극배치 기법을 이용한 적응제어기에 관한 연구

○노 대 종 * 서 진 헌 *

* 서울 대학교

Adaptive Controller Based on Pole/zero Assignment

Dae Jong Noh * Jin Heon Seo *

* Seoul National University

ABSTRACT

In this paper, an adaptive algorithm for processes with unmeasured deterministic disturbances is presented. This algorithm is simple to synthesize an adaptive controller with desired pole/zero assignment. The internal stability requirement is achieved so that this algorithm can easily handle any minimum or non-minimum phase system. Some simulations are given to show the applicability of this approach.

1. 서론

근래에 적응 제어 기법에 관한 연구가 활발히 이루어져 왔으며, 그중에서도 자기 동조 제어기 (self tuning controller) 는 구현이 쉽고, 파라미터를 모르거나 시간 지연이 있는 경우, 또는 시변 시스템인 경우에도 적용할 수 있어 중요한 분야중의 하나이다. 자기 동조 제어 방식 중 극배치 제어기는 원하는 곳에 극점을 배치하는 제어방법으로서, 여러 형태의 극배치 알고리즘이 제시되었는데 이러한 알고리즘들은 대부분 Diophantine 방정식을 풀어야 하므로 계산시간이 길어지는 단점이 있다.

본 논문에서는 좀더 간단한 방법으로 극점과 영점을 배치하여, 확정적 외란 (deterministic disturbance) 이 있는 경우에도 출력 조정 (output regulation) 을 할 수 있는 알고리즘을 제시한다. 2 장에서는 본 논문의 기본원리를 설명하고, 3 장에서는 제어기를 유도하며, 4 장에서는 적응제어의 경우에 대해 서술하며, 5장에서는 이 알고리즘의 효용성을 보이기 위해 시뮬레이션을 행한다.

2. 문제 설정 및 기본 원리

다음과 같이 확정적 외란이 존재하는 제어 시스템을 생각하자.

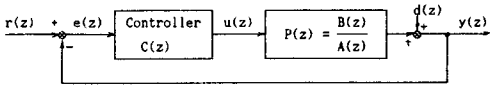


그림 1. 기본적인 폐루프 궤환 시스템
Fig. 1. Basic single-loop feedback system

플랜트 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}u(z) + d(z) \tag{1}$$

여기서 $\{y(\cdot)\}$, $\{u(\cdot)\}$는 각각 출력, 입력이고, $A(z)$ 와 $B(z)$는 다음과 같다.

$$A(z) = z^{n_a} + a_1 z^{n_a-1} + \cdots + a_{n_a} \tag{2}$$

$$B(z) = b_o z^{n_b} + b_1 z^{n_b-1} + \cdots + b_{n_b} \tag{3}$$

그리고 $\{d(\cdot)\}$는 확정적 외란으로서 다음과 같은 선형 유한 차수 시스템으로부터 발생된다.

$$D(z)d(z) = 0 \tag{4}$$

여기서

$$D(z) = z^{n_d} + d_1 z^{n_d-1} + \cdots + d_{n_d} \tag{5}$$

이때 시스템의 차수 상한값 n_a, n_b, n_d 를 안다고 가정한다.

이러한 시스템에서 폐루우프 시스템의 극점과 영점을 적절히 배치하여 전체 시스템을 안정하게 하고 기준 입력과 출력과의 오차를 0 이 되도록 하는 문제를 생각한다.

2.1 실현 가능성 (Realizability)

정의 <내부적 안정 (internally stable)> [4] : 그림 1 의

폐루우프 시스템을 점근적 안정 (asymptotically stable) 하게 할 수 있는 제어기 $C(z)$ 를 찾을 수 있을때 감도 함수 $S(z)$ 는 내부적 안정이라고 한다.

보조정리 1 [4] : $S(z)$ 가 다음을 만족하면 $S(z)$는 내부적 안정이다.

