

이 때의 조인트 속도 $q(\tau)$ 는 일정하고 가속도 $\ddot{q}(\tau)$ 는 0 이다. 이것들을 식 (1)에 대입하면,

$$u_j = \frac{h_j(q(\tau))}{t_i^2} + g_j(q(\tau)) \quad (3)$$

토오크 constraint를 설명하기 위해 다음과 같이 가정한다.

$$u_j^{\min} \leq u_j \leq u_j^{\max} \quad (4)$$

그러면 식 (3)에서 t_i 는

$$t_i = \left(\frac{|h_j(q(\tau))|}{u_j^{\max} - \text{sgn}(h_j(q(\tau)))g_j(q(\tau))} \right)^{1/2} = t_{ij}(\tau) \quad (5)$$

q^i 와 q^{i+1} 사이의 조인트 j의 최적 부분구간 이동 시간 t_{ij}^* 는

$$t_{ij}^* = \max_{\tau} t_{ij}(\tau) \quad (6)$$

모든 n 조인트가 동시에 목표점 q^{i+1} 에 도달해야 하기 때문에 q^i 와 q^{i+1} 사이의 원하는 최적 부분구간 이동 시간 t_i^* 는

$$t_i^* = \max_j \{ \max_{\tau} t_{ij}(\tau) \} \quad (7)$$

알고리즘 I:

- step 1: $d\tau \ll 1$ 인 $d\tau$ 를 선택하고 초기 $\tau = 0$, $t = 0$ 으로 setting
- step 2: 만일 $\tau \leq 1$ 이면, 식 (2)로 $q(\tau)$ 를 구한다. $\tau > 1$ 이면, 정지하고 $t_i^* = \bar{t}$
- step 3: $j = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여 $t_{ij}(\tau)$ 를 구한다. 그리고 최댓값 t_{max} 를 구한다. 만일 $t_{max} > \bar{t}$ 이면, $t = t_{max}$ 로 하고 step 4로 가라. 그렇지 않으면 step 3을 반복하라.
- step 4: $\tau = \tau + d\tau$ 로 하고 step 2로 가라.

III. 최소 전이 시간의 결정

조인트 공간상에서의 중간점들의 선형 interpolation은 보충 구간의 조인트 속도에서 불연속성을 가진다(그림 2).

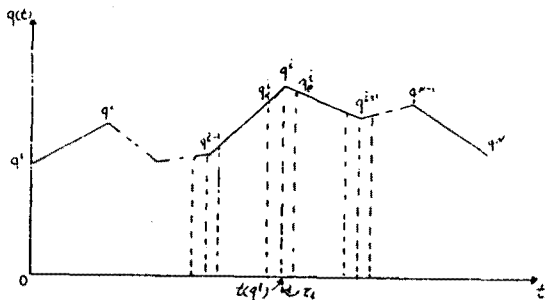


그림 2. 대칭적인 전이

Paul[6]과 Taylor[8]는 $t(q^i) - \tau_i$ 에서 출발하고 $t(q^i) + \tau_i$ 에서 끝나는 전이인 대칭적인 전이를 제안하였다.

$$q_{\alpha}^i = q^i - \frac{\tau_i}{t_{i-1}} (q^i - q^{i-1}), \quad (8)$$

$$q_{\beta}^i = q^i + \frac{\tau_i}{t_i} (q^{i+1} - q^i). \quad (9)$$

이 근사에서, Brady[1]가 지적한 것처럼 t_{i-1} 또는 t_i 보다 크게 되는 τ_i 가 가능하다. 이것은 원하는 선형 조인트 운동으로 부터 중요한 편차를 낳는다.

이 난점을 극복하는, 그리고 조건으로 입력 토오크 constraint를 필요로 하는 최소 전이 시간을 결정하는 가능한 방법이 다음에 제안되었다.

