블럭펄스 변환에 의한 비선형계의 준최적제어에 관한 연구

안 두 수* 김 종 부** 이 승*
* 성균관 대학교 전기공학과 ** 금성정보통신(주) 연구소

Suboptimal Control of Nonlinear Systems via Block Pulse Transformation

Ahn, Doo-Soo* · Kim, Jong-Boo** · Lee, Seung*
* S.K.K.Univ.Dept.of Elec.Eng. ** G.S.Information & Comunication Lab.

Abstract

This paper presents a method of sub-optimal control for nonlinear systems via block pulse transformation. The adaptive optimal control scheme proposed by J.P. Matuszewski is introduced to minimize the performance index. The proposed method is simple and computationally advantageous. Viablity of the this method is established with simulation results for the van der Pole equation for comparision with other methods.

1. 서론

제어 시스템의 해석, 설계 및 파라메타 추정등에 관한 연구에 블럭펄스 함수나 월쉬함수 등과 같은 직교함수가 널리 응용되고 있는데,[1-6] 이는 미·적분 방정식으로 표현되는 시스템의 제반 문제들을 대수적 접근 방식에 의해 쉽게 해결 할 수 있기 때문이다. 이들 직교함수에 의한 제어 시스템의 설계 등에 관한 연구는 선형계가 주를 이루고 있는데, 본 연구에서는 비선형계의 최적제어를 위해 블럭펄스 변환에 의한 대수적 최적 제어 접근 방법을 제시하고자 한다.

본 연구는 Matuszewski가 제시한 비선형계의 적응 최적 계획법[7]에 준하며, 블럭펄스 변환을 이용하여 최적 궤환 이득 행렬및 제어 입력을 반복적인 대수적 연산 과정에 의해 결정하므로써, 제어 시스템의 구현을 간편하게 할 수 있도록 한다.

2. 블럭펄스 변환

블럭펄스함수 $\phi_k(t)$ 는 $t \in [t_0, t_f]$ 에서 다음과 같이 정의된다.[1,2]

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_0, \Delta t] \\ 0, & \text{그외구간} \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\phi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in [(k-1)\Delta t, k\Delta t] \\ 0, & \text{그외구간} \end{cases} \tag{2.2}$$

단, $k = 2, 3, \cdots\cdots m$, $\Delta t = \dfrac{t_f - t_0}{m}$

임의함수 $x(t)$ 는 m개의 블럭펄스함수로 다음과 같이 유한 급수 전개된다.

$$x(t) \simeq \sum_{k=1}^{m} X_k \, \phi_k(t) \tag{2.3}$$

$$X_k = \int_{t_0}^{t_f} x(t) \, \phi_k(t) \, dt$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} x(t) \, dt$$

$$\simeq \frac{1}{2} \left[x(k\Delta t) + x[(k-1)\Delta t] \right] \tag{2.4}$$

블럭 펄스 함수의 적분 역시 m개의 블럭 펄스 함수로 다음과 같이 표현된다.

가) 정방향 적분인 경우[1,2,6]

$$\int_{t_0}^{t} \phi(\tau) d\tau \simeq P\phi(t) \tag{2.5}$$

$$\int_{t_0}^{t} \phi_k(\tau) d\tau \simeq \frac{\Delta t}{2} \phi_k(t) + \Delta t \sum_{i=k+1}^{m} \phi_i(t) \tag{2.6}$$

나) 역방향 적분인 경우[1,6]

$$\int_{t}^{t_f} \phi(\tau) d\tau \simeq -P^T \phi(t) \tag{2.7}$$

$$\int_{t}^{t_f} \phi_k(\tau) d\tau \simeq -\frac{\Delta t}{2} \phi_k(t) - \Delta t \sum_{i=1}^{k-1} \phi_i(t) \tag{2.8}$$

단,

$$\phi^T(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_m(t)]$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & \cdots\cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & \cdots\cdots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

이와 같은 블럭 펄스 함수의 특성을 이용하면 미분 방정식을 그에 상응한 대수 방정식으로 변환할 수 있다.

