

# 천이행렬과 전압 미분을 이용한 전력계통의 과도 안정도 해석

박 영문 김 광원  
서울대학교 공과대학 전기공학과

## POWER SYSTEM TRANSIENT STABILITY ANALYSIS USING TRANSITION MATRIX AND VOLTAGE DERIVATIVES

Young Moon Park, Gwang Won Kim  
Dept. of Electrical Engineering, Seoul National University

Abstract - For transient stability analysis of a power system, the new method using transition matrix is introduced in this paper.

At the present time, Runge-Kutta, Modified-Euler and Trapezoidal methods have been very popular in most stability programs, Modified-Euler and Trapezoidal methods are inferior in accuracy and Runge-Kutta method has problems in computation time.

The proposed algorithm requires transition matrix and its integrated values with derivatives of nonlinear parts in nonlinear differential equations for stability analysis.

The method presented in this paper is between Modified-Euler and Runge-Kutta methods from the view point of computation time and is superior to the other methods in accuracy.

### 1. 서론

전력 계통의 제어, 운영 또는 계획에 있어서 계통에 발생한 외란에 의해 계통이 불안정해질 것인가 또는 안정을 유지할 것인가를 밝히는 동태안정도해석 문제는 중요한 부분을 차지하고 있고 오래 전부터 연구되어 온 분야이다. 전력계통의 제어에 관계되는 문제들은 근래의 전력계통규모가 대형화되고 그 구조가 복잡해짐에 따라 좀 더 복잡한 문제로 대두되고 있으며 현실적인 해결 방안을 찾는 데 어려움을 지니고 있다.

동상 과도 안정도 해석은 전력 계통의 갑작스럽고 심각한 외란이 발생한 경우, 수 초 이내의 해석 시간에서 발전기의 과도적 전기-기계적인 현상을 해석하는 것으로서 발전기의 탈조 또는 회로 차단기의 동작등을 알 수 있게 한다.

수치적분을 이용한 동특성해석 방법에는 여러가지가 있으나 동상 Modified-Euler 법, Trapezoidal 법 또는 Runge-Kutta 법 등이 사용되고 있고 이중 Runge-Kutta 법이 대표적이라고 할 수 있다. 본 논문에서는 수치적분의 방법중에서 비선형 요소에도 적용할 수 있는 천이 행렬을 이용하여 계산의 정도를 높이는 방법을 제시하였다. 이 방법에서는 계산 구간에서 전압값이 고정되어 있지 않다고 보기 때문에 계산구간을 늘리더라도 어느 정도 참 값에 가까운 결과를 낼 수 있다. 그리고 사례 연구에 나타냈듯이 구간당 계산 시간도 Runge-Kutta 방법보다 많이 걸리지 않는다.

### 2. 문제 제시

전력계통의 동태 안정도 문제는 다음의 미분 방정식을 푸는 문제로 귀결된다.

$$\dot{X}(t) = AX(t) + p + g(t)$$

위의 식에서  $g(t)$  는 상태변수의 미분항중에서 상태변수와 선형 관계에 있지 않은 부분이고 상태변수  $X(t)$  와 전압의 크기  $V(t)$ , 위상  $\theta(t)$ 의 함수이다. 그리고, Taylor 급수의 전개에 의해 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$X(t+\tau) = X(t) + \dot{X}(t)\tau + \ddot{X}(t)\tau^2/2! + \dddot{X}(t)\tau^3/3! + \dots$$

한편

$$\dot{X}(t) = AX(t) + p + g(t)$$

$$\begin{aligned} \ddot{X}(t) &= A\dot{X}(t) + \dot{g}(t) \\ &= A^2X(t) + A(p + g(t)) + \dot{g}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dddot{X}(t) &= A\ddot{X}(t) + \ddot{g}(t) \\ &= A^3X(t) + A^2(p + g(t)) + A\dot{g}(t) + \ddot{g}(t) \end{aligned}$$