전이점 q_{α}^i 와 q_{β}^i 는 다음과 같이 미리 기술된다.

$$q_{\alpha}^i = q^i - k (q^i - q^{i-1}), \quad (10)$$

$$q_{\beta}^i = q^i + k (q^{i+1} - q^i), \quad (11)$$

i번째 전이에서 만족되기 위한 속도 경계조건은

$$\dot{q}_{\alpha}^i = \frac{(q_{\alpha}^i - q_{\beta}^{i-1})}{t_{i-1}}, \quad (12)$$

$$\dot{q}_{\beta}^i = \frac{(q_{\beta}^{i+1} - q_{\beta}^i)}{t_i}, \quad (13)$$

각 전이에서 만나기 위한 경계조건의 4개의 집합 (식 (10) - (13))으로 부터, 3차 다항식은 보통 구체화된 조인트 궤적으로서 선택되어 진다. 그러나, 2차 다항식은 여기서 선택되어 진다. 왜냐하면 일반적으로 이 2차 다항식은 3차 다항식보다 훨씬 더 작은 전이 시간에서 결과되기 때문이다. 이 이유로 i번째 전이는 각각 두개의 다른 일정 가속도가 적용되는 Tr A와 Tr B의 두개의 다른 전이 안으로 분해된다.

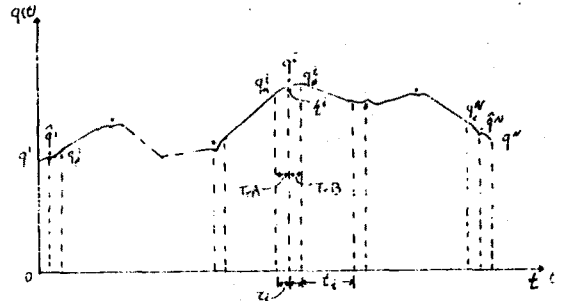


그림 3. 전이의 새로운 결정

그림 3에 관해서, Tr A에서 조인트의 위치, 속도, 그리고 가속도는 q_{α}^i 에서 경계조건을 사용하여 세워지고, 점에서 연속성 조건으로 연결시킨다.

천이의 Tr A와 Tr B에 대한 결과적인 조인트 궤적은

$$q(\tau_A) = \tau_i(\tau_A q_i - \frac{\tau_A^2}{4}(3\dot{q}_i + \ddot{q}_i)) + \frac{\tau_A^2}{2}(q_i - q_i) + q_i \quad (14)$$

$$\dot{q}(\tau_A) = \frac{\tau_A}{\tau_i}(q_i - q_i) - \frac{\tau_A}{2}(3\dot{q}_i + \ddot{q}_i) + \dot{q}_i \quad (15)$$

$$\ddot{q}(\tau_A) = \frac{1}{\tau_i^2}(q_i - q_i) - \frac{1}{2\tau_i}(3\dot{q}_i + \ddot{q}_i) \quad (15)$$

$$q(\tau_B) = \tau_i(\frac{1}{4}(q_i - q_i) - \frac{\tau_B}{2}(q_i + \dot{q}_i) + \frac{\tau_B^2}{4}(q_i + 3\dot{q}_i)) \quad (16)$$

$$+ \tau_B(q_i - q_i) + \frac{\tau_B^2}{2}(q_i - q_i) + \frac{1}{2}(q_i + \dot{q}_i) \quad (17)$$

$$\dot{q}(\tau_B) = \frac{1-\tau_B}{\tau_i}(q_i - q_i) + \frac{\tau_B}{2}(q_i + 3\dot{q}_i) - \frac{1}{2}(\dot{q}_i + \ddot{q}_i) \quad (18)$$

$$\ddot{q}(\tau_B) = \frac{1}{\tau_i^2}(q_i - q_i) - \frac{1}{2\tau_i}(\dot{q}_i + 3\ddot{q}_i) \quad (19)$$

q^i 로 부터 \hat{q}^i 의 과도한 편차를 예방하기 위해 다음의 error 함수를 최소화하는 $\bar{\tau}_i$ 를 구하는 것이 필요하다.