다음의 n 차 상태 방정식에서

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t) \qquad (2.9)$$

$$x(t_0) = x_0$$

상태 궤환에 의한 제어벡터가 다음과 같다고 하면

$$u(t) = G(t)x(t) \qquad (2.10)$$

식 (2.9)는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}(t) = \hat{A}(t)x(t) \qquad (2.11)$$

$$x(t_0) = x_0$$

단, $\hat{A}(t) = A(t) - B(t)G(t)$

식 (2.11)의 양변에 적분을 취하면 다음과 같다.

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \hat{A}(t)x(\tau)d\tau \qquad (2.12)$$

상태벡터 및 시스템 파라메터를 m개의 블럭펄스 함수로 유한 급수 전개하면 다음과 같다.

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} X_k \phi_i(t) \qquad (2.13)$$

$$\hat{A}(t) = \sum_{k=1}^{m} \hat{A}_k \phi_i(t) \qquad (2.14)$$

단, $\hat{A}_k = [\hat{A}_{1k}\ \hat{A}_{2k}\ \cdots\cdots\ \hat{A}_{nk}]$

$\hat{A}_{ik}$ 는 $\hat{A}(t)$ 의 i번째 열에 대한 k번째 블럭 펄스 계수를 의미한다.

또한 블럭 펄스 함수는 다음과 같은 특성이 있다.[1,6]

$$\phi_i(t)\phi_j(t) = \begin{cases} \phi_i(t), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad (2.15)$$

따라서 두 함수의 곱인 $\hat{A}(t)x(t)$ 는 다음과 같이 간단화 할 수 있게된다.[1]

$$\hat{A}(t)x(t) = \left[\sum_{i=1}^{m} \hat{A}_i \phi_i(t)\right]\left[\sum_{j=1}^{m} X_j \phi_j(t)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \hat{A}_k X_k \ \phi_k(t) \qquad (2.16)$$

이상의 식 (2.13)-(2.16)의 관계 및 식(2.6)을 식(2.12)에 도입하고

$$\sum_{k=1}^{m} [X\phi_k(t) - x_0\phi_k(t)] = \sum_{k=1}^{m} \hat{A}_k X_k \int_0^t \phi_k(\tau)d\tau$$

$$= \Delta t \sum_{k=1}^{m} [\hat{A}_k X_k \ (½\phi_k(t) + \sum_{l=k+1}^{m} \phi_l(t))] \qquad (2.17)$$

위 식에서 각 $\phi_k(t)$에 대한 계수에 대해서 정리하면 다음과 같다.

$$X_1 - x_0 = \Delta t/2\ \hat{A}_1 X_1 \qquad (2.18)$$

$$X_{k-1} - x_0 = \Delta t/2 \hat{A}_{k-1} X_{k-1} + \sum_{l=k}^{m} \hat{A}_l X_l \qquad (2.19)$$

$$X_k - x_0 = \Delta t/2 \hat{A}_k X_k + \sum_{l=k+1}^{m} \hat{A}_l X_l \qquad (2.20)$$

식 (2.20)에서 (2.19)를 빼면 X_k에 대한 반복 연산 알고리즘을 구할수 있으며 정리하면 다음과 같다.

$$X_1 = [I - \Delta t/2\hat{A}_1]^{-1} x_0 \qquad (2.21)$$

$$X_{k+1} = [I - \Delta t/2\hat{A}_k]^{-1}\ (I + \Delta t/2\hat{A}_{k-1})X_{k-1} \qquad (2.22)$$

단, $k = 2, 3, 4, \cdots\cdots, m$

따라서 식 (2.9) 및 (2.11) 로 표현된 상태 방정식이 식 (2.21) 및 식(2.22) 의 대수 방정식으로 변환됨을 알 수 있다.

3. 비선형계의 준최적제어

물리계가 다음의 비선형 미분방정식으로 표현될 때

$$\dot{x}(t) = f(x, u, a, t) \qquad (3.1)$$

$$x(t_0) = x_0$$

Pearson[8]이 제시한 방법에 따라 다음과 같이 나타낸다.

$$\dot{x}(t) = A(x, a, t)x(t) + B(x, a, t)u(t) \qquad (3.2)$$

다음 식으로 주어지는 평가함수를 최소화하는

$$J = (1/2)\int_{t_0}^{t_f} (\ x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R\ u(t))dt \quad (3.3)$$

비선형계의 최적제어입력은

$$u(t) = G(x, a, t)x(t) \qquad (3.4)$$

와 같은 형태로 표현된다.

