'90 韓國自動制御學術會議論文集 1990. 10.26~27

시스템 극점 추정에 의한 불확실한 시스템의 안정화 제어

이 장 규 한 형 석 º

서울대학교 공과대학 제어계측공학과

Stabilizing Control of Uncertain System with Pole Estimation

Jang-Gyu Lee Hyung-Seok Han

Dept. of Control & Instrumentation Eng.

Seoul National University

ABSTRACT

A new robust stabilizing method of uncertain system is proposed. The model uncertainty is considered to be the system matrix perturbations. The region of perturbed system eigenvalues are estimated by union of the disks which have the constant radius. Full state feedback control matrix which satisfies the new stabilization condition can be obtained by weighted LQ regulator or pole assignment technique.

1. 서 론

시스템 제어는 대상 시스템의 모델링을 기초로 이루어 진다. 그러나,현실적으로 대상 시스템의 동특성을 정확히 모델링하는 것은 불가능 하다. 따라서, 동특성을 근사하게 나타낼 수 있는 모델을 특정한 동작점에서 얻게되며 이 모델은 동작점의 변화에 따라 모델 오차를 수반한다. 모델오차는 동작점의 변화와 외부의 교란등으로 구성될 수 있으며 이를 상태공간(state space) 에서는 시스템 행렬 및 입력 행렬의 변화로 표현할 수 있다. 특정한 동작점에서 상태공간으로 표현된 시스템에 대하여 설계한 제어기가 시스템 행렬과 입력행렬로 모델링된 모델오차에 대하여 안정성을 유지하도록 하기 위한 견실 제어(robust control) 에 관한 연구가 진행되어왔다.[1-4]

상태 공간(state space) 으로 표시된 선형 시스템의 견실 제어는 주로 리아프노프(Lyapunov) 안정성 조건을 이용하여 연구되었으며 Patel [5] 과 Yedavalli[6]는 안정성을 유지할 수 있는 시스템 행렬들의 크기를 제안하였다.

최근에 Y.T.Juang[7] 은 기존의 Gershgorin 정리를 보강하여 시스템의 극점을 추정하는 방법을 연구하였고 본 논문에서는 이의 결과를 이용하여 시스템 행렬계수가 일정한 범위내에 존재하는 간격 행렬(interval matrix) 시스템의 제어를 위하여 안정성을 유지하는 전 상태 궤환(full state feedback) 제어방법의 조건을 제시한다.

전 상태 궤환 제어는 일반적인 LQ(Linear Quadratic) 조정기의 설계시의 상태 가중행렬과 입력 가중행렬을 조정하여 구성되거나 가중(weighted) LQ 조정기의 가중치를 조정함으로써 구성될 수 있다.

2. 문제 설정

일반적인 선형 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$(\Sigma) \quad \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \tag{1}$$

여기서, $x(t)$ 는 n 차원의 상태 벡터, $u(t)$ 는 m 차원의 입력 벡터,
A 행렬은 n X n 차원 그리고 B 행렬은 n X m 차원이다.
행렬 $\{A,B\}$ 는 가제어성(controllability) 조건을 만족한다고 가정한다.

기준(nominal)동작점에서의 제어대상 시스템 모델은 식 (1) 과 같이 표현될 수 있으며, A,B 행렬에 부가되는 시변(time varying)의 불확실성을 $\Delta A(t)$ 와 $\Delta B(t)$로 표현한다.

불확실성을 포함한 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$(\Sigma_I) \quad \dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))\, x(t) + (B + \Delta B(t))\, u(t) \quad \cdots \quad (2)$$

$\Delta A(t)$ 와 $\Delta B(t)$ 의 각 행렬요소는 그 절대값의 크기범위가 다음과 같다고 가정한다.

$$\begin{aligned} |\Delta a_{ij}(t)| &\le (a_{ij})_{max} \\ |\Delta b_{ij}(t)| &\le (b_{ij})_{max} \\ i,j &= 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \quad (3)$$

각각의 행렬요소가 $(a_{ij})_{max}$ 와 $(b_{ij})_{max}$ 로 구성된 행렬을 각각 A_m 과 B_m 으로 정의하면 다음의 관계식이 성립한다.

$$\Delta A(t) \le A_m \qquad \Delta B(t) \le B_m \quad (4)$$

여기서, $\le$ 기호는 행렬요소간의 크기 비교를 의미한다.

3. 불확실한 시스템의 안정성 조건

식 (2) 와 (3) 으로 표현되는 시스템의 안정성 조건을 극점(pole) 추정에 의하여 유도한다.

