'90 韓國自動制御學術會議論文集 1990. 10.26~27

다항식의 건실특성을 위한 허용 하중치 설정

오 세 준 윤 한 오 박 홍 배 김 수 중

경북대학교 공과대학 전자공학과

A Allowable Weighting Value for Robustness of Polynomial with Coefficient Perturbations

Se Jun O, Han O Yun, Hong Bae Park, and Soo Joong Kim

Dept. of Electronics, Kyungpook Nat'l. Univ.

ABSTRACT

Given the polynomial in z, $P_0(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_0$, it is of interest to know how much coefficient a_i can be perturbed while simultaneously preserving the stable property of the polynomials.

In this paper, we derive the maximal intervals, centered about the nominal values of the coefficients, having the following property: the polynomial remains stable for all variations within these intervals. And then, under the unfixed weighted perturbation we evaluate upper and lower allowable perturbations.

I. 서 론

최근에 Kharitonov 이론[1]을 바탕으로 하는 건실제어문제가 현대 제어이론에 많은 관심을 끌고 있다.

공칭시스템(nominal system)의 안정성을 판별하는 해석적 방법으로 Routh-Hurwitz 판별법, Nyquist 판별법 및 Lyapunov 방법이 있다. 그러나, 실제로 제어시스템의 안정성을 판별하기 위해서는 공칭시스템 뿐만 아니라 섭동을 가지는 실제 시스템을 고려하여야 한다.

많은 응용 시스템에서, 불확실성 매개변수(uncertainty parameter)는 시간상수, 마찰계수, 시간지연등의 물리량이다. 제어시스템의 응용에서 이산치시스템의 특성다항식의 매개변수는 다항식의 근이 단위원내에 존재하면 안정하다고 말할 수 있다.

설계된 시스템에서의 특성다항식계수의 실제값은 우리가 가정하는 값과는 다르게 된다. 즉, 상태방정식의 계수가 오차를 가질때, 특성다항식의 계수는 공칭값주위에서 변화하게 된다. 결과적으로, 섭동을 가지는 특성다항식에서 계수의 공칭값을 중심으로 Hurwitz 다항식이 되도록 하는 계수의 최대변화량을 구하는 문제와 각 공칭값의 절대불확실값을 모를때 각 계수의 상한치와 하한치를 구하는 문제가 대두된다.

B.R. Barmish[2]는 Kharitonov 이론을 이용하여 Hurwitz 다항식이 되는 계수의 최대치를 구하였다. 그러나, Kharitonov 이론은 연속적이고 계수가 선형독립인 시스템에만 적용이 가능하다. 이 이론이 임의의 특성다항식의 polytope에 적용이 되지 않는다는 것을 Bials와 Galoff[3]가 보였고, Hollot와 Bartllet[4]는 계수가 종속인 경우 Kharitonov 정리를 적용할 수 없다는 것을 보였다. Kharitonov 이론의 제한조건을 해결한 Edge 이론이 Bartlett, Hollot와 Lin[5]에 의해 소개되었다.

이 논문에서는 이산치시스템에서 Edge 이론과 Mobius transformation을 이용하여 계수의 절대 불확실성을 알고 있을 경우와 모르는 경우의 특성다항식 polytope의 계수의 최대 변화량을 구하고자 한다.

II. 정의

본 논문의 이해를 돕기 위해 필요한 수학적배경과 기본적인 용어의 정의를 살펴보기로 한다.