만일 시스템 행렬 A와 B가 x(t)의 함수가 아니라고 하면 주어진 시스템은 선형계가 되므로 이 때의 최적 제어 입력은

$$u(t) = -R^{-1}B^T \lambda(t) \qquad (3.5)$$

$$\lambda(t) = K(t)x(t) \qquad (3.6)$$

이고, K(t)는 다음의 행렬 리카티 미분방정식을 만족하는 해이다.

$$\dot{K}(t) + K(t)A + A^T K(t) - K(t)BR^{-1}K(t) + Q = 0 \qquad (3.7)$$

본 연구에서는 Matuzewski의 적응형 최적 계획법에 의하여 비선형계 최적제어에 접근한다. Matuzewski의 최적계획법은 다음과 같다.[7]

첫째, 식(3.1) 로 표현되는 비선형계를 식(3.2) 와 같이 모델링 하고 둘째, 현 시점 t_i에서 상태벡터 값을 $x(t_i)$ 로 일정하다고 가정하여 식(3.2)의 시스템 행렬 A와 B를 $A(t_i)$,$B(t_i)$인 상수행렬로 처리한다.

셋째, $t \in [t_i, t_f]$에서 식(3.5),(3.6)을 만족하는 최적제어 벡터를 구한다.

새로운 시점 t_i에 도달할 때 까지의 시간 동안에는 위에서 구한 최적제어 입력에 의해 비선형계를 제어하며, 새로운 시점 t_i에 이르면 새로운 초기 상태 $x(t_i)$ 및 시변 파라메터 $a(t_i)$를 수정하여 시스템행렬을 다시 계산하고 위의 과정을 반복 적용하며 t_f에 이르기 까지 계속 한다.

4. 블럭펄스 변환에 의한 비선형계의 준최적제어

시점 t_i에서 식(3.2)로 표현되는 비선형계를 다음과 같이 나타낸다.

$$\dot{x}(t)=A(t_i)x(t)+B(t_i)u(t) \qquad (4.1)$$

$$x(t_i)=x_0$$

$A(t_i)$와 $B(t_i)$는 시점 t_i에서 $x(t_i)$ 및 $a(t_i)$가 일정한 값을 취하게 되므로, 시불변 시스템 행렬이며,식(3.3)을 최소화 하는 최적제어 벡터는 최대 원리에 의해

$$u(t) = -R^{-1}B^T(t_i)\lambda(t) \qquad (4.2)$$

$$\dot{\lambda}(t)=-Qx(t)-A^T(t_i)\lambda(t) \;,\; \lambda(t_f)=0 \qquad (4.3)$$

와 같다. 위 식들로부터 다음의 관계 즉,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t_i) & -B(t_i)R^{-1}B^T(t_i) \\ -Q & -A^T(t_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

를 알 수 있으며, 이를 편의상 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \qquad (4.5)$$

단,

$$F = \begin{bmatrix} A(t_i) & -B(t_i)R^{-1}B^T(t_i) \\ -Q & -A^T(t_i) \end{bmatrix}$$

식(4.5)에 대한 상태 천이 행렬을 다음과 같이 표현할때

$$\Phi(t_f) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t_f,t) & \Phi_{12}(t_f,t) \\ \Phi_{21}(t_f,t) & \Phi_{22}(t_f,t) \end{bmatrix} \qquad (4.6)$$

$$\Phi(t_f,t_f) = I$$

상태 천이 행렬은

$$\dot{\Phi}(t_f,t) = -\Phi(t_f,t)F \qquad (4.7)$$

의 특성을 갖고 있다. 위 식의 양변에 적분을 취하면 다음과 같고

$$I - \Phi(t_f,t) = \int_{t_f}^{t} \Phi(t_f,\tau)\, F\, d\tau \qquad (4.8)$$

또한 식 (4.5),(4.6)을 이용하면 다음의 관계로 부터

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ \lambda(t_f) \end{bmatrix} = \Phi(t_f,t) \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \qquad (4.9)$$