정리 1 (Gershgorin 정리)[8]

n X n 차원의 행렬 A 의 행렬요소를 a_{ij} 로 표시한다.

$$R_i'(A) \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| \qquad 1 \le i \le n \quad (5)$$

위와 같이 정의된 R_i' 로 행렬 A 의 고유치(eigenvalue)의 위치는 다음과 같이 n 개의 원반(disc) 의 합으로 표현된다.

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le R_i'(A) \} \quad (6)$$

증명) 참고문헌참조 ■

행렬 A 는 정리 1 과 같이 정의되고 행렬 B 를 다음과 같이 정의한다.

$$B \equiv \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n) \quad (7)$$

다음과 같이 정의된 n 개의 원반의 합으로 H_1 을 정의한다.

$$D_k \equiv \{ z \in \mathbb{C} : |z - b_k| \le \rho(|A - B|) \} \quad (8)$$

여기서, $\rho(\ )$ 는 행렬의 스펙트랄(spectral) 반경을 의미하며 $|\ |$ 는 행렬요소들의 절대값으로 구성되는 행렬을 의미한다.

정리 2)[7]

행렬 A 의 고유치들은 H_1 에 속한다.

증명) 참고문헌참조 ■

정리 2의 결과는 행렬의 스펙트랄 반경과 행렬의 크기(norm)과의 성질을 이용하면 n 개의 원반들의 반경이 정리 1 의 최대 반경보다 작다는 것을 알 수 있다.
정리 2의 B 행렬을 A 행렬의 대각요소들로 구성하면 A 행렬의 고유치는 Gershgorin 정리에 의한 반경과 정리 2 의 반경과의 최소 반경으로 이루어진 원반들의 합에 속한다.[7]

위의 결과들을 불확실한 시스템 (Σ_I) 에 적용한다.
이를 위하여 제어입력을 전 상태 궤환으로 다음과 같이 구성한다.

$$u(t) = F\, x(t) \quad (9)$$

전체 페루우프(closed loop) 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}(t) = (A + BF + \Delta A(t) + \Delta B(t)F) x(t) \qquad (10)$$

식 (10) 은 다음과 같이 A_0 와 $\Delta A_0(t)$ 를 정의하면 식 (12) 와 같이 표현된다.

$$A_0 \equiv A + BF \quad \Delta A_0(t) \equiv \Delta A(t) + \Delta B(t)F \qquad (11)$$

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A_0(t)) x(t) \qquad (12)$$

상수행렬 A_0 의 고유치가 중복되지 않는다고 가정하면 고유벡터(eigenvector)들로 구성된 유사변환(similarity transform)행렬 T 로 다음과 같이 고유치들이 대각요소인 행렬을 구할 수 있다.

$$D \equiv T^{-1}A_0T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \qquad (13)$$

λ_i : 행렬 A 의 고유치 ($i=1,2,\cdots,n$)

정리 3) 상수행렬 A_0 가 대각가능(diagonalizable) 하면 식 (12) 로 표현되는 시스템의 고유치는 다음과 같은 영역 D_k 의 합에 포함된다.

$$D_k = \{ z \in \mathbb{C} : | z - \lambda_k | \le \rho(| T^{-1}\Delta A_0(t)T |)\} \quad \cdots \qquad (14)$$

여기서, λ_k 는 행렬 A_0 의 고유치이고 행렬 B는 식(13)과 같다.

증명) 식 (12) 의 시스템에 (13) 의 관계식을 갖는 행렬 T 로 유사변환을 취하면 시스템 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T^{-1} (A_0 + \Delta A_0(t)) T &= T^{-1}A_0T + T^{-1}\Delta A_0(t)T \\ &= D + T^{-1}\Delta A_0(t)T \qquad (15) \end{aligned}$$

정리 2의 B 행렬을 D행렬로 선정하여 결과식에 대입 ■

보조정리 1)[8] 행렬 A, B 가 n X n 차원의 행렬이다.

a) $| A + B | \le |A| + |B|$

b) $| AB | \le |AB|$

c) $| A | \le B$ 이면, $\rho(A) \le \rho(|A|) \le \rho(B)$

따름정리 1) 보조정리 1을 이용하면 정리 3 의 결과는 다음 관계식을 만족한다.

$$D_k \equiv \{ z\in\mathbb{C} : | z - \lambda_k | \le \rho(| T^{-1}| A_m |T| + |T^{-1}|B_m |F| |T|)\} \quad \cdots\cdots \qquad (16)$$

여기서, A_m 과 B_m 은 식 (4) 의 정의와 같다.

