

E-Ω 법을 이용한 3차원 교류 자장 해석

° 김 동 수 · 한 송 업
서울 대학교 전기 공학과

Three-Dimensional Time Varing Magnetic Field Analysis Using E-Ω Method

° Dong Soo Kim , Song Yop Hahn
Dep. of E.E. Seoul National Univ.

ABSTRACT

Some limits are in two-dimensional analysis by finite element method to electromagnetic machine, having finite dimension. Therefore three-dimensional analysis by finite element method, which are modeling original form of models are needed in order to gain accurate solutions.

This paper present three-dimensional time varing magnetic field analysis method using electric field E and magnetic scalar potential Ω, and examine sample model.

1. 서론

전기 기계와 같이 유한한 크기를 갖는 모델을 해석함에 있어 해석 모델을 2차원화 하는데에는 어느 정도 한계가 있다. 그로 인해 해석 모델을 2차원화하여 얻은 해는 실제값과는 다소간의 차이를 보인다.

따라서 전기 기계를 유한 요소법에 의해 해석하는 경우 해석 모델을 원형대로 모델링하여 해석하는 3차원 유한 요소 해석이 필요하다.

본 논문에서는 전계의 세기 E 및 자기 스칼라 포텐셜 Ω를 변수 체계 (E-Ω 법)로 하여 3차원 교류 자장을 해석하는데 필요한 이론을 확립하고, 해석 모델에 적용하여 검토하였다.

도체 영역의 해석은 전계의 세기 E를 이용하여 수행되고, 공기 영역의 해석은 자기 스칼라 포텐셜을 이용하여

수행된다. 따라서 도체 영역과 공기 영역 사이의 경계에서 양 변수 간의 관계를 설정하는 경계 조건이 필요하게 되는데 이로인해 최종적으로 구성되는 전체 행렬은 비대칭이 된다.

그리고 도체 영역에서만 벡터 변수가 사용되고, 해석 구간의 대부분을 차지하는 공기 영역에서는 스칼라 변수가 사용되므로 타 변수 체계에 비해 계산기의 기억 용량 사용량이 적고 와전류와 해석 결과간에 상수 관계에 있으므로 해의 정도 향상이 타 변수 체계보다 유리하다.

2 지배 방정식의 도출

와전류 해석에서 다루고자하는 주파수 영역은 저주파대이므로 변위 전류를 무시하였을 때 지배 방정식을 도출하기 위해 필요한 맥스웰 방정식 및 보조 방정식은 다음과 같다.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{3}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{4}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{5}$$

$$\vec{H} = - \nabla \Omega, \vec{J} = 0 \text{ 시} \tag{6}$$

여기서 \vec{B} : 자기 밀도
 \vec{H} : 자장의 세기
 \vec{E} : 전계의 세기
 \vec{J} : 전류 밀도

Ω : 자기 스칼라 포텐셜 (Magnetic scalar potential)

μ : 자기 투자율

σ : 도전율

2.1 도체 영역에서의 지배 방정식

식 (1), (2), (4), (5) 로 부터 식 (7) 과 같은 도체 영역에서의 지배 방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \\ &= -\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \\ &= -\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (7)$$

2.2 자유 공간에서의 지배 방정식

이 영역에서는 $\vec{J}=0$ 이므로 식 (3), (4), (6) 으로부터 식 (8)와 같은 자유 공간에서의 지배 방정식이 얻어다.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{H}) &= \vec{\nabla} \cdot (-\mu \nabla \Omega) = 0 \\ -\mu \nabla^2 \Omega &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

2.3 경계 조건

도체 영역에 도입된 변수 E 와 자유 공간에 도입된 변수 Ω사이의 관계는 매질이 변하는 경계 영역에서 식 (9)와 식(10)에 의해 맺어진다.

$$\begin{aligned} \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= 0 \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 \hat{n} 은 도체 외부 방향 단위 법선 벡터이고, \vec{H}_2 및 \vec{B}_2 는 자유 공간에서의 자기의 세기 및 자기 밀도이며, \vec{H}_1 및 \vec{B}_1 은 도체 영역에서의 자기의 세기 및 자기 밀도이다.

2.4 경계 조건 대입을 위한 지배 방정식의 변형

도체 영역에서는 다음과 같다.