$\lambda(t_f) = 0$ 이므로 $\lambda(t)$는

$$\lambda(t) = -\Phi_{22}^{-1}(t_f,t)\Phi_{21}(t_f,t)x(t) \qquad (4.10)$$

임을 알 수 있으며, 식 (3.6)과, 식 (4.10)으로 부터

$$K(t) = -\Phi_{22}^{-1}(t_f,t)\Phi_{21}(t_f,t) \qquad (4.11)$$

의 관계를 알 수 있다.

여기서 $\Phi(t_f,t)$와 $K(t)$를 블럭펄스함수 m개로 유한급수 전개하고

$$\Phi(t_f,t)=\sum_{k=1}^{m}\Phi_k\phi_k(t) \qquad (4.12)$$

$$\Phi_{ij}(t_f,t)=\sum_{k=1}^{m}\Phi_{ijk}\phi_k(t) \qquad (4.13)$$

$$K(t)=\sum_{k=1}^{m}K_k\phi_k(t) \qquad (4.14)$$

식 (4.8)에 블럭펄스함수 및 2장의 식 (2.8) 의 관계를 도입하면 상태 천이 행렬에 대한 k번째 블럭펄스 계수행렬은 다음과 같다.

$$\Phi_m = [\; I-\Delta tF/2 \;]^{-1} \qquad (4.15)$$

$$\Phi_k = \Phi_{k+1}\,[\; I+\Delta tF/2 \;]\,[\; I-\Delta tF/2 \;]^{-1} \qquad (4.16)$$

단, $k = m-1, m-2, \cdots, 1$

또한, 식(4.11)의 리카티 방정식의 해 $K(t)$에 대한 블럭펄스 계수는

$$K_k = \Phi_{22k}^{-1}\Phi_{21k} \qquad (4.17)$$

이고, 식 (4.1)은 식 (3.6)으로 부터

$$\dot{x}(t) = [A(t_i)-B(t_i)R^{-1}B^T(t_i)K(t)]x(t) \qquad (4.18)$$

$$x(t_i) = x_0$$

이므로 양변에 적분을 취하고 2장의 블럭펄스 변환에 의한 상태 방정식 해법을 도입하면 상태벡터 $x(t)$의 k번째 계수벡터 X_k를 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$X_1 = [\; I-\tilde{A} \;]^{-1}x_0 \qquad (4.19)$$

$$X_k = [\; I-\tilde{A}_k \;]^{-1}[\; I+\tilde{A}_{k-1} \;]^{-1}X_{k-1} \qquad (4.20)$$

단, $\tilde{A}_k = [A(t_i)-B(t_i)R^{-1}B^T(t_i)K_k]$

그러므로, 최적 제어 벡터의 블럭 펄스 계수는 다음과 같다.

$$U_k = -R^{-1}B^T(t_i)K_kX_k \qquad (4.21)$$

그런데, 위 식의 U_k는 $t\in[t_i,t_f]$ 에서의 값으로 새로운 시점에 도달했을 때는 시스템 행렬 $A(t_i), B(t_i)$가 새롭게 수정되므로, 새로운 시점에 도달하기 전까지, 즉 $t\in[t_i,t_i+\Delta t]$에서만 유용하다.

정의구간 $t\in[t_0,t_f]$를 m개로 세분하여 $\Delta t=(t_f-t_0)/m$으로 하고 블럭 펄스 전개항 수를 m으로 할 경우, 새로운 시점에서의 초기 상태 벡터 $x(t_i)$는

$$x(t_i) = 2X_1-x(t_i-\Delta t) \qquad (4.22)$$

로 수정되며, 적용되는 구간 $t\in[t_i,t_f]$에서의 블럭펄스 전개항수는 m-i가 된다.