* $\bar{R}$: 실수영역, $\bar{C}$: 복소수영역, $\bar{C}^* = \bar{C} \cup \{\infty\}$

* 개 좌반평면(open left half plane):

$$\mathrm{OLHP} = \{s \in \bar{C} : \mathrm{Re}\, s < 0\} \tag{1}$$

* *Polytope of polynomials* :

아래와 같이 정의되는 $\bar{P}$를 n-차수, 실수이고 최고차항의 계수가 1인 polytope이라 한다.

$$\bar{P} = \{P(s) = \lambda_1 P_1(s) + \lambda_2 P_2(s) + \cdots + \lambda_m P_m(s)$$
$$\lambda \in [0,1],\quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1\} \qquad (2)$$

* *Root space* :

$\overline{S}$를 n-차수 특성다항식의 집합이라 할때, 이 $\overline{S}$의 root space는 아래와 같이 정의된다.

$$R[\bar{S}] \equiv \{s \in \bar{C} : P(s) = 0,\ \ P \in \overline{S}\}.$$

* *Hurwitz testing matrix* :

$$P_0(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \quad (a_0 \neq 0) \qquad (3)$$

이 특성다항식의 n-차수의 Hurwitz testing matrix는

$$H(a_n, \cdots, a_1, a_0) = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdot \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{bmatrix} \qquad (4)$$

* *Real linear fractional transformation* :

$T(\cdot):\bar{C}^* \Rightarrow \bar{C}$로 mapping 될때, $z=T(s)=(as+b)/(cs+d)$가 된다. 이때, 상수 $a,b,c,d \in \bar{R}$이고, $ad - bc \neq 0$이다. 이것의 역 mapping $T^{-1}(\cdot)$는 아래와 같다.

$$s = T^{-1}(z) = (-dz + b)/(cz - a) \qquad (5)$$

III. Kharitonov 및 Edge 정리

1. Kharitonov 정리

섭동을 가지는 시스템의 안정성을 유지하는 문제는 공학자들에게 관심의 대상이다. 1978년 소련과학자 Kharitonov가 특정한 영역내에서 독립적으로 변화하는 계수를 가지는 특성다항식집합의 안정성을 판별하는 정리를 제안하였다.

연속시스템의 특성다항식이 아래와 같이 불확실성 계수를 가지는 경우를 알아보자.

$$P(s, \gamma) = \gamma_0 s^n + \gamma_1 s^{n-1} + \cdots + \gamma_n, \ \text{with} \ \gamma_0 > 0 \qquad (6)$$

이때 계수 γ_i는 다음과 같은 한정된 값을 가지게 된다.

$$\gamma_i \in [\alpha_i, \eta_i],\quad 0 < \alpha_i \leq \eta_i,\quad i = 0, 1, 2, \cdots, n \qquad (7)$$

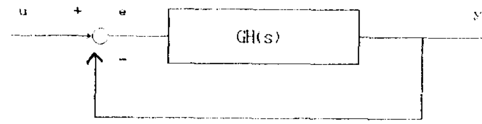

그림 1. 폐루프 궤환시스템

Fig 1. Closed-loop feedback system

[Kharitonov 정리]

특성다항식의 집합 P는 아래와 같이 계수의 extreme value에 대한 4개의 특성다항식이 안정하면 D-안정(D-stable)이라 한다.

$$\begin{aligned} P_1(s) &= \alpha_0 + \alpha_1 s + \eta_2 s^2 + \eta_3 s^3 + \alpha_4 s^4 + \alpha_5 s^5 + \cdots \\ P_2(s) &= \eta_0 + \eta_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \eta_4 s^4 + \eta_5 s^5 + \cdots \\ P_3(s) &= \alpha_0 + \eta_1 s + \eta_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \alpha_4 s^4 + \eta_5 s^5 + \cdots \\ P_4(s) &= \eta_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \eta_3 s^3 + \eta_4 s^4 + \alpha_5 s^5 + \cdots \end{aligned} \qquad (8)$$

따라서, 우리는 식(7)과 같이 계수가 섭동을 가질때 시스템의 안정성을 판별하기 위해 무수히 많은 특성다항식을 고려하는 대신 위의 4개의 Kharitonov 다항식만 고려하면 된다. 만일 식(6)의 계수가 복소수이면 단지 8개의 다항식만 검증하면 된다.