표준 Galerkin Method 를 사용하여 식 (7)을 다음과 같이 변형 한다.

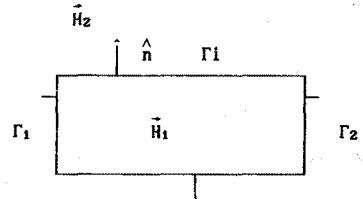
$$\begin{aligned} \int_V N_i \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) dV \\ + \sigma \int_V N_i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\nabla} \times \left(N_i \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) dV \\ - \int_V \nabla N_i \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) dV \\ + \int_V N_i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12) 의 1항에 Gauss theorem 의 제 2 항을 적용하면

$$\begin{aligned} \oint_S N_i \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) dS \\ - \int_V \nabla N_i \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) dV \\ + \int_V N_i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13) 1항을 처리하기 위해 도체 영역의 경계를 그림 1과 같이 분리한다.



Γ₁ : 절단면, $\vec{B} // \hat{n}$, $\vec{E} \perp \hat{n}$

Γ₂ : 절단면, $\vec{B} \perp \hat{n}$, $\vec{E} // \hat{n}$

Γ_i : 경계 영역

그림 1 도체 영역의 경계

식 (13) 의 1항 Surface integral 에 관해 살펴보면 다음과 같다.

먼저 절단 영역, Γ₁,에서는 $\vec{E} \perp \hat{n} = 0$ 이므로 $E_i=0$ 라는 Dirichlet Boundary Condition 을 찾을 수 있고, 이 조건 및 $\vec{B} // \hat{n}$ 의 조건을 사용하면 E_j 및 E_k 성분은 Neumann Boundary Condition이 된다.

따라서 Γ₁ 영역에서의 Surface Integral 은 영이 된다.

다음으로 Γ₂ 영역에서는 $\vec{E} // \hat{n}$ 이므로 E_i 및 E_j 성분은 Dirichlet Boundary Condition 이 되므로 Surface Integral 의 k 성분은 자연 소거되므로 Γ₂ 영역의

Surface Integral도 영이된다.

따라서 도체 영역에서의 Surface Integral 은 Interface에서에서만 수행되므로 식 (13) 은 다음과 같 이 된다.

$$\int_{\Gamma_i} N_i \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) dV - \int_V \nabla N_i \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) dV + \int_V N_i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV = 0 \quad (14)$$

자유 공간에서는 다음과 같다.

여기서도 표준 Galerkin Method 를 사용하여 식 (8)을 변형하면

$$-\mu \int_V N_i \nabla^2 Q dV = 0 \quad (15)$$

$$-\mu \oint_{\Gamma_i} N_i \hat{n} \cdot \nabla Q dS + \mu \int_V \nabla N_i \cdot \nabla Q dV = 0 \quad (16)$$

식 (16) 의 1항 Surface Integral 은 Dirichlet Boundary Condition과 자연 경계 영역에 대해 영이 되므로 식 (16) 은 다음식과 같이 변형된다.

$$-\mu \int_{\Gamma_i} N_i \hat{n} \cdot \nabla Q dS + \mu \int_V \nabla N_i \cdot \nabla Q dV = 0 \quad (17)$$

식 (6) 과 식 (17) 의 1 항을 이용해 원하는 외부 인가 자장을 부여한다.

2.5 정상 상태하에서의 이산화

외부 인가 자장이 정현파이고 와전류가 정상 상태에 도달했다고 하면 식 (18)과 같이 와전류를 설정할 수 있 다.

$$\vec{E} = E_0 e^{j\omega t} \quad (18)$$

외부 인가 자장 또한 정현파이므로 식 (2)로 부터 식 (19)를 얻는다.

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega \mu} \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

그러면 도체 상태에서의 최종 이산화는 식 (20)과 같다.

$$j\omega \int_{\Gamma_i} N_i \hat{n} \times \nabla Q \cdot dS - \int_V \nabla N_i \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) dV + j\omega \sigma \int_V N_i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV = 0 \quad (20)$$

공기 영역에서의 최종 이산화는 $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$ 라는 경계 조

건을 사용하여 식 (21)를 얻는다.

$$-\frac{j}{\omega} \int_{\Gamma_i} N_i \hat{n} \cdot (\nabla N_i \times \vec{E}) dS + \mu \int_V \nabla N_i \cdot \nabla Q dV = 0 \quad (21)$$

3. 사례 연구

3차원으로 본포하는 와전류의 이론해를 얻기는 사실상 불가능하다.