5. 적용 예

다음과 같이 표현되는 비선형 미분 방정식은

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1-x_1^2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad (5.1)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (5.2)$$

외부에서 신호를 가하지 않아도 자체적인 변화에 의해 스스로 지속적인 진동을 일으키는 자려발진(self-excited oscillation)의 물리적 현상을 모델링한 수식으로 Van der Pol 방정식[7-12]으로 알려져 있다.

표는 식 (3.3)에서 Q=I, R=1 이고, $t_0=0$, $t_f=5$초 그리고, 블럭펄스 전개항 수를 m = 50으로 했을 경우 즉 $t\in[0,5]$ 구간에서 $\Delta t=0.1$로 하였을 때 본 연구 및 다른 접근방식에 의한 평가함수 값을 나타낸다.

6. 결 론

비선형계의 준최적제어를 위해 Matuszewski에 의해 제시된 적응형 최적 계획법을 응용 하였다.

먼저 비선형계를 선형계의 모델 표현식으로 변환하고, 시스템 행렬에 포함된 시변 파라메타와 상태벡터를 계산 시점 t_i 에서 일정한 값으로 가정하여 $t\in[t_i,t_f]$인 구간에서 최적 제어 입력을 구하고, 이를 이용하여 새로운 시점에 도달할 때 까지 비선형계를 제어하도록 하였다.

새로운 시점에서의 시스템 행렬은 그 이전의 데이타들로 부터 새롭게 수정되도록 하며 이를 최적제어에 이용하고, $t_i = t_f$가 될때까지 반복 하였다.

시점 t_i에서의 최적제어 입력은 비선형 행렬 미분방정식인 리카티 방정식의 해를 직접 구할 필요없이, 표준형 방정식에 블럭펄스 변환을 도입하여 간단한 대수 방정식의 반복적인 연산에 의해 결정할 수 있도록 하였다.

본 연구의 방법은 컴퓨터를 이용한 앨고리즘개발이 쉽고, 시변 궤환이득의 결정이 간편하지만, 적용에에서의 평가함수값을 비교해 보면 알수 있듯이 다른 방법에 비해 결과가 우수하지 못하므로 향후 이의 개선 방법에 관한 연구가 있어야 할 것이다.

Reference

1. N.S.Hsu, "Analysis and optimal control of Time-varying linear systems via block-pulse functions", Int.J.Control, Vol.33, pp.1107-1122, 1981
2. N.K.Sibnha, " Some system theory applications of block pulse functions" Canada Elect.Eng.J.Vol.10, pp.3-8, 1985
3. 안 두수, 심 재선, 이 명규, "월쉬 급수 전개에 의한 분포 정수계의 해석에 관한 연구", 대한전기학회 논문지 35권 3호, pp.95-101, 1986
4. 안 두수, 채 영무, 이 명규, " Haar함수를 이용한 시스템 동정에 관한 연구", 대한전기학회 논문지, 36권 4호, pp.287-292, 1987
5. 안 두수, 배 종일, 이 명규, " 선형계의 차수및 파라메타 추정을 위한 월쉬함수 접근 ", 대한전기학회 논문지, 38권 2호, pp.137-143, 1989
6. 이 명규, " 분포정수계의 분산형 최적제어에 관한 연구 ", 성균관대학교 박사학위논문, 1989
7. J.P.matuszewski, " Suboptimal terminal feedback control of non-stationary, nonlinear systems", IEEE Aut.Control, Vol.18 pp.371-274, 1973
8. J.D.Pearson, " Approximation methods in optimal control ", J.Electron Control Vol.13, pp.435-469, 1962
9. W.L.Garrard, " An approach to suboptimal feedback control of nonlinear systems ", Int.J.Control, Vol. 5, pp.425-435, 1967
10. J.H.Burghart, "A technigue for suboptimal feedback systems", IEEE Aut.Control, Vol.14, pp.530-532, 1969
11. M.S. Mahmoud, " Closed-loop multilevel Control of large nonlinear systems via invariant imbedding technigues", Comput.Elect.eng.Vol.4, pp.3-23, 1977
12. K.D.Permar, "Adaptive optimal hierarchical control of nonstationary nonlinear large systems", Comput. Elect.Eng, Vol.10, pp.51-57, 1983