$$e^i = \| q^i - \tau^i \| \quad (20)$$

$$= \| q^i - \frac{1}{2}(q_i + q_i) - \frac{\tau_i}{4}(q_i - q_i) \| \quad (21)$$

$$\delta q^i \triangleq q^i - \frac{1}{2}(q_i + q_i) \quad (22)$$

$$\delta \hat{q}^i \triangleq \frac{1}{4}(\dot{q}_i - \ddot{q}_i) \quad (23)$$

위와 같은 간략화 표현을 사용하면, 식 (21)은

$$e^i = \{ \sum_{j=1}^n (\delta q_{ij} - \delta \hat{q}_{ij} \tau_i)^2 \}^{1/2} \quad (24)$$

$\bar{\tau}_i$ 를 구하기 위해, τ_i 에 관하여 e^i 를 미분을 하고, 이 미분값을 0으로 하여 $\bar{\tau}_i$ 를 구할 수 있다.

$$\tau_i = \frac{\sum_{j=1}^n \delta q_{ij} \delta \hat{q}_{ij}}{\sum_{j=1}^n (\delta \hat{q}_{ij})^2} \quad (25)$$

q^i 로 부터 식 (14)와 식 (17)의 과도한 편차를 예방하기 위해, $\bar{\tau}_i$ 는 천이 시간으로서 선택되어 질 수 있다. 그러나, 이 $\bar{\tau}_i$ 는 입력 보오르 constraint 를 만족하는 것이 보증되지 않았다. 그래서 궤적 편차와 최소 시간의 두 관점으로 부터 바람직한 천이 시간 τ_i^* 를 결정하는 근사가 다음에 개발된다. 기준 설정:

(1) 만일 $\bar{\tau}_i$ 가 Tr A와 Tr B에서 입력 보오르를 만난다면, 조건으로 입력 보오르를 필요로 하는 최소 천이 시간 $\hat{\tau}_i$ ($\leq \bar{\tau}_i$)는 결정되고, τ_i^* 는 $\tau_i^* = w \hat{\tau}_i + (1-w) \bar{\tau}_i$ 로 결정된다.

(2) 만일 $\bar{\tau}_i$ 가 Tr A와 Tr B에서 입력 보오르를 위배한다면, 조건으로 입력 보오르를 필요로 하는 최소 천이 시간 $\hat{\tau}_i$ ($> \bar{\tau}_i$)는 결정되고, τ_i^* 는 $\tau_i^* = \hat{\tau}_i$ 로 결정된다.

이 결정에 대해 초기치로서 $\bar{\tau}_i$ 를 가지고 $\hat{\tau}_i$ 을 구하는 방법이 개발되었다. 이 방법의 초기 단계는 천이 시간 $\bar{\tau}_i$ 에 대하여 Tr A와 Tr B에서 입력 보오르가 그에 대응하는 constraint를 위배하는지 어떤지를 결정하는 것이다.

Forward Search Method :

- step 1: $e(\ll 1)$, $m(\gg 1)$ 를 각각 선택한다. 초기치 τ_α 를 결정하고 $d\tau (= \tau_\alpha/m)$ 를 계산한다.
- step 2: $u_j(\tau_\alpha)$ 를 계산하라. $j=1, 2, \dots, n$ 에 대해서 step 2를 반복하라.
- step 3: $\tau_\beta = \tau_\alpha + d\tau$ 로 하고, $u_j(\tau_\beta)$ 를 계산. 만일 모든 j 에 대해 $|u_j(\tau_\beta)| \leq u_j^{max}$ 이면, step 4로 가라. 그렇지 않으면 $\tau_\alpha = \tau_\beta$ 를 가지고 step 3을 반복하라.
- step 4: $\tau_w = (\tau_\alpha + \tau_\beta)/2$ 와 $j=1, 2, \dots, n$ 에 대해 $u_j(\tau_w)$ 를 계산하라. 만일 모든 j 에 대해 $|u_j(\tau_w)| \leq u_j^{max}$ 이면, step 5로 가라. 그렇지 않으면 $\tau_\alpha = \tau_w$ 를 가지고 step 4를 반복하라.
- step 5: 만일 어떤 j 에 대해 $(u_j^{max} - |u_j(\tau_w)|) \leq \epsilon$ 이면, $\tau_t = \tau_w$ 로 set하고 정지. 그렇지 않으면 $\tau_\beta = \tau_w$ 를 가지고 step 4로.

