

와전류문제에서 형상최적화를 위한 민감도해석

이 범택* 박 일한 한 송엽
(서울대학교)

Sensitivity Analysis for Shape Optimization in Eddy Current Problem

Lee Beom-taek Park Il-han Hahn Song-yop
(Seoul National University)

ABSTRACT

In order to optimize systematically the shape of electromagnetic devices, two sensitivity analyses, one based on finite element method and the other based on variational formulae and material derivative in continuum mechanics, are proposed.

These are applied to eddy current problem of time-varying field and verified these usefulness.

1. 서론

전자소자(電磁素子)의 응용이 광범위해지고 소형화, 경량화, 고성능화, 고효율화에 대한 요구가 증대됨에 따라 전자소자의 최적설계의 필요성이 증대되고 있다. 하지만 현재까지의 설계과정은 대개 퍼미언스법 또는 실험식등으로 기본설계를 한후 유한요소법등의 각종 해석법이나 시험제작을 통해 그 성능을 평가하고 이것이 기대치에 못 미칠 경우 경험에 의한 시행착오를 반복하여 설계변경을 하여왔다. 그러나, 이 방법은 체계적이지 못하고 많은 시간을 요구하며 일회적인 경우가 많다. 특히, 대상물이 복잡한 경우 설계목적을 만족하는 설계변수를 찾는 것 자체가 불확실하다.

근래에 들어 이러한 문제점을 극복하고 체계적으로 설계하기 위해 전자계산기를 이용한 최적설계기법에 대한 다양한 연구가 진행되어 왔다. [1], [3], [4]

본 논문에서는 물성이나 형상등 설계변수의 변화가 구하고자하는 특성에 어떤 영향을 미치는 지에 대한 정보 즉, 설계민감도를 유한요소법에 기초한 이론과 변분식과 연속체역학의 전미분 개념을 이용한 방법으로 도출하여 [2] 최적화알고리즘에 적용하는 방법에 대해 기술하였다. 즉, 최적설계를 얻기위해 얻고자 하는 설계변수, 설계목적을 정량화한 목적함수, 시스템이 만족되어야 하는 제약조건 그리고 시스템의 상태를 나타내는 상태방정식을 정의하고 설계변수의 미소변화에 대한 목적함수의 변화 비 즉, 설계민감도를 구하고 이를 최적화 알고리즘에 적용하여 반복적으로 설계변수를 변화시켜 최적의 설계변

수를 찾는 방법을 제시하였다.

정자장, 정전장에서 전자소자의 민감도해석은 이미 [1]에서 자세히 제시되어 있으므로 여기서는 시간의존장의 경우 즉, 와전류문제에 국한하여 민감도식을 도출하였고 첫째, 와전류를 최소화하는 문제로써 도체의 배치문제 둘째, 와전류를 이용한 자장차폐문제에서의 도체 크기결정문제 등의 예제에 적용하여 위에서 언급한 두가지 방법의 타당성을 비교, 검증하였다.

이러한 최적설계과정은 그림 1과 같다.

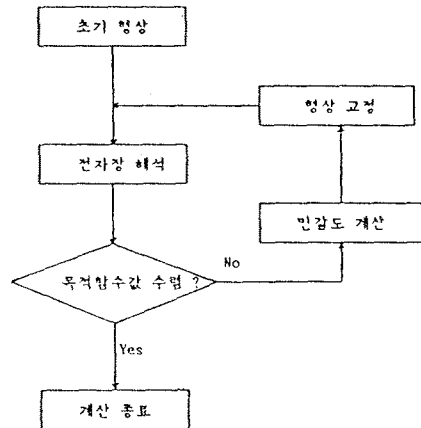


그림 1. 최적설계 흐름도

2. 유한요소법에 기초한 민감도해석

이 방법은 유한요소법을 이용하여 주어진 시스템을 표현하는 유한차원화된 상태방정식을 구하고 이를 설계변수에 대한 미분을 취하여 민감도를 구하는 것이다.