그러나 불행히도 Kharitonov 이론은 두개의 제한조건을 가지는데, 첫째가 다항식의 집합 P가 "interval polynomial" 즉, 계수변수가 독립이어야 하고 계수 γ_i가 최소값 α_i와 최대값 η_i사이의 양의 값을 가지고 있어야 한다. 그리고, 단지 우리가 고려해야 할 평면은 좌반평면뿐이다.

2. Edge 정리

Kharitonov 이론은 몇개의 다항식집합의 안정성판별을 위해 무수히 많은 계산량을 줄이는 효과를 거두었다. 그러나, 다항식집합이 interval polynomial이 아닌 경우 즉, 다항식의 계수변수가 종속적일때, Kharitonov 이론을 사용할 수가 없다. 이러한 경우 Edge 정리를 이용하여 특성다항식 polytope의 최대섭동량을 구할 수가 있다. Edge 정리는 아래와 같다.

[Edge 정리]

$\mathcal{D}$를 복소수 평면상에서의 simple connected domain이라 가정하자. 이때, $\overline{P}$의 모든 exposed edges의 root space가 $\mathcal{D}$에 속하면 $R(\overline{P})$는 $\mathcal{D}$에 속한다.

이 Edge 정리의 주요결과는 만일 집합이 polytope이면 polytope의 exposed edges에 포함된 다항식의 근의 위치는 다항식집합의 모든 근의 위치를 결정하게 된다. 그러나, 주어진 다항식에서 섭동을 가지는 계수가 일차의 선형종속의 경우에만 이용이 가능하다. 즉, 섭동을 가지는 계수가 비선형의 상태를 가지는 경우에는 사용이 불가능하다.

IV. MOBIUS TRANSFORMATION과 EDGE 정리를 이용한 견실한 안정화

고전적 제어이론에서 안정화문제는 제어시스템 해석에서 중요한 과제가 되어왔다. 그러나, 이 경우에는 대개의 특성방정식이 고정된 매개변수를 가지고 있다. 그러나, 실제로 대부분 물리시스템은 외부의 영향에 의해서 변하게 된다. 따라서 실제 모델이 가정된 모델과 다른 경우 궤환시스템의 안정성은 보장이 되지 않는다. 우리는 이산치 궤환시스템의 특성다항식의 계수가 섭동을 가질때 특성다항식의 근이 단위원내에 있기를 원한다. 견실한 안정화에 대해 언급하기 전에 실제시스템과 가정된 시스템의 차이점을 알아보자.

덧셈형 섭동을 가지는 시스템을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P = P_0 + \Delta P \tag{9}$$

여기서 P는 실제시스템의 특성다항식, P_0는 가정된 시스템의 공칭특성다항식이고 ΔP는 섭동을 가지는 특성다항식으로 실제시스템과 가정된 시스템의 차이다.

가. 절대 불확실성을 알고 있는 경우

아래와 같은 형태를 가지는 특성다항식을 strictly Schur라 하자.

$$P_0(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \tag{10}$$

여기서 $a_i > 0$ 이며 a_i가 서로 다른 하중치를 가지는 섭동이 허용될때 특성다항식은 아래와 같으며

$$P(z) = z^n + \gamma_1 z^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1} z + \gamma_n \tag{11}$$

$$a_i - b_i\varepsilon < \gamma_i < a_i + c_i\varepsilon \tag{12}$$

여기서 임의의 $\varepsilon > 0$이며 식(12)의 조건을 만족할때 ε-admissible라고 한다.

모든 ε-admissible 특성다항식의 집합을 P_ε라고 정의하자. 절대 불확실 하중치 $b_i = c_i = 1$이라 할때, P_ε의 모든 다항식이 strictly Schur가 되는 ε의 최대값 ε_{max}를 구하고자 한다. 이 ε_{max}를 measure of robustness라 한다.