Backward Search Method :

- step 1: $\epsilon(\ll 1)$, $m(\gg 1)$ 를 각각 선택한다. 초기치 τ_α 를 결정하고 $d\tau (= \tau_\alpha/m)$ 를 계산.
- step 2: $u_j(\tau_\alpha)$ 를 계산하라. $j=1, 2, \dots, n$ 에 대해서 step 2를 반복하라.
- step 3: $\tau_\beta = \tau_\alpha - d\tau$ 로 하고, $u_j(\tau_\beta)$ 를 계산하라. 만일 어떤 j 에 대해 $|u_j(\tau_\beta)| \geq u_j^{max}$ 이면, step 4로 가라. 그렇지 않으면 $\tau_\alpha = \tau_\beta$ 를 가지고 step 3을 반복하라.
- step 4: $\tau_w = (\tau_\alpha + \tau_\beta)/2$ 와 $j=1, 2, \dots, n$ 에 대해 $u_j(\tau_w)$ 를 계산하라. 만일 모든 j 에 대해 $|u_j(\tau_w)| \leq u_j^{max}$ 이면, step 5로 가라. 그렇지 않으면 $\tau_\alpha = \tau_w$ 를 가지고 반복.
- step 5: 만일 어떤 j 에 대해 $(u_j^{max} - |u_j(\tau_w)|) \leq \epsilon$ 이면, $\tau_t = \tau_w$ 로 set하고 정지. 그렇지 않으면 $\tau_\alpha = \tau_w$ 를 가지고 step 4로.

알고리즘 II :

- step 1: $d\tau$ 와 w 를 선택한다. 초기 $\tau_k = 0$, $\tau_z = 0$, $k=1$, $z=1$ 로 setting. 식 (25)로 $\bar{\tau}_i$ 를 계산한다.
- step 2: 만일 $\tau_k \leq 1$ 이면, $j=1, 2, \dots, n$ 에 대해 $u_j(\bar{\tau}_i)$ 를 계산하고 step 4로 가라. 그렇지 않으면 계속.
- step 3: 만일 $k=1$ 이면, $k=k+1$ 로 set하고, step 2로. 그렇지 않으면 $z=0$, $k=1$ 로 set하고, $\tau_k = 0$ 에서 $\tau_\alpha = \bar{\tau}_i$ 를 가지고 Backward Search Method로 τ_t 를 구하고 step 5로 가라.
- step 4: 만일 모든 j 에 대해 $|u_j(\bar{\tau}_i)| \leq u_j^{max}$ 이면, $\tau_k = \tau_k + d\tau$ 로 set하고 step 2로. 그렇지 않으면 $\tau_\alpha = \bar{\tau}_i$ 를 가지고 Forward Search Method로 τ_t 를 구하고 계속.
- step 5: $\tau_k = \tau_k + d\tau$ 로 set하고 만일 $\tau_k \leq 1$ 이면, step 6으로 가라. 그렇지 않으면 step 7로 가라.
- step 6: $j=1, 2, \dots, n$ 에 대해 $u_j(\tau_k)$ 를 계산하라. 만일 모든 j 에 대해 $|u_j(\tau_k)| \leq u_j^{max}$ 이면, step 5로. 그렇지 않으면 $\tau_\alpha = \tau_k$ 를 가지고 Forward Search Method로 τ_t 를 증가시키고 step 5로 가라.
- step 7: 만일 $k=1$ 이면, $k=k+1$, $\tau_k = 0$ 로 set하고, step 6으로. 그렇지 않으면 $\tau_t = \tau_k$ 으로 set하고 계속.
- step 8: 만일 $z=1$ 이면, $\tau_z = \tau_t$ 으로 set하고 정지. 그렇지 않으면 $\tau_z = w \tau_t + (1-w) \bar{\tau}_i$ 로 set하고 정지.