그러나 구와 같은 모델은 축대칭 2차원 문제로 만들 수 있기 때문에 타 모델보다 이론해를 얻어 정확한 와전류의 분포를 이해하기에 수월하다.

따라서 본 논문의 사례 연구는 구 모델을 택했으며 요소 분할도는 그림 2와 같다. 다음과 같다. 구의 반지름은 6 [cm]이며 절점수는 780 개 이며 요소수는 4074 개이다.

이 모델에 $\vec{B} = -e^{j377t} \hat{z}$ [T/sec] 의 외부 자장을 가하여 얻은 와전류의 분포는 그림 3과 같다.

동위도에서 외부로 갈수록 와전류가 증가하며 Skin Depth 근방에서 반대 위상이 나타나는데 이런 현상은 이론해에서도 볼 수 있다.

따라서 경계면에서 Skin Depth 까지의 거리에 해를 보관함수로 얻기에 충분한 정도로 요소를 나누어 주어야 정확한 해를 얻을 수 있다.

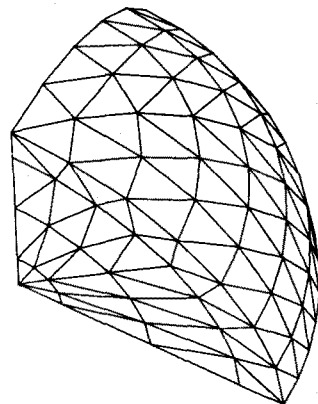
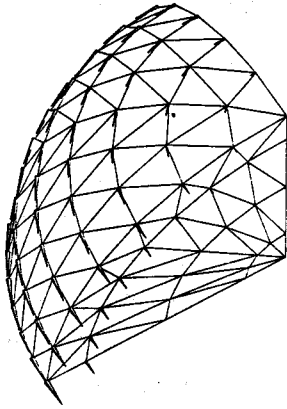
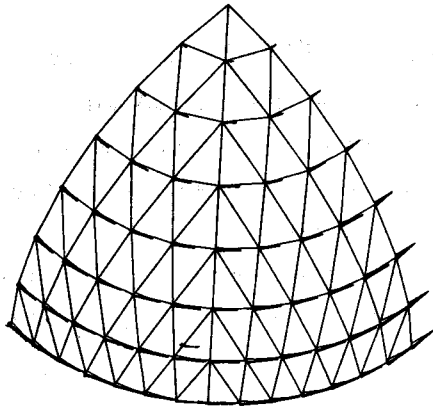


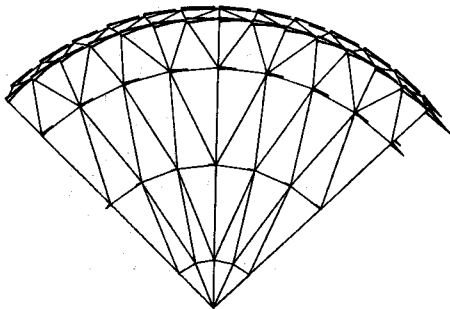
그림 2. 구 모델의 요소 분할도



(1) 투시 위치 < -0.5, 0.3, 1 >



(2) 투시 위치 < 0.5, 0.5, 1 >



(3) 투시 위치 < 0.2, 0.2, -1 >

그림 3. 와전류의 분포

참고 문헌

1. I. D. Mayergoyz, "A New Approach To The Calculation Of Three-Dimensional Skin Effect Problem", IEEE Trans, Magnetics, MAG-19, 5, 2198-2200, 1983.
2. 중전고의 외 4인, "전계의 강도 및 자기 스칼라 포텐셜을 미지 변수로한 3차원 와전류 해석법의 개발", 소화63년 일본 전기 학회 전국 대회.
3. A. Kamearl, Journal of Computational Physics, 42, 1, 124-140, 1981.
4. Munir H. Nayfeh, Electricity And Magnetism, 267-273.
5. J. Tinsley Oden, Finite Elements, Vol.1, 136-140