(1) $S(z)$ 가 단위원 밖에서 해석함수이다.
(2) 단위원 밖에 있는 $A(z)$ 의 모든 영점은 $S(z)$ 의 영점이다.
(3) 단위원 밖에 있는 $B(z)$ 의 모든 영점은 $1-S(z)$ 의 영점이다.

2.2 출력 조정 (Output regulation)

그림 1 의 시스템에서 출력 $y(z)$ 와 추종오차 $e(z)$ 를 구해보면 다음과 같다.

$$y(z) = (1-S(z))r(z)+S(z)d(z) \tag{6}$$

$$e(z) = S(z)(r(z)-d(z)) \tag{7}$$

여기서

$$S(z) = (1+P(z)C(z))^{-1} \tag{8}$$

그리고 기준 입력은 다음과 같다.

$$r(z) = \frac{N(z)}{M(z)} \tag{9}$$

보조정리 2 [5] : 식 (1) 의 플랜트에서 다음의 조건이 만족되면 추종 오차가 0 이 된다.

(1) $S(z)$ 가 점근적 안정이다.
(2) 단위원 밖에 있는 $D(z)$ 와 $M(z)$ 의 모든 영점은 $S(z)$ 의 영점이다.

3. 극점/영점 배치 제어기

식 (1)의 플랜트에서 출력 조정이 되기 위하여는 보조정리 2 를 만족해야 하므로 $S(z)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S(z) = \frac{W(z)M_+(z)D(z)}{G(z)} \tag{10}$$

여기서 $G(z)$ 는 원하는 극점을 갖는 Hurwitz 다항식 이고 $W(z)$ 는 다음을 만족시키기 위한 monic 다항식이다. 플랜트 $P(z)$ 의 분모 $A(z)$ 와 분자 $B(z)$ 를 각각 다음과 같이 분리 하자.

$$A(z) = A_+(z)A_-(z) \tag{11}$$

$$B(z) = B_+(z)B_-(z) \tag{12}$$

여기서 $A_+(z)$ 와 $B_+(z)$ 는 모든 영점을 단위원 밖에서 갖고 $A_-(z)$ 와 $B_-(z)$ 는 모든 영점을 단위원 안에서 갖는다. 보조정리 1 의 (2)를 만족하려면 $S(z)$가 $A_+(z)$를 포함하여야 한다. 즉 $S(z)$ 는 다음과 같이 된다.

$$S(z) = \frac{W(z)M_+(z)D(z)}{G(z)} = \frac{L(z)A_+(z)M_+(z)D(z)}{G(z)} \tag{13}$$

식 (13)으로부터

$$1-S(z) = \frac{G(z)-L(z)A_+(z)M_+(z)D(z)}{G(z)} \tag{14}$$

그런데 식 (14) 의 $1-S(z)$ 가 보조정리 1 의 (3)을 만족하려면 $1-S(z)$ 는 $B_+(z)$를 포함하 므로 다음의 관계가 성립한다.

$$G(z)-L(z)A_+(z)M_+(z)D(z) = B_+(z)F(z) \tag{15}$$

$B(z)=0$ 의 근 ($B_+(z) = \prod_{i=1}^{n}(z-q_i)^{m_i}$) 을 식 (15) 에 대입하면 다음 식을 만족한다.

$$G(q_i)-L(q_i)A_+(q_i)M_+(q_i)D(q_i) = 0, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{16}$$

여기서 n은 $B_+(z)=0$의 서로 다른 근의 갯수 이고 $L(z)$ 는 다음과 같 다.

$$L(z) = z^n+l_1z^{n-1}+\cdots+l_n \tag{17}$$

식 (16)을 정리하면 다음과 같이 된다.

$$L(q_i) = \frac{G(q_i)}{A_+(q_i)M_+(q_i)D(q_i)}, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{18}$$

