

로봇트 매니플레이터에 대한 비선형 제어

○ 이 중 용* 이 승 원** 이 상 효***
* 광운대학교 공과대학 전자공학과
** 현대 중전기 기술 연구소
*** 광운대학교 공과대학 제어계측공학과

Nonlinear Control for Robot Manipulator

LEE CHONGYOUNG* LEE SEONGWON** LEE SANGHYO***
* Dep. Electronics Eng.
** Hyundai Electrical Engineering R & D
*** Dep. Control & Instrumentation Eng.
 Kwang Woon University

Abstract

This paper deals with the manipulator with actuator described by equation $\ddot{D}(q)\ddot{q} = u - \bar{p}(q, \dot{q}, \ddot{q})$ with a control input u . We employ a simple method of control design which has two stages. First, a global linearization is performed to yield a decoupled controllable linear system. Then a controller is designed for this linear system. We provide a rigorous analysis of the effect of uncertain dynamics, which we study using robustness results in time domain based on a Lyapunov equation and the total stability theorem. Using this approach we simulate the performance of controller about a robotic manipulator with actuator.

1. 서론

로봇트 매니플레이터의 제어와 관련하여 대부분의 경우 강체 로봇트 매니플레이터의 동특성 모델을 기초하였으며, 얻어진 동특성 운동

방정식은 강한 결합을 갖는 비선형 미분 방정식으로 표현되었다.

이러한 동특성 모델에는 조작기(Actuator)의 동특성 모델이 포함되어 있지 않다. 그러나 조작기의 동특성은 빠른 속도와 부하가 심하게 변하는 경우에는 완벽한 로봇트 동특성의 중요한 역할을 한다.

로봇트 조작기의 동특성이 포함되는 로봇트 동특성 모델은 3차 미분 방정식의 표현을 얻게 된다.

이와같이 조작기가 포함된 동특성 방정식 Goor⁽¹⁾에 의해 전동기 동특성이 로봇트 동특성에 중요한 역할을 한다는 것을 지적했다. 그러나 제어기 설계에서는 초기값에 대하여 선형화된 간단한 로봇트 동특성 모델을 기초로 제어기를 설계하였다.

또한 Guez⁽²⁾는 조작기 동특성이 포함된 로봇트 모델의 비선형 귀환선형화와 비결합을 고려하였다. 이방법은 일반적인 방법론의 제시가 없으며, 계통 출력의 정확한 표현이 이루어지지 않았다. Beckman 과 Lee⁽³⁾는 이와 같은 모델에 Freund의 비선형 제어 이론을 기초하여

제어기를 설계하였으며, 계통의 출력은 로봇의 관절 위치를 선택하였으며 제안된 제어기가 복잡하다.

본 논문에서는 3차의 로봇 동특성 방정식을 얻기 위하여 로봇 운동 방정식과 로봇 조작기 동특성 모델을 결합한다.

선형화된 모델에 계통의 안정화를 얻기 위하여 극점 배치법을 적용하여 모델의 구조적 오차에 대하여 강건성을 부여하도록 제어기를 설계한다.

2. Robot 모델의 3차 동특성 방정식 유도

여기서 로봇 매니플레이터는 아마추어 (Armature) 제어 직류 전동기에 의해 구동된다고 하자. 아마추어 전압을 입력으로 관절의 변수를 상태 변수로 하여 전동기의 동특성 방정식을 표현한다.

먼저 i번째 전동기의 아마추어 회로는 그림 1과 같다.

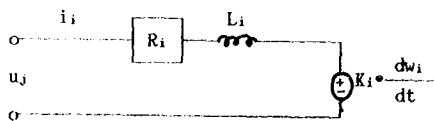


그림 1. i번째 전동기의 아마추어 회로

여기서 변수의 정의는 아래와 같다.

W_i = 로터(Rotor)의 각 위치

R_i, L_i = 아마추어 회로의 저항과 인덕턴스

i_i = 아마추어 회로의 전류

K_i° = 전동기의 전압 상수(Back EMF)

u_i = 아마추어 전압

이 회로의 전압 방정식은 식(2-1)과 같으며,

i번째 관절 변수를 q_i 라 하자.

$$R_i i_i + L_i \frac{di_i}{dt} + K_i^\circ \frac{dw_i}{dt} = u_i$$

$$W_i = N_i q_i, \quad i = 1, \dots, n$$

여기서 N_i 는 i번째 관절의 기어비(Gear Ratio)이다.

