 3D Eddy Current Problems by Finite Element Method using either an Electric or a Magnetic Vector Potential", IEEE Trans. Vol.24, No.1, January 1988.

[5] C.S.Biddlecombe, E.A.Heighway, J.Simkin and C.W.Trowbridge, "Methods for Eddy Current Computation in three Dimensions", IEEE Trans. Vol. MAG-18, No.2, March 1982.

[6] T.Morisue and M.Fukumi, "3-D Eddy Current Calculation using the Magnetic Vector Potential", IEEE Trans. Vol.24, No.1, January 1988.

[7] W.R.Smythe, Static and Dynamic Electricity. McGRAW-HILL 1950.