이때 $L(z)$ 는 다음의 선형 방정식을 풀어 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} q_1^{n-1} & \cdots & q_1 & 1 \\ q_2^{n-1} & \cdots & q_2 & 1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ q_n^{n-1} & \cdots & q_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{G(q_1)}{A_+(q_1)M_+(q_1)D(q_1)} - q_1^n \\ \dfrac{G(q_2)}{A_+(q_2)M_+(q_2)D(q_2)} - q_2^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{G(q_n)}{A_+(q_n)M_+(q_n)D(q_n)} - q_n^n \end{bmatrix} \tag{19}$$

$L(z)$ 가 구해지면 식 (15)에 의하여 $F(z)$도 구할 수 있다. 이렇게 구해진 $S(z)$는 보조정리 1,2 에 의해 내부적 안정이다. 따라서 식 (8) 을 이용하여 제어기 $C(z)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{1-S(z)}{P(z)S(z)} \\ &= \frac{A(z)(G(z)-L(z)A_+(z)M_+(z)D(z))}{B(z)L(z)A_+(z)M_+(z)D(z)} \\ &= \frac{A_-(z)F(z)}{B_-(z)L(z)M_+(z)D(z)} \end{aligned} \tag{20}$$

식 (20)으로 주어진 제어기는 추종 오차가 0 으로 되며 Diophantine 방정식을 풀지 않고 간단한 선형 방정식을 풀어 얻어진다.

4. 적응제어에의 적용

4.1 계수 추정

플랜트 (1)을 후향 이동 연산자 (backward-shift operator) q^{-1}를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$A(q^{-1})y(t)=q^{-k}B(q^{-1})u(t)+\xi(t) \tag{21}$$

여기서

$$k=n_a-n_b \tag{22}$$

$$\xi(t)=A(q^{-1})d(t) \tag{23}$$

식 (4)의 관계를 이용하면 식 (21)은 다음과 같이 된다.

$$A(q^{-1})D(q^{-1})y(t)=q^{-k}B(q^{-1})D(q^{-1})u(t) \tag{24}$$

식 (24)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$y(t)=\phi^T(t-1)\theta_o \tag{25}$$

여기서

$$\theta_o^T=[\alpha_1,\cdots,\alpha_{n_\alpha},\beta_o,\cdots,\beta_{n_\beta}] \tag{26}$$

$$\phi^T(t-1)=[y(t-1),\cdots,y(t-n_\alpha),u(t-k),\cdots,u(t-k-n_\beta)] \tag{27}$$

$$n_\alpha=n_a+n_d \tag{28}$$

$$n_\beta=n_b+n_d \tag{29}$$

식 (25)의 계수 추정에는 다음과 같은 순환 최소 자승법 (RLS) 을 사용한다.

$$\hat{\theta}(t)=\hat{\theta}(t-1)+\frac{P(t-2)\phi(t-1)\epsilon(t)}{\lambda+\phi^T(t-1)P(t-2)\phi(t-1)} \tag{30}$$

$$P(t-1)=\frac{1}{\lambda}\left[P(t-2)-\frac{P(t-2)\phi(t-1)\phi^T(t-1)P(t-2)}{\lambda+\phi^T(t-1)P(t-2)\phi(t-1)}\right] \tag{31}$$

$$\epsilon(t)=y(t)-\phi(t-1)\hat{\theta}(t-1) \tag{32}$$

RLS 에 의해 AD 와 BD 가 추정되면 $\hat{A}(q^{-1})$ 와 $\hat{B}(q^{-1})$, $\hat{D}(q^{-1})$ 는 다음 방법으로 분리할 수 있다.

