

변 요소를 이용한 3 차원 정자장 해석

이 롱배^o, 김 동수, 한송엽
서울대학교 전기공학과

Three-dimensional magnetostatic analysis using EDGE Element

Hong-Bae Lee, Dong-Soo Kim, Song-Yop Hahn
Seoul National Univ.

ABSTRACT

If one express the basic equations of electromagnetics in terms of differential form, one can have many physical meanings. To obtain this advantages in Finite Element Method, we should use new element.

In this study, we select degree of freedom as circulation A along edges of the mesh, and use Edge Element because A is 1-form.

We apply this method to some examples of the 3-D magnetostatics, and obtain decrease of total nonzeros and increase of accuracy.

1. 서론

1980년대부터 전기 기기의 자계 해석을 3 차원 공간에서 수행하려는 시도가 활발하게 진행되어 왔다. 이는 전기 기기의 형상을 2 차원화 하여 해석하려는 데 있어 많은 가정이 선행되어야 하기 때문이다. 그러므로 전기 기기를 그 원형대로 해석함으로써 자계의 해석 정도를 높이고 2 차원 해석이 불가능한 계를 해석할 수 있게 된다.

3 차원 자계 해석을 위해 사용되는 변수 체계는 크게 두 가지로 나뉘어 지는데, 그 하나가 자기 벡터 포텐셜¹⁾ (Magnetic Vector Potential) 을 이용하는 방법이고 다른 하나는 자기 스칼라 포텐셜^{2),3),4)} (Magnetic Scalar Potential) 을 이용하는 방법이다. 자기 벡터 포텐셜을 이용할 경우 한개의 절점당 3 개의 미지수 (A_x, A_y, A_z) 가 필요하게 되어 많은 절점을 필요로 하는 3 차원 해석의 경우 자계해석의 효율을 떨어뜨리는 단점을 가지고 있다. 자기 스칼라 포텐셜을 이용할 경우 자기

벡터 포텐셜을 이용할 경우보다 1/3 적은 미지수를 필요로 하여 해석효율이 높은 반면 해의 정확도가 떨어지고 초기 자장의 수치 적분에 따른 시간 소모가 매우 크다는 단점^{2),3),4)} 이 있다.

그런데 1980년대 부터 전자계 해석을 기존의 벡터형 (Vectorial Form) 이 아닌 미분형 (Differential Form) 을 사용하여, 물리량의 물리적 성질에 따른 메트릭 (Metric) 을 부여함으로써 전자계 해석을 보다 용이하게 하려는 시도가 시작되었다.^{5),6),7),8)} 이와 같은 개념을 유한 요소법에 도입한⁹⁾ 한 방법이 해석 변수를 요소의 변에 설정하는 변 요소 (Edge Element) 에 의한 전자계 해석이다.

본 연구에서는 3 차원 정자계 해석을 변 요소를 이용하여 수행하고 사례 연구를 통해 그 유용성을 검토하였다.

2. 본론

2.1 변 요소의 도입

1 형 (1-form) 의 물리량은 다음과 같은 시험함수가 그 값을 잘 근사화 한다고 알려져 있다.

$$W_{i,j} = \lambda_i \nabla \lambda_j - \lambda_j \nabla \lambda_i \quad (1)$$

여기서 λ_i, λ_j 는 체적 좌표계에서 i, j 절점의 좌표이고, ∇ 는 gradient 를 나타낸다. 이 요소의 그림은 그림 1 과 같다. 이 $W_{i,j}$ 를 살펴보면 (j, i, k) 면에서는 수직이고, (i, i, k) 면에서도 수직이다. 그리고 그외의 면에서는 그 면에 평행이 된다. 그러므로 면과 면사이의 접선방향의 성분은 연속이 된다. 또한 $W_{i,j}$ 는

변 i, j 를 따라서 적분하면 그 값이 1 이 되고 다른 변을 따라서 적분하면 0 이 된다. 또한 이 요소에 divergence 를 취하면 그 값은 항상 0 이 된다.