유한차원화된 상태방정식은 다음과 같다.

$$[K] \cdot [X] = [F] \quad 2-1$$

대상이 최적의 특성을 갖을 때 최소값을 갖는 목적함수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$F = F \left[p, X(p) \right] \quad 2-2$$

여기서 $[p]$: 설계변수 벡터 ($np \times 1$) $[X(p)]$: 상태변수 ($n \times 1$)

식 2-2 가 최소값을 갖는 것이 목적이므로 설계변수에 대한 목적함수의 변화를 즉, 민감도는 다음과 같다.

$$\frac{dF}{d[p]^T} = \frac{\partial F}{\partial [p]^T} + \frac{\partial F}{\partial [X]^T} \frac{d[X]}{d[p]^T} \quad 2-3$$

(1×np) (1×np) (1×n) (n×np)

윗 식에서 우변 둘째항을 구하기 위해 식 2-1 을 설계 변수에 대해 미분한 항을 도입하고 보조변수식을 도입한다.

$$[K] [\lambda] = \frac{\partial F}{\partial [X]} \quad 2-4$$

따라서 민감도식은 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{dF}{d[p]^T} = \frac{\partial F}{\partial [p]^T} + [\lambda]^T \frac{\partial}{\partial [p]} \left[[f] - [K][X] \right] \quad 2-5$$

3. 변분식과 연속체역학의 전미분개념을

이용한 민감도해석

이 방법은 해석대상의 영역 그 자체가 설계변수이므로, 형상변화를 연속체적 관점에서 기술하고 이에 따른 목적함수의 민감도식을 연속체역학의 전미분개념을 도입하여 유도하는 것이다.

[2] 에서 얻은 전미분식과 임의 함수에 대한 전미분을 유도하고 보조변수식을 이용하여 민감도식을 계산한다.

변형된 영역에서의 지배방정식의 변분식은 다음과 같다.

$$a_1(\phi_1, \bar{\phi}_1) = \int_{\Omega_1} c(\phi_1, \bar{\phi}_1) d\Omega_1$$

$$= \int_{\Omega_1} f \bar{\phi}_1 d\Omega_1 = l_1(\bar{\phi}_1) \quad 3-1$$

for all $\bar{\phi}_1 \in \Phi$

윗 식의 전미분을 구하고

$$[a(\phi, \bar{\phi})]' = a'(\phi, \bar{\phi}) + a(\phi, \bar{\phi}) = l'(\bar{\phi}) \quad 3-2$$

for all $\bar{\phi} \in \Phi$

임을 이용하면

목적함수가 다음과 같을 때

$$F = \int_{\Omega_1} g(\phi_1, \nabla \phi_1) d\Omega_1 \quad 3-3$$

전미분은 다음과 같고

$$F' = \int_{\Omega} \left[g_1 \bar{\phi} + g_2 \nabla \bar{\phi} - g_1 (\nabla \phi \cdot \nabla \bar{\phi}) - g_2 \nabla (\nabla \phi \cdot \nabla \bar{\phi}) \right] d\Omega$$

$$+ \int_{\Gamma} g(\bar{V} \cdot \bar{n}) d\Gamma \quad 3-4$$

여기서 $g_1 = \frac{\partial g}{\partial \phi}$, $g_2 = \frac{\partial g}{\partial (\nabla \phi)}$

윗 식에서 $\bar{\phi}, \nabla \bar{\phi}$ 은 \bar{V} 와 관계되고 F' 을 \bar{V} 로 표현하기 위해 제거해야 한다. 이를 위해 보조변수식을 도입하면

$$a(\lambda, \bar{\lambda}) = \int_{\Omega} \left[g_1 \bar{\lambda} + g_2 \nabla \bar{\lambda} \right] d\Omega \quad 3-5$$

for all $\bar{\lambda} \in \Phi$

윗 식에서 $\bar{\lambda} = \phi$ 인 조건과 에너지 쌍선형형태의 대칭성을 이용하여 식 3-4 을 정리하면

$$F' = l'(\lambda) - a'(\phi, \lambda) - \int_{\Omega} \left[g_1 (\nabla \phi \cdot \nabla \bar{V}) + g_2 \nabla (\nabla \phi \cdot \nabla \bar{V}) \right] d\Omega$$

$$+ \int_{\Gamma} g(\bar{V} \cdot \bar{n}) d\Gamma \quad 3-6$$

위에서 구한 민감도식은 변분식과 상태변수의 경계조건 또 접경계조건에 의해 경계적분식으로 표현된다.