$A(q^{-1})$ 와 $B(q^{-1})$, $D(q^{-1})$ 의 분리

$\bar{A}=AD$, $\bar{B}=BD$ 라 놓으면 다음의 식이 성립된다.

$$BAD=\bar{B}A=B\bar{A} \tag{33}$$

따라서 다음식을 만족한다.

$$A(q^{-1})\bar{B}(q^{-1})-B(q^{-1})\bar{A}(q^{-1})=0 \tag{34}$$

식 (34)에 $A(0)=1$ 의 관계를 적용하면 다음과 같이 된다.

$$[A(q^{-1})-1]\bar{B}(q^{-1})+B(q^{-1})[-\bar{A}(q^{-1})]=-\bar{B}(q^{-1}) \tag{35}$$

식 (35)는 미지수가 식의 수보다 적은 연립 방정식이므로 의사 좌측 역행렬 (pseudo left inverse) 을 사용하여 풀면 $A(q^{-1})$ 와 $B(q^{-1})$ 를 구할 수 있다. 그리고 다음식에서 $D(q^{-1})$ 를 같은 방법으로 구할 수 있다.

$$D(q^{-1})A(q^{-1})=\bar{A}(q^{-1}) \tag{36}$$

$$D(q^{-1})B(q^{-1})=\bar{B}(q^{-1}) \tag{37}$$

4.2 적응 제어기의 구성

3장의 결과를 적응 제어의 형태로 구현한 알고리즘은 다음과 같다.

알고리즘

1) 4.1 절의 계수 추정 방법에 의해 $\hat{A}(z)$, $\hat{B}(z)$, $\hat{D}(z)$ 를 추정한 뒤, $\hat{A}(z)=\hat{A}_+(z)\hat{A}_-(z)$, $\hat{B}(z)=\hat{B}_+(z)\hat{B}_-(z)$ 로 분리한다.

2) 다음 식으로부터 $L(z)$ 를 구한다.

$$G(q_i)-L(q_i)\hat{A}_+(q_i)M_+(q_i)\hat{D}(q_i)=\hat{B}_+(q_i)F(q_i),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{38}$$

여기서 $n=deg(\hat{B}_+)$.

3) 다음 식으로부터 제어법칙 $C(z)$ 를 구한다.

$$C(z)=\frac{\hat{A}_-(z)F(z)}{\hat{B}_-(z)L(z)M_+(z)\hat{D}(z)} \tag{39}$$

매 샘플링마다 1) - 3) 까지를 반복하면 $\hat{A}(z)$, $\hat{B}(z)$, $\hat{D}(z)$ 가 $A(z)$, $B(z)$, $D(z)$ 로 수렴함에 따라 원하는 극점, 영점이 배치된 시스템을 얻을 수 있게 된다.

그런데 일반적으로 적응 제어에 있어서 폐루우프에 고주파의 신호가 있을 경우 이 고주파 성분이 모형화되지 않은 운동 (unmodelled dynamics) 을 여기시키게 되면 파라미터 추정치에 오차가 발생할 수 있다. 이 경우 적응 제어기의 제어 성능이 나빠지게 되므로 폐루우프에서 고주파 신호를 제거해 주는 것이 바람직하다. 이러한 문제를 해결하는 하나의 방법으로 제어기의 분자인 $C_n(z)$ 를 분리하여 전향 경로에는 직류성분만을 남겨

고주파 신호가 폐루우프로 전달 되는 것을 막아주는 방식을 사용할 수 있으며 이 경우 제어 법칙은 다음과 같이 변형된다.

$$C_d(z)u(z) = -\bar{C}_n(z)y(z)+g_o(r(z)-y(z)) \qquad (40)$$

여기서

$$C(z) = \frac{C_n(z)}{C_d(z)} \qquad (41)$$

$$g_o = C_n(1) \qquad (42)$$

$$\bar{C}_n(z) = C_n(z)-g_o \qquad (43)$$

이렇게 변형하여도 정상 상태 오차와 폐루프 시스템의 극점은 변하지 않으며 모형화 되지 않은 운동 (unmodelled dynamics) 이 존재하는 경우에도 계수 추정이 안정화 된다. 이를 포함하는 제어 시스템을 나타내면 그림 2 와 같다.