다음은 Mobius transformation과 Edge 정리를 이용하여 섭동의 최대치를 구하는 방법을 알아보기로 한다.

식(5)에서 상수 a=b=c=1 이고 d=-1이면 Mobius transformation이라 하며 mapping T는 아래와 같이 주어진다.

$$z = T(s) = (s+1)/(s-1) \tag{13}$$

원하는 근영역 $\mathcal{D}_T$ = T(OLHP)로 정의하고, 최고차항의 계수가 1이 아닌 n-차수의 다항식이 아래와 같이 주어진다.

$$P_k(z) = \gamma_0 z^n + \gamma_1 z^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1} z + \gamma_n \quad \text{with } \gamma_0 > 0 \tag{14}$$

$P_K(z)$를 Mobius 변환한 다항식 $P_{TK}(s)$는 다음과 같다.

$$P_{Tk}(s) \equiv P_k(T(s))(s-1)^n = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (s+1)^{n-i}(s-1)^i$$
$$\equiv \beta_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} s + \beta_n \tag{15}$$

다음에, $P_{TK}(s)$의 Hurwitz testing matrix를 정의하면 식(16)과 같다.

$$H(P_{Tk}) \equiv \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_3 & \beta_5 & \cdot & \cdot \\ \beta_0 & \beta_2 & \beta_4 & \cdot & \cdot \\ 0 & \beta_1 & \beta_3 & \beta_5 & \cdot \\ 0 & \beta_0 & \beta_2 & \beta_4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \tag{16}$$

다음에는 변환된 다항식의 root space가 복소수평면에서 원하는 영역내에 있기 위한 필요충분조건을 알아본다.

정리[7]: 정점(vertices) $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 을 가지는 n-차수, 실수다항식의 polytope $\overline{P}$와 real linear fractional transformation T(s)가 주어질때, 만일 아래 두개의 조건을 만족시키면 $\mathcal{D} \supseteq R(\overline{P})$가 된다.

(a) 모든 변환된 정점 $P_{T1}, P_{T2}, \cdots, P_{Tm}$이 n-차수이고, 그것의 최고차항의 계수가 같은 부호이어야 한다.

(b) 변환된 정점 P_{Ti}와 P_{Tj} 각 쌍에서 P_{Ti}는 strictly Hurwitz이어야 하고, $H^{-1}(P_{Ti})H(P_{Tj})$가 좌반면에 고유치를 갖지 않아야 한다.

나. 절대 불확실성을 모르는 경우

앞에서 절대 불확실성을 알고 있는 경우 섭동의 최대치를 구하여 보았다. 지금부터는 절대 불확실성을 모르는 경우에 섭동의 최대치를 구해보기로 한다. 이 경우는 ε 대신 허용되는 섭동의 상·하한값을 각각 구하고자 한다. 즉, 다항식이 안정성을 유지하는 최대값 b_i와 c_i를 구하고자 한다.

이 b_i와 c_i의 최적값은 linear programming 문제로 해결이 가능하며 b_i와 c_i의 최대값은 아래와 같이 정의된다.

$$b_{max} = \min\{b_i\} \qquad i = 1,2.$$
$$c_{max} = \min\{c_i\} \qquad i = 1,2.$$

V. 예제

앞에서 설명한 이론의 이해를 돕기 위해 $P_0(z) = z^3 + z^2 + 0.31z + 0.03$와 같이 주어지는 strictly Schur 다항식을 고려하자.