전동기 출력 토크가 아마추어 전류에 비례하기 때문에 i번째 관절 토크 T_i 는 다음과 같다.

$$T_i = N_i K_i^\circ i_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2-2)$$

여기서 K_i° 는 i번째 전동기의 토크 상수이다.

다음으로 강체 로봇 매니플레이터의 동특성은 2차의 미분방정식으로 다음과 같다.

$$\sum D_{ij} \ddot{q}_j + I_i \ddot{q}_i + \sum \sum D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i = T_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (2-3)$$

여기서

$q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$: 관절 i에서의 위치, 속도, 가속도

T_i : 관절 i에 작용하는 토크

D_{ii}, D_{ij} : 관절에 작용하는 관성 요소

$I_{a i}$: 관절 i의 Reflected 아마추어 관성

D_{ijj}, D_{ijk} : 원심력과 코리올리스력의 계수

D_i : 중력항

(1-1)식과 (1-3)식을 결합하여 매니플레이터의 링크(Link)와 조작기가 포함되는 매니플레이터의 전체 동특성 방정식이 얻어진다.

$q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ 로 벡터형태를 고려하면 다음과 같은 간략한 표현을 얻는다.

$$\bar{D}(q) \ddot{q} + \bar{P}(q, \dot{q}, q) = u \quad (2-4)$$

여기서

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} L_1 & & & \\ N_1 K_1^{\circ T} & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & \dots & & L_n \\ 0 & \dots & & N_n K_n^{\circ T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} + I_{a1}, \dots, D_{1n} \\ D_{21}, \dots, D_{2n} \\ \vdots \\ D_{n1}, \dots, D_{nn} + I_{an} \end{bmatrix}$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

$$P_i = \frac{R_i}{N_i K_i^{\circ T}} \left[\sum D_{ij} \ddot{q}_j + I_{a i} \ddot{q}_i + \sum \sum D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i \right] \\ + \frac{R_i}{N_i K_i^{\circ T}} \left[\sum D_{ij} \dot{q}_j + \sum \sum \{ D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k \} \right]$$

$$+ D_i] + K_i \cdot N_i \dot{q}_i$$

위의 식(2-4)는 계통의 입력이 전압인 비선형 결합된 3차의 미분 방정식이다.

본 논문에서는 위의 식(2-4)를 이용하여 미분기하학을 이용하여 비선형 변환을 통해 선형화된 방정식을 얻는다.

3. 계통의 선형화

조작기의 모델이 포함된 미니플레이터의 동특성 방정식은 매우 복잡하며 비선형 때문에 제어치를 직접 설계하는 것은 매우 어렵다.

본 논문에서는 비선형 변환과 상태 공간 변환을 이용하여 비선형 제어 문제를 선형 제어 문제로 하는 것이다.

(2-4)식으로 부터 아래와 같은 상태를 정의하면 다음과 같은 상태 방정식 표현을 얻는다.

$$\begin{aligned} x_i &= q_i, x_{i+n} = \dot{q}_i, x_{i+2n} = \ddot{q}_i, \quad i=1, 2, \dots, n \\ x^1 &= q, x^2 = \dot{q}, x^3 = \ddot{q}, x = [x^1, x^2, x^3]^T \end{aligned} \quad (3-1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \\ \bar{D}^{-1}P(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{D}^{-1}(x^1) \end{bmatrix} u \\ &= f(x) + g(x)u \end{aligned} \quad (3-2)$$

출력 방정식은 완벽한 kinematic 모델이라고 가정하여 아래와 같다.

$$y = h(x^1) = \begin{bmatrix} h_1(x^1) \\ \vdots \\ h_n(x^1) \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

(2-2)와 (2-3)에 대한 비선형 변환 변환 T(x)가 존재하기 위한 Su, Meyer and Hunt⁽⁴⁾의 필요충분조건을 이용하여 등가의 Brunovsky 정준형의 선형 계통을 얻는다.

$$z = Az + Bv$$

$$y = Cz \quad (3-4)$$

$$\text{여기서, } A = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B_n \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & C_n \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad i=1, 2, \dots, n$$

여기서 n=3이라 한다면 다음과 같다.

$$z^T = [z^1, z^2, z^3]^T \quad (3-5)$$

$$z^1 = T_1(q) = h(q) = T_1(x^1) = h(x^1)$$

$$z^2 = T_2(q, \dot{q}) = \left(\frac{\partial T_1}{\partial q} \right) q = \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^1} \right) x^2$$

$$z^3 = T_3(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}} \right) q = \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^1 \partial x^1} \right) (x^2)^2 + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^1} \right) x^3$$

이와 같이 변환 T_i의 선택은 효과적인 제어기를 선택하기 위하여 연구하여야 한다

그러면 오차를 다음과 같이 고려한다.

$$e^1 = q_d - q = x_d^1 - x^1 \quad (3-6)$$

$$e^2 = \dot{e}^1 = x_d^2 - x^2$$

$$e^3 = \dot{e}^2 = x_d^3 - x^3$$

이때 오차 특성 방정식은 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{e}^1 \\ \dot{e}^2 \\ \dot{e}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^2 \\ e^3 \\ D^{-1}P + q_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -D^{-1} \end{bmatrix} u \quad (3-7)$$

위와 같은 계통에 선형화 변환 변환을 적용하면 아래와 같다.