4. 적용사례

여기서는 위에서 두가지 방법으로 정의한 민감도해석을 간단한 예제에 적용하여 타당성을 비교, 검토하였다.

먼저 와전류문제의 경우 해석대상에 대한 지배방정식의 변분식을 구하면 맥스웰 방정식과 회로방정식등으로부터 다음과 같이 표현된다.

$$a[(\lambda, \phi, I), (\bar{\lambda}, \bar{\phi}, \bar{I})] = \int_{\Omega_c} \left[H(\lambda) \cdot \bar{B}(\bar{\lambda}) + j\omega A \bar{\lambda} + \sigma(\nabla \phi) \bar{K} \right] d\Omega$$

$$- \frac{NI}{\Delta_c} \left[\int_{\Omega_1} \bar{\lambda} d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} \bar{\lambda} d\Omega_2 \right] + \int_{\Omega} \left[A(\nabla \bar{\phi}) + \frac{1}{j\omega} (\nabla \phi) (\nabla \bar{\phi}) \right] d\Omega$$

$$- \frac{NI}{\Delta_c} \left[\int_{\Omega_1} \lambda d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} \lambda d\Omega_2 \right] + j \frac{ZI\bar{I}}{\omega} = j \frac{V}{\omega} \bar{I} = l[(\bar{\lambda}, \bar{\nabla} \bar{\phi}, \bar{I})]$$

for all $\bar{\lambda} \in \Phi, \bar{\nabla} \bar{\phi}, \bar{I} \in \omega \quad 4-1$

4-1. 도체의 와전류를 감소시키는 위치선정문제

모델은 그림 2와 같이 코일사이 에 배치된 도체에서의 와전류를 감소시키는 문제로 도체가 코일 중간에 위치했을 때가 최적해인 문제이다.

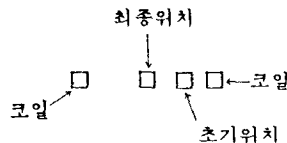


그림 2. 모델 1

이 때 목적함수는 다음과 같다.

$$\phi = \int_{\Omega_c} J_c^2 d\Omega$$

$$= \int_{\Omega_c} (-j\omega A - \sigma \nabla \phi)^2 d\Omega \quad 4-2$$

첫번째 방법에 의한 민감도식은 다음과 같다.

$$\frac{d\phi}{d[p]^T} = \frac{\partial \phi}{\partial [p]^T} + \left[\frac{\partial \phi}{\partial \nabla \phi} \right]^T \frac{\partial}{\partial [p]} \left[[f] - [K][X] \right] \quad 4-3$$

$$[K] \left[\frac{\partial \phi}{\partial \nabla \phi} \right] = \sum_{i=1}^6 \int_{\Omega_c} 2(j\omega A + \sigma \nabla \phi) (j\omega) \frac{\partial A}{\partial \lambda_i} d\Omega$$

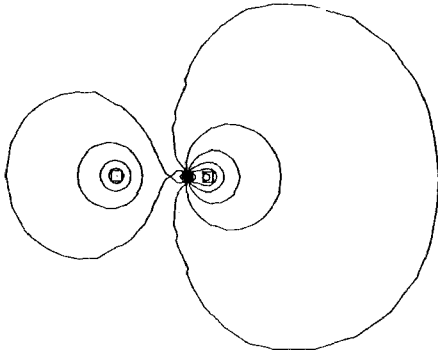
$$+ \sum_{i=1}^6 \int_{\Omega_c} 2(j\omega A + \sigma \nabla \phi) \sigma d\Omega$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^6 \int_{\Omega_c} (j\omega A + \sigma \nabla \phi)^2 \frac{\partial |G|}{\partial p_j} d\Omega \quad 4-5$$