이때 섭동을 가지는 다항식은 아래와 같이 정의된다.

$$P(z) = z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + 0.03 \tag{17}$$

여기서 $1-b_1\varepsilon < \gamma_1 < 1+c_1\varepsilon \quad 0.31-b_2\varepsilon < \gamma_2 < 0.31+c_2\varepsilon$

Mobius transformation에 의해 변환된 다항식이 다음과 같으며

$$P_{Tk}(s) = (1.03 + \gamma_1 + \gamma_2)s^3 + (2.91 + \gamma_1 - \gamma_2)s^2 + (3.09 - \gamma_1 - \gamma_2)s + (0.97 - \gamma_2 + \gamma_2) \tag{18}$$

식(18)에 대한 Hurwitz testing matrix는 다음과 같이 구해진다.

$$H(P_T) = \begin{bmatrix} 2.91 + \gamma_1 - \gamma_2 & 0.97 - \gamma_1 + \gamma_2 & 0 \\ 1.03 + \gamma_1 + \gamma_2 & 3.09 + \gamma_1 - \gamma_2 & 0 \\ 0 & 2.91 + \gamma_1 - \gamma_2 & 0.97 - \gamma_1 + \gamma_2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

우선 섭동을 가지는 계수가 같은 하중치($b_i=c_i=1$)를 가지는 경우에 대해 ε_{max}를 구해보자.

이때 4개의 변환된 정점의 다항식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} P_{T0} &= (2.34 - 2\epsilon)s^3 + 3.6s^2 + (1.78 + 2\epsilon)s + 0.28 \\ P_{T1} &= 2.34s^3 + (3.6 - 2\epsilon)s^2 + 1.78s + (0.28 + 2\epsilon) \\ P_{T2} &= 2.34s^3 + (3.6 + 2\epsilon)s^2 + 1.78s + (0.28 - 2\epsilon) \\ P_{T3} &= (2.34 + 2\epsilon)s^3 + 3.6s^2 + (1.78 - 2\epsilon)s + 0.28 \end{aligned} \tag{20}$$

앞에서 전개한 이론으로부터

(a) leading coefficient가 같은 부호를 가지기 위해

$$\epsilon < 1.17 \tag{21}$$

이어야 하며

(b) 그들의 Hurwitz testing matrix는 다음과 같다.

$$H(P_{T0}) = \begin{bmatrix} 3.6 & 0.28 & 0 \\ 2.34 - 2\epsilon & 1.78 + 2\epsilon & 0 \\ 0 & 3.6 & 0.28 \end{bmatrix}$$

$$H(P_{T1}) = \begin{bmatrix} 3.6 - 2\epsilon & 0.28 + 2\epsilon & 0 \\ 2.34 & 1.78 & 0 \\ 0 & 3.6 - 2\epsilon & 0.28 + 2\epsilon \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$H(P_{T2}) = \begin{bmatrix} 3.6 + 2\epsilon & 0.28 + 2\epsilon & 0 \\ 2.34 & 1.78 & 0 \\ 0 & 3.6 + 2\epsilon & 0.28 + 2\epsilon \end{bmatrix}$$

$$H(P_{T3}) = \begin{bmatrix} 3.6 & 0.28 & 0 \\ 2.34 + 2\epsilon & 1.78 - 2\epsilon & 0 \\ 0 & 3.6 & 0.28 \end{bmatrix}$$

P_{Ti}가 strictly Hurwitz이고 $H^{-1}(P_{Ti})H(P_{Tj})$가 좌반면에 고유치를 갖지 않기 위한 조건은 아래와 같이 구해진다.

i) $H^{-1}(P_{T0})H(P_{T1})$:
$0 < \epsilon < 1.17$ and $0 < \epsilon < 0.698$

ii) $H^{-1}(P_{T0})H(P_{T3})$:
$0 < \epsilon < 1.17$ and $0 < \epsilon < 0.741$

iii) $H^{-1}(P_{T1})H(P_{T3})$:
$0 < \epsilon < 0.698$ and $\epsilon < 0.698, \ \epsilon > 0.791$ (23)

iv) $H^{-1}(P_{T3})H(P_{T2})$:
$0 < \epsilon < 0.74$ and $0 < \epsilon < 0.741$

v) $H^{-1}(P_{T2})H(P_{T0})$:
$0 < \epsilon < 0.14$

vi) $H^{-1}(P_{T1})H(P_{T2})$:
$0 < \epsilon < 0.698$

위의 조건을 만족시키는 ε_{max}는 다음과 같다.

$$\epsilon_{max} = 0.14 \tag{24}$$

다음은 섭동을 가지는 계수의 절대 불확실성을 모르는 경우 b_i와 c_i의 최대값을 구하였다.