⋮

⋮

위의 식을 Taylor 급수의 전개식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

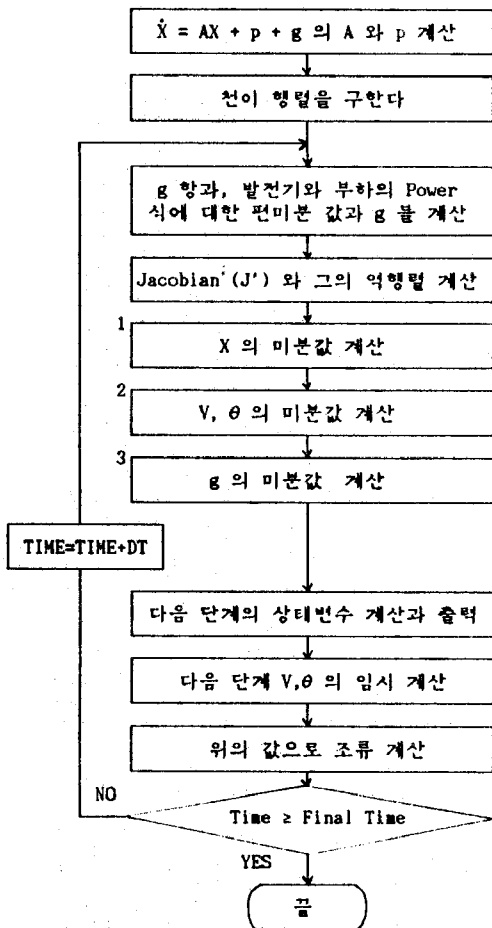
$$\begin{aligned} X(t+\tau) &= (I + A\tau + A^2\tau^2/2! + \dots)X(t) \\ &+ (I\tau + A\tau^2/2! + A^2\tau^3/3! + \dots)(p+g(t)) \\ &+ (I\tau^2/2! + A\tau^3/3! + A^2\tau^4/4! + \dots)\dot{g}(t) \\ &+ (I\tau^3/3! + A\tau^4/4! + A^2\tau^5/5! + \dots)\ddot{g}(t) \\ &+ \dots \\ &= \phi_{-1}X(t) + \phi_0(p+g(t)) + \phi_1\dot{g}(t) + \phi_2\ddot{g}(t) + \dots \end{aligned}$$

위의 결과에 의하면 A의 무한차에 대한 천이행렬과 g의 무한차까지의 미분값을 알 경우에 다음 단계에서의 상태변수 값을 정확히 알 수 있을 뿐 아니라 계산 구간도 임의로 잡을 수 있다. 그러나 실제의 경우에 불가능한 일이다.

한편 A는 시간의 함수가 아니므로 계산의 시작에 앞서서 계산 구간에 따라 충분히 높은 차수로 천이행렬을 잡을 수 있으나 g의 미분식은 차수가 높아짐에 따라 항의 수가 기하 급수적으로 증가하므로 계산의 시간과 프로그램의 어려움이 야기되어 고차원의 이용이 실용적이라고 할 수 없다. 그래서 적절한 차수를 결정하기 위하여 본 연구에 앞서 발전기 동요 방정식만을 이용한 미분 방정식에 이 이론을 적용해 본 결과 g의 3차 미분값까지 고려한 결과가 Runge-Kutta의 경우보다 정확하였고 다행히도 실제의 문제에 적용하는데 있어서 3차까지는 g의 미분식이 그리 복잡하지 않으므로 본 논문에서는 A의 20차까지의

천이 행렬을 구성하였고  $g$  의 3차 까지의 미분치를 고려하였다.

다음에 전체적인 흐름도를 나타내었다. 앞으로 이 흐름도를 바탕으로 천이 행렬의 구성에서부터 각 단계가 어떻게 구현되었는지 살펴보기로 하자.



1, 2, 3 은 필요한 차수 만큼 계산한다. ( LOOP )

### 3. 문제의 해결

#### 3.1 천이 행렬

천이 행렬은 앞서의 식으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Phi_{-1} &= I + A\tau + A^2\tau^2/2! + A^3\tau^3/3! + \dots \\ \Phi_0 &= \tau I + A\tau^2/2! + A^2\tau^3/3! + A^3\tau^4/4! + \dots \\ \Phi_1 &= \tau^2 I/2! + A\tau^3/3! + A^2\tau^4/4! + A^3\tau^5/5! + \dots \\ \Phi_2 &= \tau^3 I/3! + A\tau^4/4! + A^2\tau^5/5! + A^3\tau^6/6! + \dots \\ \Phi_3 &= \tau^4 I/4! + A\tau^5/5! + A^2\tau^6/6! + A^3\tau^7/7! + \dots \end{aligned}$$

보통  $\dot{X} = AX + b$  의 선형 문제에 있어서는 천이 행렬 중  $\Phi_{-1}$  과  $\Phi_0$  만 구하면 정확한 해를 알 수 있지만

우리의 문제는 비선형이므로 그 이상의 비선형 천이 행렬이 필요하게 된다.