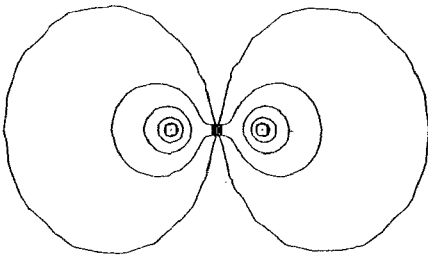
두번째 방법의 민감도해석에서 보조변수식은 식 4-3 과 같고 민감도식은 다음과 같다.

$$\frac{d\phi}{dp_j} = \int_{\Gamma} [j\omega\lambda + \sigma(\nabla\phi)\lambda + \sigma(\nabla\psi)\lambda + \frac{\sigma}{j\omega} \sigma(\nabla\phi)(\nabla\psi) - (j\omega\lambda + \sigma\nabla\phi)^2] (\frac{\partial x}{\partial p_j} n) d\Gamma \quad j=1, \dots, np \quad 4-6$$

초기위치와 최종위치에서의 등자기벡터포텐셜 분포는 그림 3 에서 보여 준다.



a) 초기위치



b) 최종위치 (각도 : 162.5°)

그림 3. 등자기벡터포텐셜 분포

이때 최적화 과정에서 민감도와 목적함수값은 표 1 과 같다.

설계변수값 단위 : mm	민감도		목적함수값
	방법 1	방법 2	
27.50	(1.02+09, 6.29+08)	(9.93+08, 6.12+08)	(1.41+07, 8.70+06)
24.66	(-4.62+07, -2.82+07)	(-4.61+07, -2.82+07)	(6.78+06, 4.19+06)
25.10	(1.34+07, 7.64+06)	(1.35+07, 8.37+06)	(6.71+06, 4.14+06)
25.00	(27320.0, 10.1)	(7616.0, 5056.0)	(6.70+06, 4.14+06)

표 1. 두 방법에서의 민감도와 목적함수값

표 1 에서 볼 수 있듯이 최적해 근처에서 첫번째 방법에서의 민감도가 오차가 큼을 알 수 있다.

4-2. 자장차폐문제에서 도체크기 결정문제
모델은 그림 4 와 같이 싸인파로 변하는 외부 자장내 에 놓인 도체실린더 내에서의 자장의 크기를 정하는 문제로, 그림 4 에서 초기와 최종형상을 보여준다.

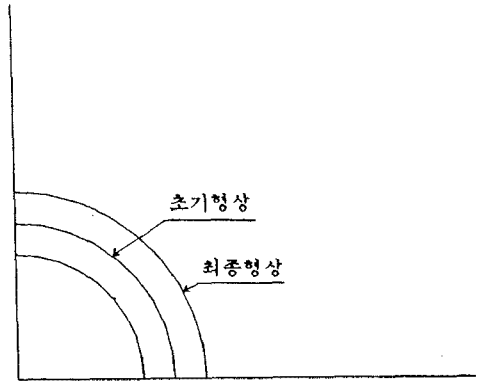


그림 4. 모델 2

여기서는 목적함수가 아래와 같이 정의된다.

$$\phi = \int_{\Omega} (B_y - B_{yo})^2 d\Omega \quad 4-7$$

이 때 첫번째 방법에 의한 민감도식은 다음과 같다.

$$\frac{d\phi}{d[p]^T} = [\lambda]^T \frac{\partial}{\partial [p]^T} \left[[f] - [K][X] \right] \quad 4-8$$

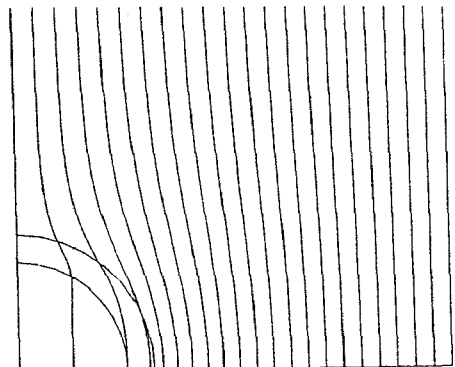
$$[K][\lambda] = \sum_{i=1}^6 \int_{\Omega_0} 2(B_y - B_{yo}) \frac{\partial B_y}{\partial A_i} d\Omega \quad 4-9$$

위에서 $\frac{\partial \phi}{\partial p_j}$ 항이 소거된 것은 이 문제에서 ϕ 는 p의 직접함수가 아니기 때문이다. 그리고 이 문제에서도 첫번째와 두번째 방법의 보조변수식은 동일하다.