이때 4개의 변형된 정점의 다항식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} P_{T0} &= (2.34 - b_1 + b_2)s^3 + (3.6 - b_1 + b_2)s^2 + (1.78 + b_1 + b_2)s + (0.28 + b_1 - b_2) \\ P_{T1} &= (2.34 - b_1 + c_2)s^3 + (3.6 - b_1 - c_2)s^2 + (1.78 + b_1 - c_2)s + (0.28 + b_1 + c_2) \end{aligned} \tag{25}$$

$$P_{T2} = (2.34 + c_1 - b_2)s^3 + (3.6 + c_1 + b_2)s^2 + (1.78 - c_1 + b_2)s + (0.28 - c_1 - b_2)$$

$$P_{T3} = (2.34 + c_1 + c_2)s^3 + (3.6 + c_1 - c_2)s^2 + (1.78 - c_1 - c_2)s + (0.28 - c_1 + c_2)$$

(a) leading coefficient가 같은 부호를 가지기 위해

$$b_1 + b_2 < 2.34, b_1 - c_2 < 2.34, b_2 - c_1 < 2.34 \tag{26}$$

이어야 하며

(b)그들의 Hurwitz testing matrix는 다음과 같다.

$$H(P_{T0}) = \begin{bmatrix} 3.6 - b_1 + b_2 & 0.28 + b_1 - b_2 & 0 \\ 2.34 - b_1 - b_2 & 1.78 + b_1 + b_2 & 0 \\ 0 & 3.6 - b_1 + b_2 & 0.28 + b_1 - b_2 \end{bmatrix}$$

$$H(P_{T1}) = \begin{bmatrix} 3.6 - b_1 - c_2 & 0.28 + b_1 + c_2 & 0 \\ 2.34 - b_1 + c_2 & 1.78 + b_1 - c_2 & 0 \\ 0 & 3.6 - b_1 - c_2 & 0.28 + b_1 + c_2 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$H(P_{T2}) = \begin{bmatrix} 3.6 + c_1 + b_2 & 0.28 - c_1 - b_2 & 0 \\ 2.34 + c_1 - b_2 & 1.78 - c_1 + b_2 & 0 \\ 0 & 3.6 + c_1 + b_2 & 0.28 - c_1 - b_2 \end{bmatrix}$$

$$H(P_{T3}) = \begin{bmatrix} 3.6 + c_1 - c_2 & 0.28 - c_1 + c_2 & 0 \\ 2.34 + c_1 + c_2 & 1.78 - c_1 - c_2 & 0 \\ 0 & 3.6 + c_1 - c_2 & 0.28 - c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