제 2장과 제 3장에서 논의된 모든 결과를 정리하여, 모든 중간점들이 이미 결정되어 제공된, 최소 부분구간 이동 시간 (t_i^* , $i=1, 2, \dots, n-1$)과 원하는 천이 시간 (τ_i^* , $i=1, 2, \dots, n$)을 결정하는 과정은 다음과 같이 간단히 설명된다.

- step 1: e, k, m, w, d , 그리고 $j = 1, 2, \dots, n$ 에 대한 u_j^{max} 를 선택한다.
 step 2: 식 (8), (9)로 $i = 1, 2, \dots, n$ 에 대해 q_{a^i} 와 q_{β^i} 를 결정한다.
 step 3: 알고리즘 I로 q_{a^i} 와 q_{β^i} 사이에 $i = 1, 2, \dots, n-1$ 에 대해 t_i^* 를 구한다.
 step 4: 알고리즘 II로 q_{a^i} 와 q_{β^i} 사이에 $i = 1, 2, \dots, n$ 에 대해 τ_1^* 를 구한다.

IV. 컴퓨터 시뮬레이션

그림 4와 같은 revolute 조인트를 가진 2-링크 매니플레이터에 대하여 제안된 방법을 IBM PC/AT를 사용하여 "C" language로 프로그래밍하여 시뮬레이션 하였다. 입력 토크 constraints $u_j^{max} = 100 \text{ Nm}$ ($j=1,2$)로, 전이점들 q_{a^i} 와 q_{β^i} 를 기술하기 위한 스칼라값 $k = 0.2$ 로 선택하였다.

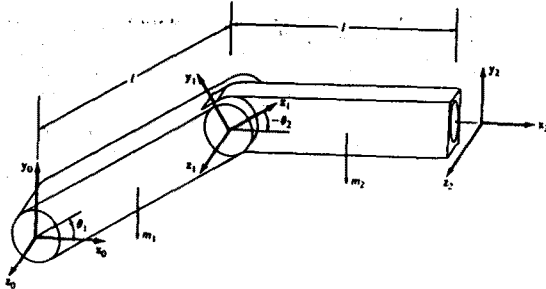


그림 4. revolute 조인트를 가진 2-링크 매니플레이터

표 2는 본 논문에서 제안된 방법으로 결정된 최소 부분구간 이동 시간과 최소 전이 시간을 나타낸다.

그림 5는 Cartesian 좌표에서 동일 시간상에서의 x-y end points의 이동경로를 나타내며, 그림 6과 7은 각각 조인트 공간에서의 조인트의 위치와 속도를 나타낸다. 예상했던 것처럼 조인트 속도의 연속성 조건은 만나고, 각 전이는 두 개의 다른 속도를 갖는다는 것을 그림 7에서 볼 수 있다. 매니플레이터가 결정된 부분구간 이동 시간과 전이 시간을 가지고 조인트 궤적을 따라 움직일때 각 조인트에 적용된 입력 토크를 그림 8에 나타내었다.

V. 결론

본 논문에서는 Cartesian 좌표에서의 직선 운동의 근사화를 이루면서 조인트 공간상에서 선형

interpolation을 가지고 작업 실행 시간을 최소화하는 것을 제안하였다.

본 논문은 또한 조건으로 입력 토크 constraint를 필요로 하는 최소 부분구간 이동 시간과 최소 전이 시간을 결정하는 방법을 제안하였다. 이 방법은 최소 부분구간 이동 시간의 결정에 대해 각 조인트에서 동적 방정식의 계산을 단지 한번 필요로 한다. 또한 Backward search method와 Forward search method를 이용한 전이시간의 결정은 동적 방정식의 반복 계산을 거의 필요로 하지 않는다. 컴퓨터 시뮬레이션의 결과로, 이 제안된 방법은 로봇트 매니플레이터의 허용 최대 입력 토크를 이용한 최소 부분구간 이동 시간과 최소 전이 시간을 간단하고도 효율적으로 구할 수 있다.