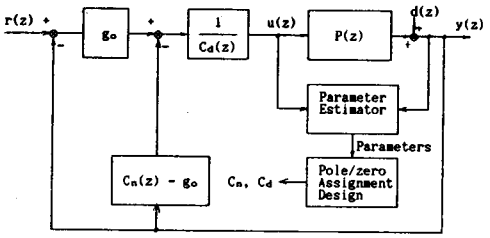


그림 2. 적응제어기의 구현
Fig. 2. Implementation of adaptive controller

5. 시뮬레이션 및 검토

제안된 제어기의 타당성을 보이기 위하여 두가지의 예를 보인다. 여기에 사용된 외란은 다음과 같은 정현파이다.

$$d(t) = g\sin(2\pi t/T_d) \qquad (44)$$

여기서 T_d는 정현파의 주기를 샘플 수로 나타낸것이다. 이러한 정현파는 2차로 모형화할 수 있다. 즉 다음과 같이 쓸 수 있다.

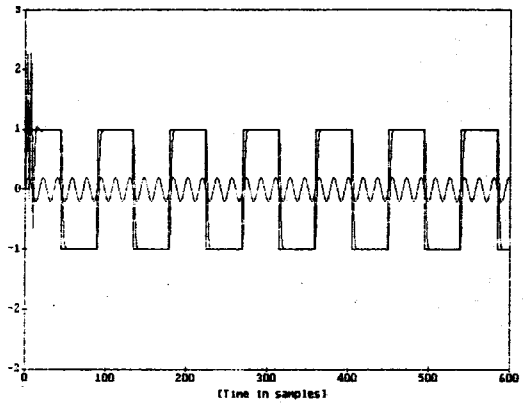
$$D(z) = z^2+d_1z+d_2 \qquad (45)$$

예 1.

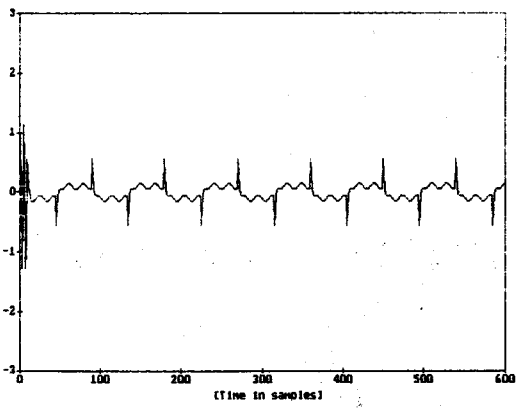
다음과 같은 시스템을 생각 하자.

$$P(z) = \frac{z+1.1}{z(z-1.2)} \qquad (46)$$

여기에 외란은 주기가 18 샘플이고 진폭은 0.2 인 정현파이다. 그리고 제어기는 8 샘플마다 계산되도록 하였다. 전체 시스템의 극점은 모두 0.2 에 두도록 하였고 계단파를 잘 추적하기 위해서 감도함수 $S(z)$ 의 영점을 1 에 두었다. 결과는 그림 3에 나타내었다. 그림 3을 보면 불안정한 시스템임에도 불구하고 안정된 출력을 보임을 알 수 있다.



a) 기준입력, 출력, 외란



b) 제어입력

그림 3. 예 1. 에서의 출력 y 와 제어입력 u 의 시뮬레이션 결과
Fig. 3. Results of output y and control input u of Ex. 1.

예 2. (모형화 되지않은 운동이 존재하는 경우)

다음과 같은 시스템을 생각하자.[9]

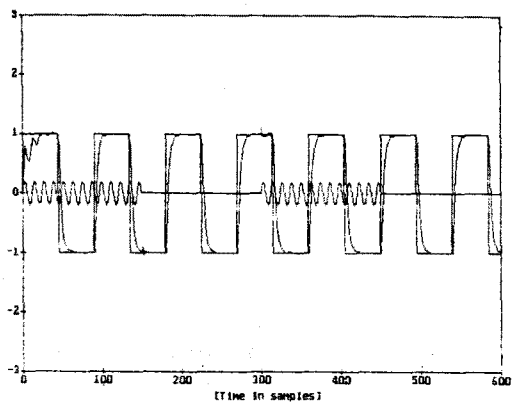
$$P(s) = \frac{2}{(s+1)}\frac{229}{(s^2+30s+229)} \qquad (47)$$

샘플링 주기를 0.4 초로 하면 다음과 같이 된다.