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (3-8)$$

여기서,

$$v = \bar{D}^{-1}P - \bar{D}^{-1}u + \ddot{q}_d \quad (3-9)$$

$$e = T_1 = q_d - q$$

즉, 결과적인 비선형 제어 계통은 비결합된 선형계통 방정식이다. (3-9)식은 입력 변환으로 1-1 대응관계이며 \bar{D} 의 역행렬을 요구하지않는 입력 u(t)로 표현할 수 있다.

원래의 비선형 계통의 문제는 (3-8)식으로 표현된 비결합 선형 계통에 대한 안정한 제어기를 설계하는 문제로 요약된다.

4. 안정한 제어기 설계

(3.8) 식으로 표현된 계통은 원점에 다중 극점을 갖고 있는 형태이므로 극점지정을 통하여 전체 경로의 안정을 얻는다.

폐경로 계통을 다음과 같이 고려하자

$$e = A_c e \quad (4-1)$$

여기서, $v = -ke \quad (4-2)$

결과적으로

$$A_v = A - Bk = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix}$$

그리고 A_c 의 원하는 고유치를 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_3$ 이라하고 E, F, G를 다음과 같이 정의하자

$$E = \text{diag}(\mu_i), F = \text{diag}(\mu_{i+1}), G = \text{diag}(\mu_{i+2}) \\ i=1, 2, \dots, n \quad (4-3)$$

정리 4.1

이득 $k = [k_1, k_2, k_3]$ 는 (3-8)식의 극점지정을 위해 사용되며 대각 행렬로서 다음과 같이 주어진다.

$$k_1 = -EPG \\ k_2 = EF + EG + FG \\ k_3 = -(E+FG) \quad (4-4)$$

결과적으로 얻어진 비선형 궤환 제어칙은 다음과 같다

$$u = \bar{D}(\ddot{q}_d + k_0) + \bar{P} \\ = \bar{D}\ddot{q}_d + D[-EPG, EF+EG+FG, -(E+FG)]^T e + \bar{P} \quad (4-5)$$

그러나 실제 (2-4)식은 $\bar{D}(q), \bar{P}(q, \dot{q}, \ddot{q})$ 에는 모델에 대한 불확실성이 포함되어 있다. 또한 이러한 불확실성은 구조적 불확실성 (Structural Uncertainty)로 고려할 수 있다.

비선형 계통에 대한 계산된 제어를 다음과 같다고 하자.

$$u_0 = D_0(q_d - v) + P_0 \quad (4-6)$$

여기서 D_0, P_0 는 각각 \bar{D}, \bar{P} 에 대한 계산된 값이다. (3-2)에서 주어진 입력을 이용하면 아래와 같다.

$$u_0 = D_0(\ddot{q}_d + ke) + P_0 \quad (4-7)$$

위의 식을 (3-8)식에 입력 v 에 대한 v_0 를 고려하면 다음과 같다.

$$v_0 = q_d + \bar{D}^{-1}\bar{P} - \bar{D}^{-1}u_0 \\ = \Delta q_d + \delta + (\Delta - I)k_0 \quad (4-8)$$

여기서, $\Delta = (I - \bar{D}^{-1}D_0), \delta = \bar{D}^{-1}(\bar{P} - P_0)$

결과적으로 다음과 같은 계통의 안정도를 고려하게 된다.

$$\dot{e} = Ae + Bv_0 \\ = (A - Bk + B\Delta k)e + B(\Delta q_d + \delta) \\ = (A_0 + B\Delta k)e + B(\Delta q_d + \delta) \\ = Ae + Bw \quad (4-9)$$

즉, 위의 (4-9)식이 안정하도록 Δ 와 δ 에 대한 유계를 발견하는 문제이다. 먼저 A 에 대한 점근적 안정을 얻기 위하여 Lyapunov 함수를 이용하자. 먼저 H행렬의 $B\Delta k$ 는 다음과 같다

$$H = B\Delta k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

여기서, $H_i = \Delta k_i, i=1, 2, 3$

또한 H행렬의 (i, j)번째 요소를 H_{ij} 라하면 다음과 같이 두자

$$H_{ij} \leq |H_{ij}|_{\max} \equiv \epsilon_{ij}, \epsilon = \max \epsilon_{ij} \quad (4-11)$$

그리고 D_0 와 P_0 의 정확도와 A_0 의 안정도 상 호간 합의점(Trade off)에 의해 선택되는 설계 매개변수로 a 를 선택하며, 이때 A_0 는 안정도 여유가 $-a$ 가 되도록 K 를 선택한다고 하자.