P_{Ti}가 strictly Hurwitz이고 $H^{-1}(P_{Ti})H(P_{Tj})$가 좌반면에 고유치를 갖지 않기 위한 조건은 아래와 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
&2.34 - b_1 - b_2 > 0 \quad 3.6 - b_1 + b_2 > 0 \\
&5.7528 - 0.24b_1 + 8b_2 > 0 \quad 0.28 + b_1 - b_2 > 0 \\
&11.51 - 0.48b_1 + 8b_2 - 8c_2 > 0 \\
&33.095 - 2.76b_1 + 46.02b_2 - 46.02c_2 - 1.93b_1b_2 \\
&+ 1.93b_1c_2 - 64b_2c_2 > 0 \\
&11.51 - 0.24b_1 + 8b_2 + 0.24c_1 - 8c_2 > 0 \\
&33.095 - 1.38b_1 + 46.02b_2 + 1.38c_1 - 46.02c_2 \\
&+ 1.9b_1c_2 + 1.9b_2c_1 - 64b_2c_2 > 0
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
&2.34 - b_1 + c_2 > 0 \quad 3.6 - b_1 - c_2 > 0 \\
&11.51 - 0.24b_1 + 0.24c_1 - 16c_2 > 0 \\
&5.7528 - 0.24b_1 - 8c_2 > 0 \\
&33.095 - 1.38b_1 + 1.38c_1 - 92.04c_2 + 1.53b_1c_1 \\
&- 2.29b_1c_2 - 1.55c_1c_2 - 64c_2^2 > 0 \\
&0.28 + b_1 - b_2 > 0 \quad 2.34 + c_1 - b_2 > 0 \\
&11.51 - 0.24b_1 + 0.24c_1 > 0 \\
&0.28 - c_1 - b_2 > 0 \\
&33.095 - 1.38b_1 + 91.84b_2 + 1.38c_1 - 1.9b_1b_2 \\
&+ 1.9b_2c_1 + 64b_2^2 > 0 \\
&3.6 + c_1 - c_2 > 0 \quad 5.7528 + 0.24c_1 - 8c_2 > 0 \\
&11.51 + 8b_2 + 0.48c_1 - 8c_2 > 0 \\
&0.28 - c_1 + c_2 > 0 \\
&33.095 + 46.02b_2 + 2.76c_1 - 46.02c_2 + 1.93b_2c_1 \\
&- 64b_2c_2 - 1.93c_1c_2 > 0
\end{aligned}$$

위의 조건을 만족시키는 b_{max}, c_{max}는 다음과 같으며

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.995c_2 = 0.715 \\ b_1 &= 0.14b_2 = 0.42 \end{aligned} \tag{29}$$

$$b_{max} = 0.14 \quad c_{max} = 0.715$$

위와 같은 경계치내에서는 계수가 섭동을 갖더라도 특성다항식은 strictly Schur 조건을 만족한다.

VI. 결론

본 논문에서는 이산치시스템의 특성다항식의 계수가 섭동을 갖더라도 건실한 안정성을 유지하기 위한 조건을 제안하였다. Edge 이론과 Mobius transformation을 이용하여 계수의 절대 불확성을 아는 경우와 모르는 경우 특성다항식이 strictly Schur가 되기 위한 허용 하중치 ε_{max} 및 b_i와 c_i를 각각 구하였다.

참고문헌

[1] V. L. Kharitonov, "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations," *Differential'nye Uraveniya*, vol. 319, pp. 373-377, 1985.

[2] B. R. Barmish, "Invariance of strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-29, no. 10, pp. 935-936, Oct. 1984.

[3] S. Bials and J. Garloff, "Convex combinations of stable polynomials," *J. Franklin Inst.*, vol. 319, pp. 373-377, 1985.

[4] C. V. Hollot and A. C. Bartlett, "Some discrete-time counterparts of Kharitonov's stability criterion for un-

certainty systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-31, no. 4, pp. 355-356, April 1986.

[5] A. C. Bartlett, C. V. Hollot, and H. Lin, "Root locations of entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges," *Proc. 25th Amer. Contr. Conf.*, Minneapolis, MN. pp. 1611-1616. 1987.

[6] A. C. Bartlett and C. V. Hollot, "A necessary and sufficient condition for Schur invariance and generalized stability of polytopes of polynomials," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-33, no. 6, pp. 575-578, June 1988.

[7] J. P. Guiver and N. K. Bose, "Strictly Hurwitz property of quartics under coefficient perturbation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-32, no. 1, pp. 909-913, Oct. 1987.

[8] V. L. Kharitonov, "On a generalization of a stability criterion," *Izv. Akad. Nauk. Kazakh. SSR Ser. Fiz. Mat.*, vol. 1, pp. 53-57, 1979.