본 논문에서는  $g$  의 3차 미분까지를 고려한다고 하였으므로  $\Phi_3$  까지 계산해 놓으면 된다.

한편 천이 행렬간에는 고차의 천이 행렬이 저차의 천이 행렬의 격분치가 되는 관계가 있으므로 저차의 천이 행렬을 구하고 이로부터 차례로 고차의 천이 행렬을 구할 수 있으나 그 경우에는 행렬 A 의 역행렬을 구해야 하는 문제가 생기게 되므로 우리가 원하는 최고 차의 천이 행렬을 먼저 구하고 이에 의해서 저차의 천이 행렬을 구하는 방법이 더 효율적이다. 따라서 우리는  $\Phi_3$  을 위의 식에서 구하고 나머지는 다음의 식에 따라서 구하면 된다.

$$\Phi_2 = A\Phi_3 + \tau^3 I/3!$$

$$\Phi_1 = A\Phi_2 + \tau^2 I/2!$$

$$\Phi_0 = A\Phi_1 + \tau I$$

$$\Phi_{-1} = A\Phi_0 + I$$

#### 3.2 상태변수 X(t) 의 미분값

X(t) 의 미분값은 주어진 식으로부터 구할 수 있다.

즉,  $\dot{X}(t) = AX(t) + p + g(t)$  로부터  $\dot{X}(t)$  를 구할 수 있고 이  $\dot{X}(t)$  를 이용해서  $\ddot{g}(t)$  를 구한다. 그러면  $\ddot{X}(t) = A\dot{X}(t) + \ddot{g}(t)$  로부터  $\ddot{X}(t)$  를 얻는다. 계속해서  $\ddot{X}(t)$  는  $\ddot{g}(t)$  를 구하는데 사용되고  $\ddot{X}(t)$  는  $\ddot{X}(t) = A\ddot{X}(t) + \ddot{g}(t)$  로부터 구해진다. 이렇게 얻어진  $\ddot{X}(t)$  는  $\ddot{g}(t)$  를 구하는데 쓰이게 된다.

이렇듯 X(t) 의 미분치를 구하기는 쉽지만 g(t) 의 미분치를 구하는 데는 이것 이외에 전압의 크기와 위상의 미분치가 필요한데 그 과정은 그리 간단하지가 않다. 이에 대해 다음에서 알아보자.

#### 3.3 전압의 크기 (V(t)) 와 위상 (theta(t)) 의 미분값

##### 3.3.1 일차의 미분값

일반적으로 모선에서 발전되는 Power 는 부하에서 소모되는 Power 와 계통으로 유입되는 Power 의 합으로 나타내어 질 수 있다.

$$P^* = P_L + P_N$$

$$Q^* = Q_L + Q_N$$

$P^*, Q^*$  : 발전되는 유효, 무효 전력으로 발전기가 속해 있는 모선의 전압과 발전기 상태변수의 함수.

$P_L, Q_L$  : 부하에서 소모되는 유효, 무효 전력으로 부하가 속해 있는 모선의 전압의 함수.

$P_N, Q_N$  : 계통으로 유입되는 유효, 무효 전력으로 모든 모선의 전압의 함수이다.

따라서 위의 식의 양변을 미분한다는 말은 다음과 같은 의미가 된다.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Omega} (x_i P^{*1} \dot{X}_i + v_i P^{*1} \dot{V}_i + \theta_i P^{*1} \dot{\theta}_i) \\ = v_i P^L \dot{V}_i + \theta_i P^L \dot{\theta}_i + v_i P^N \dot{V}_i + \theta_i P^N \dot{\theta}_i \end{aligned}$$

위에서 P 의 왼쪽 첨자는 그 첨자에 대해서 편미분한다는 것을 나타낸다.  $V_i, \theta_i$  는 i 모선의 전압을 의미하고  $V, \theta$  중 첨자가 없는 것은 벡터를 의미한다. 그리고 위의 식은 i 모선의 경우에 대해서 표현한 경우인데 변수 i 는 i 모선에 있는 발전기를 나타낸다. 따라서  $X_i$  는 i 모선에 있는 i 발전기의 상태 벡터이고  $X_{ij}$  가 그 벡터의 j 번째 원소를 의미한다.