정리 4.2

$(A_0 - aI)$ 는 점근적 안정이라고 하자. 이때 Lyapunov 방정식 P의 해는 아래와 같다

$$(A_0 - aI)^T P + P(A_0 - aI) + 2I = 0 \quad (4-12)$$

여기서, $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_4 & P_5 \\ P_3 & P_5 & P_6 \end{bmatrix}$, P_i 는 대각 요소 $i=1, 2, \dots, 6$

또한 P_i 는 k_1, k_2, k_3 와 a 의 함수로 표현된다. 위의 정리로 $(A_0 - aI)$ 는 점근적 안정이므로 Lyapunov 방정식(4-12)식은 유일한 해를 갖는다.

다음으로 D_c 의 정확도와 합의점에서의 선택 되는 양의 설계 매개변수 b 를 선택하여 $A=(A_c+F)$ 의 고유치가 $-b$ 좌측에 있도록 Δ 의 조건을 살펴보자.

여기서 다음과 같이 정의하자

$$\epsilon \equiv \max_{i,j} [\max_t |F_{ij} + (a-b)|] \quad (4-13)$$

또한 $a > b$ 이고 A_c 의 모든 고유치가 $-a$ 보다 적은 실수부를 가지며, 다음조건을 만족하면 ϵ 의 고유치는 $-b$ 보다 적은 실수부를 갖는다.

$$\text{조건1} : \epsilon < (S_{\max} (P_m u)_s)^{-1} \equiv \frac{1}{s} \quad (4-14)$$

여기서, $S_{\max}(\cdot) = (\cdot)$ 의 최대 특이값 (Singular Value), P_m 은 (4-12)식의 해 P 와 $P_{m,ij} = |P_{ij}|$ 에 의해 주어진 원소 행렬이고, u 는 $H_{ij} = 0$ 이면 0이고, 그렇지 않으면 1인 행렬이며, $(P_m u)_s$ 는 $P_m u$ 의 대칭 부분을 나타낸다.

조건 1을 만족하면 $e=Ae^{t_0}$ 인 천이행렬 $\phi(t,0)$ 을 유계시킨다.

$$\| \phi(t,0) \| \leq \sigma e^{-\alpha t} \quad (4-15)$$

여기서, $\sigma \geq 1$

$$\alpha \equiv -(n\sigma \epsilon + |a-b|\sigma + \mu) > 0$$

$$\mu \equiv A_c \text{의 고유치의 최대 실수}$$

$$\text{부, } \mu < -a$$

다음으로 w 가 영이 아닐때 오차가 유계됨을 살펴보자.

아래와 같은 부가적인 가정을 하자

조건2 : 어떤 양수 L 과 $\|e(t)\| \leq r$ 일때

$$\| Bw(e(t)) \| \leq Lr \quad (4-16)$$

조건2는 안정도를 위하여 $w(t)$ 에 대한 크기의 상계를 주는 조건이다.

정리 4.3

만약 $\|e(0)\| < r/\sigma$, $(L\sigma/a) < 1$ 이면, 이면 이때 (3-9)식은 유일해 $e(t)$ 가 존재한다. 게다가 모든 $t \geq 0$ 에 대하여 오차는 유계된다.

$$\|e(t)\| \leq \sigma e^{-\alpha t} \|e(0)\|$$

$$+(L\sigma/a)r(1-e^{-\alpha t}) \leq r \quad (4-17)$$

또한 $\|Bw(e(t))\| \leq L\|e\|$ 가 성립하므로, 위의 조건으로

$$\|e(t)\| \leq \delta e^{-\alpha t} \|e(0)\|, \quad \alpha \equiv 3nL\epsilon \delta + \mu \quad (4-18)$$

그러므로 $e(t)$ 는 만약 $\alpha > 0$ 이면 점근적 안정이다. 위의 정리는 오차 유계에 대한 보장과 오차가 점근적으로 수렴한다는 것을 보장한다.

