

정합조건이 만족되지 않는 불확실한 다변수 계통에 대한 슬라이딩 모드 제어기의 설계

천희영 박귀태 김동식 임성준 공진수

고려대학교 대학원 전기공학과

Design of Sliding Mode Controller for Uncertain Multivariable Systems in the absence of Matching Conditions

HeeYoung Chun, GwiTae Park, DongSik Kim, SungJun Lim^o, JinSoo Kong

Department of Electrical Engineering
Korea University

ABSTRACT

All models of dynamical systems invariably have some measure of uncertainties associated with some of their dynamics. The recent approaches to establish robustness of stabilizing feedback control against the possible uncertainties have a serious limitation, that is, their applicability only to the systems that satisfy the matching conditions. Such conditions are rarely met in general applications. If a particular system satisfies the matching conditions, the addition of an actuator will destroy the satisfaction of such conditions.

In this paper, we develop robust control algorithm for uncertain multivariable systems in which the matching conditions are not necessarily met. We employ Lyapunov's second method to derive robust stabilizing controllers which guarantee asymptotic stability against prescribed uncertainties. The derivation consists of transforming the original uncertain system to controllable canonical form and constructing a constant switching surface by designing the closed-loop characteristics as a function of the uncertainties. Numerical examples are discussed as illustrations.

1. 서 론

최근들어 불확실한 계통에 대한 제어 이론을 연구한 논문들이 많이 발표되었다. 이러한 논문들은 종래의 통계 제어 이론과는 달리 불확실성에 대한 통계적인 정보가 필요없이 단지 불확실성의 경계치만을 알고 있는 상태에서 Lyapunov 함수를 이용하여 계통의 안정도를 보장받을 수 있는 제어기를 구성하였다.

그러나 대부분의 이러한 연구는 주로 불확실성이 정합조건 (matching condition) 을 만족하는 경우에 한하여 국한되어 왔다. 만약 정합조건이 만족되지 않는 계통에 대해 기존의 알고리즘을 적용할 경우 불확실성의 영향으로 계통에는 항상 정상상태 오차가 남게 된다. 정합조건이 만족되지 않는 계통에 대한 연구는 주로 Leitmann과 Barmish 등에 의해 발표되었는데 이러한 연구들도 계통의 점근적 안정도 (asymptotic stability) 를 보장하지 못하고 다만 uniformly ultimately boundedness만을 보장하고 있다. [1] - [7]

본 논문에서는 가변구조 제어 이론을 이용하여 계통의 파라미터 변동항이 정합조건을 만족하지 못하는 경우에도 효과적으로 불확실성을 제거하는 건설한 제어 알고리즘을 제시하였다. 가변구조 제어는 제어하고자 하는 계통의 구조를 제어 행하는 전 기간 동안에 의도적으로 바꾸어 줌으로써, 상태 값들을 슬라이딩 모드라는 특이한 동작상태에 머무르도록 제어입력을 발생시켜 응답의 속응성과 정확성 및 건실성을 동시에 얻을 수 있는 제어 알고리즘이다. [8]

가변구조 제어이론으로 불확실한 계통에 대하여 제어를 할 경우 계통의 불확실성이 정합조건을 만족하면 불확실성에 대한 통계적인 정보를 모른다 하더라도 그 한계치만으로도 제어가 가능하다. 그러나 가변구조 제어이론을 정합조건이

만족하지 않는 불확실한 계통에 대해 적용한 사례는 거의 없으며 발표된 연구도 단일입력을 가진 계통에 국한되고 있는 실정이다. [9]

본 논문에서는 먼저 가제어 표준형 변환 (controllable canonical transformation) 을 이용하여 불확실한 다변수 계통이 항상 정합조건을 만족하도록 한 다음에 Lyapunov min-max 기법을 이용하여 파라미터 변동항에 대하여 건설한 제어기를 구성하였다. 기존의 Lyapunov min-max 기법을 사용하여 스위칭 평면을 구성하면 파라미터 변동항의 영향으로 정확한 스위칭 함수의 값을 알지 못할 뿐만 아니라 스위칭 평면도 고정되지 못하므로 이를 보완하여 모든 파라미터 변동항에 대하여 고정된 스위칭 평면을 제시하였다.

2. 불확실한 다변수 계통에 대한 상태공간 모델

2.1 계통의 표현 및 기본적인 정의

다음과 같이 표현되는 불확실한 다변수 계통을 살펴보자.

$$\dot{X} = A(\beta)X + B(\beta)U \tag{2-1}$$

여기서 $X \in R^n$ 는 상태벡터, $U \in R^m$ 는 제어입력 벡터, $A(\beta) \in R^{n \times n}$ 및 $B(\beta) \in R^{n \times m}$ 는 계통행렬이며 β 는 유한차원의 유클리드 공간에서 정의되는 변수이며 계통의 불확실성을 나타낸다.

식 (2-1)과 같이 표현되는 일반화된 불확실한 다변수 계통에 대해 지금까지 주로 연구된 내용은 계통의 불확실성이 입력행렬 B의 치역공간 (range space) 에 포함되는 경우에만 국한되어 왔으므로 이에 대해 간략하게 기술한다.