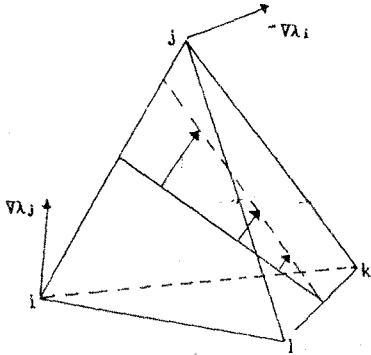


그림 1. 변 요소 $W_{i,j}$

이러한 성질을 전자계의 물리적 양에 이용하기 위하여 본 연구에서는 변에서의 A 의 적분값을 미지 변수로 택하였다. 이렇게 함으로써 A 의 물리적 성질인 접선 방향의 연속성을 요소의 성질로부터 만족 시켜 줄 수 있게 된다. 또한 $\text{div } A = 0$ 인 gauge 조건을 만족 시켜 줄 수 있다.

2.2 변 요소의 유한 요소 정식화

유한 요소법에 의한 정식화는 주로 가중 잔차법과 변분법에 의해 수행되는데 본 논문에서는 전자를 사용하였다 Maxwell 방정식으로 부터

$$\nabla \times H = J \quad (2)$$

가 되고

$$H = \nu B = \nu \nabla \times A \quad (3)$$

이므로

$$\nabla \times \nu \nabla \times A = J \quad (4)$$

가 된다. 여기서 양변에 시험함수 W 를 내적하면

$$\int W \cdot [\nabla \times \nu \nabla \times A - J] dv = 0 \quad (5)$$

가 된다. 여기에 벡터 공식을 사용하면,

$$\int \nu (\nabla \times A) \cdot (\nabla \times W) dv + \int W \cdot (\nabla \times \nu \nabla \times A) ds = \int j - w dv \quad (6)$$

식 (6) 에서 경계 적분은 H 와 n 이 평행인 면과 또는 A 의 값을 알고 있는 면의 경우에는 소멸된

다. 이러한 면을 경계로 잡으면 (6) 식은 다음과 같이 된다.

$$\int \nu (\nabla \times A) \cdot (\nabla \times W) dv = \int j - w dv \quad (7)$$

식(7)에서 알수 있듯이 기존의 F.E.M. 정식화와 같이 간단한 식이 된다.

3. 사례 연구

3.1 외부 자장을 가한 구자성체 모델

변 요소의 정확도와 유용성을 보이기 위해 이론해가 존재하는 문제를 해석해 보았다. 모델은 반지름이 6 [cm] 이고 상대 자기 투과율이 1000 인 자성체 구에 z 방향으로 1 [Tesla] 의 외부 자장이 가해진 문제이다.

이 모델은 대칭성을 고려하면 1/8 영역만 해석하면 된다. 모델도와 경계 조건은 그림 2 와 같다.

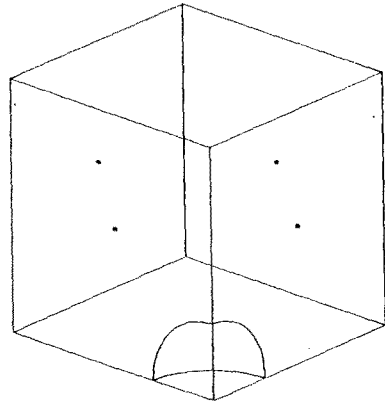


그림 2. 모델도

이 모델에서 윗면과 아랫면은 자장의 세기 H 와 면의 수직 벡터가 평행이므로 경계 적분 값이 소거되며 (Neumann 경계), \cdot 을 찍은 나머지 면에서는 그 면 상의 접선 방향으로의 A 의 값이 일정하다고 보면 변 요소에 따른 A 의 선 적분 값을 알 수 있다 (Dirichlet 경계). 이와 같이 경계를 설정할 경우 정식화에서와 같이 경계적분이 소거된다. 그림 3 은 모델 해석을 위해 자동 요소 방법으로 분할된 요소도이다. 이 때 절점수는 3426 개, 변 요소는 24515 개 이다. 그림 4 는 $y = 0$ 인 면에서의 자장의 분포를 나타낸 것이다. 화살표의 크기는 자장의 크기를 나타낸다. 그림 5 은 모델 전체에서의 자장의 분포이다. 역시 화살표의 크기가 자장의 크기를