결과적으로 만약 K 가 (4-2)식을 만족하고 이상적인 폐경로 계통 (4-1)의 안정도 여유 $-a$ 를 보장하고, 계산된 제어값 (4-6)식이 대신 사용될때, 실제 폐경로 모델 (4-9)식은 D_c 가 (3-14)식을 만족하는 경우는 안정도 여유 $-b$ 를 갖으며, P_0 가 (4-16)식과 정리 2.3의 조건을 만족하면 (4-7)로 주어지는 오차는 유계된다. 또한 P_0 가 (4-18)식을 만족하면 오차의 유계는 개선된다.

4. 시뮬레이션

본논문에서는 아래와 같은 집중질량의 자유도가 3인 로봇트 매니퓰레이터를 고려하였다.

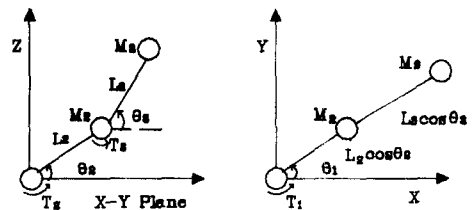


그림 2. 로봇트 매니퓰레이터의 모델

여기서 L_2, L_3, m_2, m_3 는 각 링크의 길이와 질량이며 다음과 같이 고려하였다.

$$L_2 = L_3 = 0.5, \quad m_2 = 10\text{kg}, \quad m_3 = 8\text{kg}.$$

그리고, 부하는 링크3의 맨 끝에 존재한다고 가정하였다.

각 관절을 구동시키는 조작기의 매개변수는 아래와 같다.

$$R_i = 1.6\Omega \quad L_i = 0.0048 \text{ ohms-s}$$

$$K_i^0 = 0.19 \text{ v/rad/sec}, \quad K_i^T = 37.00$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

$$N_1 = 62.55, \quad N_2 = 107.81, \quad N_3 = 53.65$$

주어진 궤적 계획은 아래와 같다.

$$q(t) = q_i + (q_f - q_i) \frac{t}{2}$$

$$- (q_f - q_i) \sin(\pi t)/2\pi$$

$$q(t) = (q_f - q_i)/2 - (q_f - q_i) \cos(\pi t)/2$$

$$q(t) = \pi(q_f - q_i) \sin(\pi t)/2$$

$$q(t) = \pi^2(q_f - q_i) \cos(\pi t)/2$$

시뮬레이션에서 초기위치 $q_i=(0, 1, 0.1)\text{rad}$ 에서 최종위치 $q_f=(1.2, -0.5, 1.6)\text{rad}$ 으로 설정하였으며 샘플링 시간은 0.01초로 2초동안 수행하도록 하였다.

또한 실제모델과 계산된 모델 사이의 매개변수 오차를 5%로 고려하였으며 $K_1=(1000, 1000, 1000)$, $K_2=(300, 300, 300)$, $K_3=(10, 10, 10)$ 으로 이득을 고려하였다.

각 관절에 대한 오차는 무부하시 그림 3, 4, 5에 있으며 부하가 존재하는 경우는 그림 6, 7, 8에 나타나있다.

참고문헌

- [1] Goor, R.M., 'A New Approach to minimum Time Robot Control', Reserch Publication General Motors Reach, 1984
- [2] Guez, a. 'Optimal Control of Robotic Manipulators', Pb.d. Dissertation, University of Florida, 1983
- [3] Beekman, R.K. Lee, 'Nonlinear Robotic Control including Drive Motor Interactions', Proceeding of American Control Conference, pp 1333-1338, 1988
- [4] Hunt, L.R., Su, R. and Meyer, G. 'Global Transformations of Nonlinear

Systems', IEEE Trans. AC-28, pp.24-31, 1983

- [5] Gutman, S. 'Uncertain Dynamical Systems- A Lyapunov Min-Max Approach', IEEE Trans. AC-24, pp 437-443, 1979
- [6] R.K.Vedavali, 'Perturbation Bounds for Robust stability in Linear State Space Models', Int.J.Control, Vol-42, pp 1507-1517, 1985
- [7] Abdallah, C. and Lewis F.L., 'On Robustness Analysis in The Control of Nonlinear Systems', proc. ACC, pp 2196-2198, 1988
- [8] Spong, M.W. and Vidyasagar M. "Robust Linear Compensator Design for Nonlinear Robotic Control ", IEEE J.Robotics and Automation, RA-3, pp345-351, 1987
- [9] Paul, R.P. "Robot Manipulators : Mathematics, Programming, and Control", New York : MIT Press, 1981