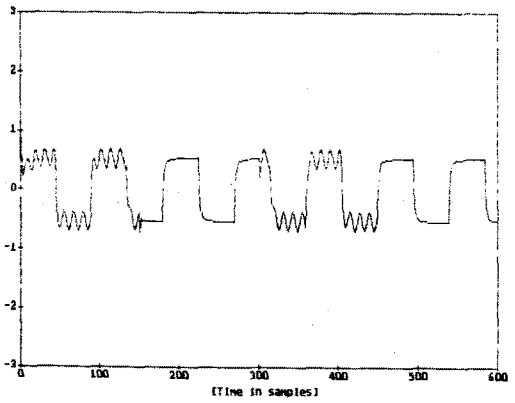
$$P(z) = \frac{0.629z^2+0.02812z+0.0001204}{z^3-0.6734z^2+0.02274z+0.000004107} \qquad (48)$$

이 시스템을 1 차로 추정하고 여기에 주기가 12 인 정현파가 150 샘플마다 존재하다 사라지는 외란을 인가 하였다. 극점과 영점의 배치는 예 1 과 같이 하였다. 결과를 그림 4 에 나타내었다. 그림

4를 보면 모형화 되지 않은 운동이 존재하여도 제어가 잘 이루어지고 있음을 알 수 있다.



a) 기준입력, 출력, 외란



b) 제어입력

그림 4. 예 2. 에서의 출력 y 와 제어입력 u 의 시뮬레이션 결과
Fig. 4. Results of output y and control input u of Ex. 2.

6. 결론

본 논문에서는 확정적 외란이 있는 경우에 있어서 기존의 방법보다 간단히 구현할 수 있는 적응 극점/영점 배치 알고리즘을 제시하였다. 이 알고리즘은 Diophantine 방정식을 풀지 않아 계산이 간단하며 내부적 안정도 (internal stability) 가 보장 되고 외란도 효과적으로 제거된다. 또한 모형화되지 않은 운동이 존재하는 경우에도 페루우프에서 고주파를 제거하는 방법을 도입하여 계수 추정의 신뢰도를 향상시켰다.

추후 연구과제로는 현재 고려되지 않은 시간 지연 시스템에 본 알고리즘을 적용하는 연구와 다변수 시스템에로의 확장에 관한 연구가 진행되어야 할 것이다.

7. 참고 문헌

[1] Clarke, D.W. and Gawthrop, P.J., "Self-tuning controller", *Proc. IEE*, pp.929-934, 1975

[2] Clarke, D.W. and Gawthrop, P.J., "Self-tuning control", *Proc. IEE*, pp.633-640, 1979

[3] Åström, K.J. and Wittenmark, B., "Self-tuning controllers based on pole-zero placement", *Proc. IEE*, pp.120-130, 1980

[4] Youla, D.C., Bongiorno, J.J. and Jabr, H.A., "Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers - part I : The single-input-output case", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-21, pp.3-13, 1976

[5] Safonov, M.G. and Chen, B.S., "Multivariable stability-margin optimization with decoupling and output regulation", *Proc. IEE*, pp.276-282, 1982

[6] Åström, K.J. and Wittenmark, B., *Computer controlled systems : Theory and design*, Prentice-Hall Inc., 1984

[7] Goodwin, G.C. and Sin, K.S., *Adaptive filtering prediction and control*, Prentice-Hall Inc., 1984

[8] Lin, C.H. and Chen, B.S., "Adaptive controller with desired pole/zero assignment", *Proc. IEE*, pp.301-306, 1986

[9] Palaniswami, M and Goodwin, G.C., "An adaptive implementation of the internal model principle", ACC, pp.600-605, 1987