다. 그림 6 은 $Z = 0$ 인 면에서 자성체 구 중심과 맞은 편 꼭지점을 따라서 자장의 Z 성분을 이론 해와 비교한 것이다. 이 비교에서 최대 오차의 범위가 5% 이하임을 알 수 있다.

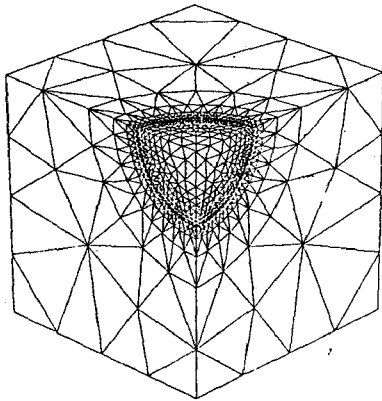


그림 3. 요소 분할도

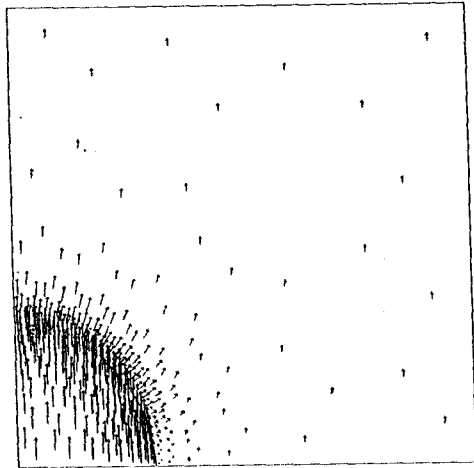


그림 4. $Y = 0$ 인 면에서의 자장 분포

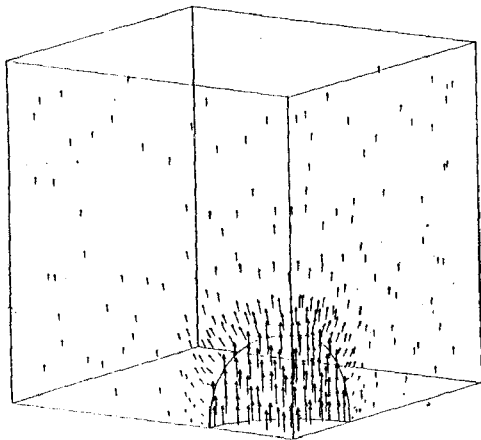


그림 5. 자장 분포

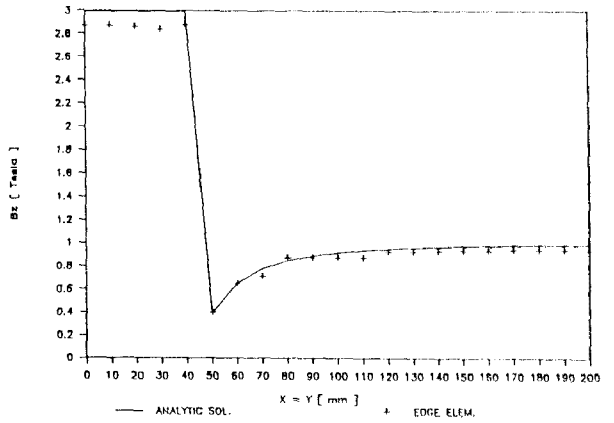


그림 6 이론해와의 비교

3.2 전류원 및 자성체가 있는 모델

변 요소가 결과적으로 만드는 식의 모든 항을 포함하는 문제를 해석해 보았다. 이 모델은 각이 진 전류원이 있고 그 안에 자성체의 육면체가 있는 문제이다. 이 모델도 기하학적 대칭성을 이용하여 1/8 만 해석하면 된다. 내부의 자성체의 상대 자기 투자율은 1000 이고 외부 전류원은 3000 [AT] 이다. 이 모델에 절점 2744 개 변 요소 13182 개로 그림 7 의 자장 분포를 얻을 수 있었다.