모든 모선에 대하여 위의 식을 세우고 무효 전력에 대해서도 같은 작업을 한 후에 전압의 일차 미분값을 구하는 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{V} \end{bmatrix} = J'^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{l \in \textcircled{1}} \sum_{i=1}^2 (x_{li} P^{s1} \dot{X}_{li}) \\ \vdots \\ \sum_{l \in \textcircled{2}} \sum_{i=1}^2 (x_{li} Q^{s1} \dot{X}_{li}) \end{bmatrix}$$

여기서 J' 는 다음과 같다.

$$J' = \begin{bmatrix} JA & | & JB \end{bmatrix}$$

$$JA = \begin{bmatrix} \bullet_1 P^{N1} + (\bullet_1 P^{L1} - \sum_{l \in \textcircled{1}} \bullet_1 P^{s1}) \dots \bullet_n P^{N1} \\ \vdots \\ \bullet_1 Q^{Nn} \dots \bullet_n Q^{Nn} + (\bullet_n Q^{Ln} - \sum_{l \in \textcircled{2}} \bullet_n Q^{s1}) \end{bmatrix}$$

$$JB = \begin{bmatrix} v_1 P^{N1} + (v_1 P^{L1} - \sum_{l \in \textcircled{1}} v_1 P^{s1}) \dots v_n P^{N1} \\ \vdots \\ v_1 Q^{Nn} \dots v_n Q^{Nn} + (v_n Q^{Ln} - \sum_{l \in \textcircled{2}} v_n Q^{s1}) \end{bmatrix}$$

이 형태에서 전압의 일차 미분치를 구하는데 어려운 점은 없다. J' 는 이후에도 여러번 역행렬 형태로 쓰이므로 흐름도의 앞부분에서 미리 계산해놓았고 발전기의 출력과 부하에 대해서는 그 편미분식을 프로그램에 넣어서 그 때의 물리량으로 편미분값을 계산하므로 문제가 없다. 그리고 위의식에서 상태변수에 대한 편미분을 i=1,2 로 잡은 이유는 발전기 출력이 상태 변수중에서 δ 와 eq' 의 함수이기 때문이다.

### 3.3.2 이차와 삼차의 편미분

전압의 이차 편미분 값을 얻기 위해서는 위의 일차식의 양변을 한번 더 미분하여 좌변에 구하는 값이 오도록 정리하면 되고 삼차의 편미분 값을 얻기 위해서는 이차에 대해 그 과정을 행하면 된다. 그 결과 전압의 이차와 삼차를 구하는 식은 다음과 같다.

2 차의 경우

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{V} \end{bmatrix} = J'^{-1} \begin{bmatrix} B - \sum_{i=1}^n [\bullet_i J' \ddot{\theta}_i + v_i J' \ddot{V}_i] \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{V} \end{bmatrix}$$

여기서 벡터 B 의 첫 원소는 다음과 같다.

$$\sum_{l \in \textcircled{1}} \left( \sum_{i=1}^2 x_{li} P^{s1} \ddot{X}_{li} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_{li} x_{lj} P^{s1} \dot{X}_{li} \dot{X}_{lj} + 2 \sum_{i=1}^2 v_{li} x_{li} P^{s1} \dot{V}_i \dot{X}_{li} + 2 \sum_{i=1}^2 \bullet_{li} x_{li} P^{s1} \dot{\theta}_i \dot{X}_{li} \right)$$

3 차의 경우

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{V} \end{bmatrix} = J'^{-1} \left[ C - \sum_{i=1}^n [\bullet_i J' \ddot{\theta}_i + v_i J' \ddot{V}_i] \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{V} \end{bmatrix} - 2 \sum_{i=1}^n [\bullet_i J' \dot{\theta}_i + v_i J' \dot{V}_i] \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{V} \end{bmatrix} - D \right]$$

여기서 벡터 D 는 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ v_i v_j J' \dot{V}_i \dot{V}_j + v_i \bullet_j J' \dot{V}_i \dot{\theta}_j + \bullet_i \bullet_j J' \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \right] \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{V} \end{bmatrix}$$