증명) 정리 3 에서의 $A_0(t)$ 를 원식으로 대입하고 보조정리를 이용하면 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\begin{aligned} |T^{-1} A_0(t) T | &= | T^{-1} (\Delta A(t) + \Delta B(t) F) T | \\ &\le | T^{-1} \Delta A(t) T | + | T^{-1} \Delta B(t)F T | \\ &\le |T^{-1}| |\Delta A(t)| |T| + |T^{-1}| |\Delta B(t)| |F| |T| \\ &\le |T^{-1}| A_m |T| + |T^{-1}| B_m |F| |T| \end{aligned}$$

$$\cdots\cdots \qquad (17)$$

그러므로 다음관계가 성립된다.

$$\rho(|T^{-1} A_0(t) T |) \le \rho(|T^{-1}| A_m |T| + |T^{-1}| B_m |F| |T|) \quad \cdots\cdots \qquad (18)$$

■

따름정리 2) 다음과 같이 α_i 를 정의한다.

$$\alpha_i \equiv \mathrm{Real}(\lambda_i + \rho(|T^{-1}| A_m |T| + |T^{-1}| B_m |F| |T|))$$

$$\alpha_{max} = \max(\alpha_i) \quad i = 1,2,\cdots, n \qquad (19)$$

λ_i : A + B F 행렬의 고유치

다음 조건을 만족하는 제어 행렬 F 는 (Σ_1) 시스템을 안정화 시킬 수 있다.

$$\alpha_{max} < 0. \qquad (20)$$

증명) 따름정리 1 에 의하여 α_{max} 는 행렬 $A_0 + \Delta A_0(t)$ 고유치가 속하는 최대 실수부의 값이 되며 이 값이 LHP(left half plane) 에 있도록 행렬 F 를 선정하면 전체 페루우프 시스템은 안정화된다. ■

4. 안정성 조건을 이용한 제어기 구성

따름정리 1 의 결과를 이용하여 불확실한 시스템의 제어를 전 상태궤환으로 구성한다. 기준 모델 (Σ) 시스템에서 다음과 같이 가중 LQ 조정기를 설계하거나 극점배치(pole assignment) 방법으로 제어행렬을 구할 수 있다. 다음은 가중 LQ 조정기에 대하여 살펴본다.

μ는 양의 정수의 상수이고 다음식의 리카티(Riccati)식을 이용하여 P 행렬을 구한다.

$$P(A_0 + \mu I)+(A_0^T + \mu I)P - 1/\gamma(PBR^{-1}B^TP) + Q = 0 \qquad \cdots\cdots (21)$$

$$F = 1/\gamma(R^{-1}B^TP) \qquad (22)$$

위의 P 는 (A_0 - BF) 행렬의 모든 고유치들의 실수부가 $-\mu$ 보다 작게 한다.[9]

이는 다음과 같은 목적함수를 최소화하는 제어행렬 F 를 구성한다.

$$J=\lim_{T\to\infty} E\{\frac{1}{T}\int_0^{\infty}\exp(2\mu t)(x^T(t)Qx(t) + \gamma u^T(t)Ru(t))\, dt \} \qquad \cdots\cdots (23)$$

설계된 제어행렬 F 가 식 (20) 의 조건을 만족시키면 안정화 제어행렬이 되며 만족시키지 못할 경우는 μ 와 γ 값을 조정하여 위의 과정을 반복한다.

5. 결 론

본 논문에서는 선형 시스템의 불확실성이 시스템 변수의 변화로 표현되며 이 변수들의 변화 크기를 미리 알 경우의 전 상태 궤환 제어를 통한 안정화 조건을 제시하였다. 또한 이의 조건을 만족시키기 위한 전상태 궤환제어 방법으로 가중 LQ 조정기를 이용하며 안정성 조건을 만족하도록 제어행렬을 반복을 통하여 구한다.

참고 문헌

[1] William E. Schmitendorf ," Design Methodology for Robust Stabilizing Controllers ," Journal of Guidance and Control, Vol. 10, June 1987.

[2] William E. Schmitendorf ," Design of Observer-based Robust Stabilizing Controllers," Automatica, Vol.24, No. 5, pp.693-696, 1988.

[3] Petersen, I. R. and C. V. Hollot, " A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems, " Automatica, Vol.22, 1986.

[4] B.S. Chen and C.C. Wong ," Robust Linear Controller Design : Time Domain Approach," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-32, No. 2, Feb. 1987.

[5] R.V. Patel and M. Toda ," Quantitative Measure of Robustness for Multivariable Systems," Proc. of Joint Automatic Control Conference, San Francisco, California, 1980.

[6] R.K. Yedavalli ," Perturbation Bounds for Robust Stability in Linear State Space Models," International J. of Control, Vol. 42, No. 6, 1985.

[7] Y.T.Juang ," Reduced Conservatism of Eigenvalue Estimation," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 34, No. 9, 1989.

[8] Horn Johnson , Matrix Analysis , Cambridge University Press , pp. 491.1985.

[9] Anderson,B.D.O. and J.B.Moore , Linear Optimal control, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey ,1971.