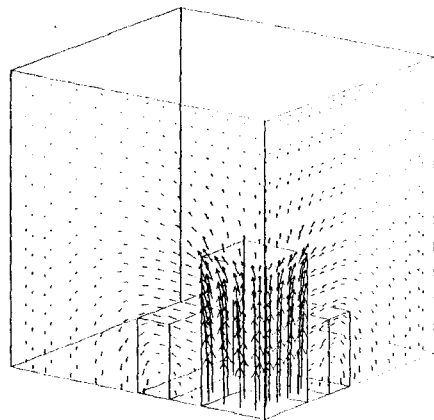


그림 7 자장 분포

4. 결 론

본 연구에서는 간단한 형태의 변 요소 정식화를 통해 3 차원 정자장 문제를 해석해 보았다.

변 요소의 수는 절점의 수의 약 7 배 정도가 된다. 그리고, 한 변 요소당 인접하는 변 요소는 약 13 개 정도이다. 그러므로 전체 0 이 아닌 항의 개수는 절점수의 약 91 배 정도이다. 한 절점당 3 개의 미지수를 취하는

전자장 문제 해석의 경우 전체 0 이 아닌 항의 수는 절점수의 100 배 정도임을 고려할 때, 같은 절점에 대해 기억 용량상의 이득을 얻을 수가 있다. 또한 첫 번째 모델의 경우 절점 780 개만으로도 오차 범위 7 - 8 % 이내의 해석 결과를 얻을 수 있었다. 이는 변 요소의 정확도를 보여 주는 것이다.

이렇듯 미분형 (DIFFERENTIAL FORM) 의 근사화는 좋은 결과를 예고해 준다. 전자장의 식을 미분형으로 나타내면 2 형식 (2 - Form), 3 형식 (3 - Form) 의 물리량이 존재하게 되는데, 이의 근사화를 위해 면 요소 체적 요소의 연구가 필요하다.

참고 문헌

1. M.L.Barton, Z.J.Cendes, : " New vector finite elements for three dimensional magnetic field computation ", J.Appl.Phys., vol.8, pp 3919-3921, 1987
2. J.Simkin, C.W. Trowbridge, " On the use of the total scalar potential in the numerical solution of field problems in electromagnetics ", Int. J. Num. Met. Engng., vol.14. pp 423-440, 1979

3. I.D. Mayergoyz, M.V.K. Chari, J.D'Angelo, " A new scalar potential formulation for three dimensional magnetostatic problems " , IEEE Trans., MAG-23, no.6, pp 3889-3894, November, 1987
4. S.Pissanetsky, " Solution of three dimensional anisotropic nonlinear problems of magnetostatics using two scalar potentials, finite and infinite multipolar element, and automatic mesh generation " , IEEE Trans. Magn., vol. MAG-18, pp 346-350, 1981
5. Alain Bossavit, " Whitney forms " , IEE Proc. vol. 135, Pt.A, no.8, November, 1988
6. D.Baldair, " Differential forms and electromagnetism in 3-dimensional Euclidean space R^3 " , IEE Proc. vol.133, Pt.A, no.3, May, 1986
7. Prof.P.Hammond, " Dual energy methods in electromagnetism using tubes and slices " , IEE Proc. vol. 135, Pt.A, no.3, March, 1988
8. G.A.Deschamps, " Electromagnetics and differential forms " , Proc. IEEE, 1981, 69, (6), pp. 676-696
9. Nedelec, J.C., " Mixed finite elements in R^3 " , Numer. Math., 1980, 35, pp. 315-341