그리고 벡터 C 의 첫 원소는 다음과 같다.

$$\sum_{l \in \textcircled{1}} \left[ \sum_{i=1}^2 x_{li} P^{s1} \ddot{X}_{li} + 3 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_{li} x_{lj} P^{s1} \dot{X}_{li} \dot{X}_{lj} + 3 \sum_{i=1}^2 v_{li} x_{li} P^{s1} (\dot{X}_{li} \dot{V}_i + \dot{X}_{li} \dot{V}_i) + 3 \sum_{i=1}^2 \bullet_{li} x_{li} P^{s1} (\dot{X}_{li} \dot{\theta}_i + \dot{X}_{li} \dot{\theta}_i) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 x_{li} x_{lj} x_{lk} P^{s1} \dot{X}_{li} \dot{X}_{lj} \dot{X}_{lk} + 3 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 v_{li} x_{li} x_{lj} P^{s1} \dot{X}_{li} \dot{X}_{lj} \dot{V}_k + 3 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \bullet_{li} x_{li} x_{lj} P^{s1} \dot{X}_{li} \dot{X}_{lj} \dot{\theta}_k + 3 \sum_{i=1}^2 v_{li} v_{lj} x_{li} P^{s1} \dot{X}_{li} \dot{V}_i \dot{V}_j + 3 \sum_{i=1}^2 \bullet_{li} \bullet_{lj} x_{li} P^{s1} \dot{X}_{li} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j + 6 \sum_{i=1}^2 \bullet_{li} v_{lj} x_{li} P^{s1} \dot{X}_{li} \dot{V}_i \dot{\theta}_j \right]$$

위의 식으로부터 결과를 얻기 위해서는 발전기 출력과 부하의 편미분값 뿐만 아니라 J' 의 편미분값이 필요하게 된다. 한편, J' 중에서 발전기 출력과 부하에 대한 부분은 배내어 미리 계산할 수 있다. 그러면 결국 Jacobian 행렬에 대한 일계와 이계의 편미분을 하면 된다. 이에 대해서 Jacobian 의 편미분은 Jacobian 내에 존재하므로 별도의 계산없이 수치의 대입으로 얻을 수 있다.

### 3.4 비선형부분 g 의 미분값

비선형 부분인 g 는 상태변수와 전압의 함수이다. 따라서 그의 미분값은 아래와 같이 편미분 식으로 나타낼 수 있다. 이에 사용되는 상태변수와 전압의 미분값은 앞단계에서 구한 값을 사용한다. 이에 있어서도 g 는 상태변수 중에서 δ 와 eq' 의 함수 이므로 i=1,2 를 사용하였다. 그리고 이경우에 발전기는 1 모선에 연결되어 있다고 보자.

아래의 기호에서 g 의 좌변 첨자는 g 들 그 첨자에 대해 편미분한 것을 의미한다.

$$\dot{g}(X, V, \theta) = \sum_{i=1}^2 x_{ig} \dot{X}_i + v_{ig} \dot{V}_i + \bullet_{ig} \dot{\theta}_i$$

$$\ddot{g}(X, V, \theta) = \sum_{i=1}^2 x_{ig} \ddot{X}_i + v_{ig} \ddot{V}_i + \bullet_{ig} \ddot{\theta}_i$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_{ixjg} \dot{X}_i \dot{X}_j + v_{ivjg} \dot{V}_i \dot{V}_j + \bullet_{i\bullet jg} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^2 v_{ixig} \dot{V}_i \dot{X}_i + 2 \sum_{i=1}^2 \bullet_{ixig} \dot{\theta}_i \dot{X}_i + 2 \bullet_{ivjg} \dot{\theta}_i \dot{V}_j$$

$$\ddot{g}(X, V, \theta) = \sum_{i=1}^2 x_{ig} \ddot{X}_i + v_{ig} \ddot{V}_i + \bullet_{ig} \ddot{\theta}_i$$

$$+ 3 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_{ixjg} \ddot{X}_i \dot{X}_j + 3 v_{ivjg} \ddot{V}_i \dot{V}_j + 3 \bullet_{i\bullet jg} \ddot{\theta}_i \dot{\theta}_j$$