참고 문헌

- [1] M. Brady, et al., Eds., "Trajectory Planning", in Robot Motion: planning and control, Cambridge, MA: MIT Press, 1982
- [2] R. H. Castain and R. P. Paul, "An on-line dynamic trajectory generator", Int. J. Robotics Research, vol. 3, no. 1, pp. 68-72, 1984
- [3] K. S. Fu, H. C. Gonzalez, and C. S. G. Lee, Robotics: control, sensing, vision, and intelligence, McGraw-Hill, 1987
- [4] J. M. Hollerbach, "Dynamic scaling of manipulator trajectories", ASME Trans. J. Dynam. Syst., Meas. Contr., vol. 93, no 3, pp. 164-172, Sept. 1971
- [5] C. S. Lin and P. R. Chang, "Formulation and optimization of cubic polynomial joint trajectories for industrial robots", IEEE Trans. Auto. Contr., vol. AC-28, no. 12, pp. 1066-1074, Dec. 1983
- [6] R. P. Paul, "Manipulator Cartesian path control", IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., vol. SMC-9, pp. 702-711, Nov. 1979
- [7] H. T. Jeon and M. Eslami, "A minimum time joint trajectory planning for industrial manipulator with input torque constraint", IEEE Proc. Robotics and Automation, pp. 559-564, 1986
- [8] R. H. Taylor, "Planning and execution of straight line manipulator trajectories", IBM J. Res. and Dev., vol. 23, no. 4, pp. 424-436, 1979
- [9] J. S. Vandergraft, Introduction to numerical computation, Academic press, 2nd Ed., 1982

	q^1	q^2	q^3	q^4
joint 1	-0.835	-0.872	-0.085	0.910
joint 2	0.743	1.798	1.381	0.876

표 1.

	천이 시간	부분구간이동시간
$i=1$	0.226508	0.277549
2	0.194660	0.449110
3	0.216833	0.742015
4	0.277403	

표 2.

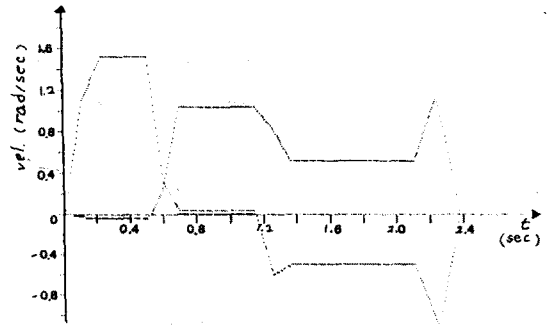


그림 7. 조인트 속도

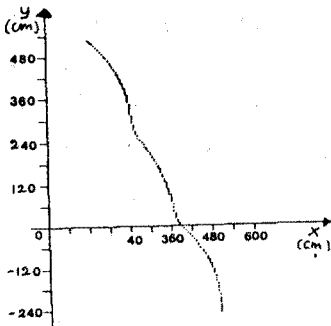


그림 5. x-y 좌표상의 위치

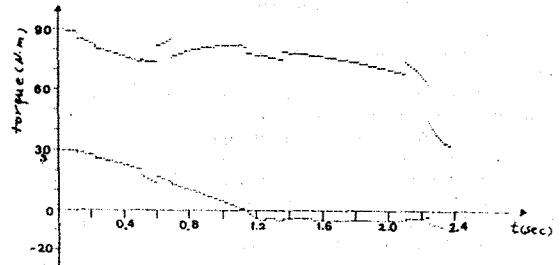


그림 8. 임력 토크

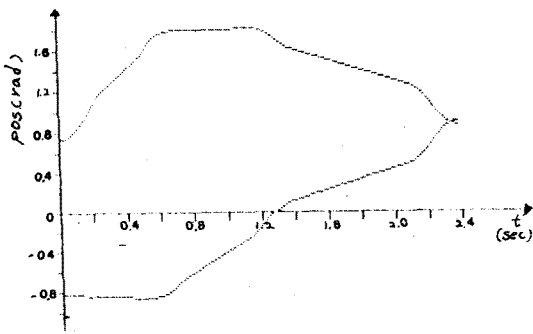


그림 6. 조인트 위치