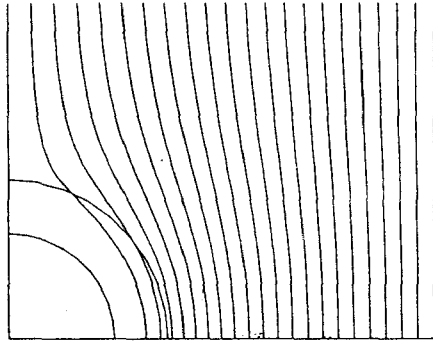
두번째 방법에 의한 민감도식은 다음과 같다.

$$\frac{d\phi}{dp_j} = \int_{\Gamma} j\omega\lambda \lambda (\frac{\partial x}{\partial p_j} n) d\Gamma \quad j=1, \dots, np \quad 4-10$$

초기위치와 최종위치에서의 등자기벡터포텐셜 분포는 그림 5 과 같다.



a) 초기형상



b) 최종형상

그림 5. 등자기벡터포텐셜 분포 (각도 : 0°)

이때 최적화 과정에서 민감도와 목적함수값은 표 2 과 같다.

설계변수값 단위 : mm	민감도		목적함수값
	방법 1	방법 2	
25.00	(-1.64-02, 8.62-03)	(-1.64-02, 8.66-03)	(2.14-05, -2.17-05)
26.30	(-6.66-03, 6.93-03)	(-6.69-03, 6.96-03)	(7.11-06, -1.12-05)
27.37	(-2.77-03, 4.44-03)	(-2.77-03, 4.46-03)	(2.32-06, -5.14-06)
28.21	(-1.18-03, 2.87-03)	(-1.18-03, 2.70-03)	(7.31-07, -2.18-06)
28.83	(-5.21-04, 1.59-03)	(-5.09-04, 1.57-03)	(2.13-07, -8.36-07)
29.68	(-5.83-05, 3.60-04)	(-5.85-05, 3.61-04)	(5.46-09, -5.28-08)
30.06	(2.93-05, -8.63-05)	(2.93-05, -8.65-05)	(1.84-09, -3.32-09)
30.00	(1.96-05, -2.39-05)	(1.96-05, -2.39-05)	(4.67-10, -2.97-10)

표 2. 두 방법에서의 민감도와 목적함수값

이 문제의 경우 표 2 에서 볼 수 있듯이 전과정에서 두 방법의 민감도가 거의 일치함을 알 수 있다.

5. 결론

와전류문제에서의 시스템의 최적형상 혹은 위치를 구하는 간단한 예제에서 두가지 방법 모두 만족스러운 결과를 얻었다. 그리고, 각 경우 민감도계산상에서 상대오차도 수 %내로 양 방법 모두 응용가능함을 보여준다.

첫번째 방법은 수식전계가 비교적 용이하고 설계변수가 폭 형상일 필요가 없는 점에서 유리하고 두번째 방법은 실제 계산상 메모리용량이 작아도되고 유한요소 프로그램에 따른 변화가 적다는 점에서 유리하다.

이상의 결과에서 실제문제해결을 위한 적합한 최적화 알고리즘의 개발과 실제문제에의 적용이 필요함을 알 수 있었다.

참고문헌

1. 박일한, '전자소자의 형상최적화를 위한 민감도해석', 공학박사 학위논문, 발표예정, 1990.
2. E.J.Haug, K.K.Chol and V.Komkov, 'Design Sensitivity Analysis of Structural Systems', Academic Press, New York, 1986.
3. S.Gitosastro, Analyse de Sensibilit  et optim-

isation par rapport aux paramètres de construction dans systèmes  lectromagn tiques, Ph.D. dissertation, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, 1988.

4. Il-han Park, Beom-taek and Song-yop Hahn, 'Pole Shape Optimization for Reduction of Cogging Torque by Sensitivity Analysis', COMPEL Vol. 9, No.5, 1990. to be published