가정 1 : 정합조건 (matching condition)

다음의 관계식을 만족하는 행렬함수 $D(\beta) \in R^{m \times n}$, $E(\beta) \in R^{m \times m}$ 가 존재한다.

$$A(\beta) = A + \Delta A(\beta), \quad B(\beta) = B + \Delta B(\beta) \\ \Delta A(\beta) = BD(\beta) \\ \Delta B(\beta) = BE(\beta)$$

주어진 계통이 위의 가정 1을 만족하는 경우 계통의 모든 불확실성을 입력행렬 B의 치역공간에 포함시킬 수 있게 된다. 즉,

$$\dot{X} = AX + B(U + \rho(\beta, X, U)) \tag{2-2}$$

여기서, $\rho(\beta, X, U) = D(\beta)X + E(\beta)U$ 이다.

$\rho(\beta, X, U) = 0$ 인 경우, 즉 계통에 불확실성이 존재하지 않는 경우 위식은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{X} = AX + BU \tag{2-3}$$

이와같이 표현된 계통을 공칭계통 (nominal system) 이라 한다.

계통의 불확실성이 가정 1을 만족하는 경우에는 그 불확실성에 대한 경계값을 고려하여 제어를 설계해도 충분히 우수한 제어 성능을 얻을 수 있게 된다.[10]

그러나, 불확실한 계통이 가정 1을 만족하지 않는 경우에는 기존의 제어기법으로는 항상 정상상태오차 (steady state error)가 남게된다. 따라서 이러한 문제를 해결하기에 앞서 먼저 계통의 불확실성에 대해 A, B행렬이 다음의 가정 2를 만족한다고 가정한다.

가정 2 : 완전 가제어성 (completely controllable)
 (A(β), B(β)) 쌍은 모든 불확실성 β에 대해 항상 가제어하다.

다음 절에서는 가정 1을 만족하지 않는 불확실한 계통이 가정 2를 만족하는 경우, 주어진 불확실한 계통이 가정 1을 만족하도록 하는 가제어 표준형 변환 (controllable canonical transform)에 대해 기술한다.

2.2 가제어 표준형 변환 (controllable canonical transformation) [11],[12]

식 (2-1)로 표현되는 계통이 가제어하다고 가정하였으므로 다음과 같이 정의되는 가제어 행렬 (controllability matrix) U의 rank는 n이 된다.

$$U(\beta) = [B(\beta) \ A(\beta)B(\beta) \ \dots \ A(\beta)^{n-1}B(\beta)] \quad (2-4)$$

결국 행렬 U(β)에는 선형독립인 열벡터가 n개 존재하므로 이 n개의 선형독립인 열벡터를 찾아서 정칙 (nonsingular)인 행렬 M(β)을 구성하면 다음과 같다.

$$M(\beta) = [b_1 \dots A^{m-1}b_1 \quad b_2 \dots A^{m-1}b_2 \quad \dots \quad b_m \dots A^{m-1}b_m] \quad (2-5)$$

M(β)의 역행렬 M⁻¹(β)를 구하여 그 각 행벡터를 e_iμ_i (i = 1, 2, ..., m)로 정의하면 M⁻¹(β)는 다음과 같이 표현된다.

$$M^{-1}(\beta) = \begin{bmatrix} e_{11} \\ \vdots \\ e_{1\mu_1} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{2\mu_2} \\ \vdots \\ e_{m1} \\ \vdots \\ e_{m\mu_m} \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

여기서 μ_i는 가제어 지표 (controllability index)를 나타내며 다음의 관계가 성립한다.

$$\sum_{i=1}^m \mu_i = n \quad (2-7)$$

식 (2-6)을 이용하여 가제어 표준형 변환 행렬 T(β)를 구성하면 다음과 같다.

$$T(\beta) = \begin{bmatrix} e_{1\mu_1} \\ \vdots \\ e_{1\mu_1} A^{\mu_1-1} \\ e_{2\mu_2} \\ \vdots \\ e_{2\mu_2} A^{\mu_2-1} \\ \vdots \\ e_{m\mu_m} \\ \vdots \\ e_{m\mu_m} A^{\mu_m-1} \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

식 (2-8)에서 정의된 좌표변환을 이용하여 식 (2-1)의 계통을 새로운 좌표계의 기저 벡터 Z로 변환하면 식 (2-10)과 같다.

$$\dot{Z} = T(\beta)X \quad (2-9)$$

$$\dot{Z} = \bar{A}(\beta)Z + \bar{B}(\beta)U \quad (2-10)$$

여기서 $\bar{A}(\beta) = T(\beta)A(\beta)T^{-1}(\beta)$ 이고 $\bar{B}(\beta) = T(\beta)B(\beta)$ 이며 각각 다음과 같은 형태를 가진다.

$$\bar{A}(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ x(\beta) & x(\beta) & \dots & x(\beta) & x(\beta) \\ & & & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x(\beta) & x(\beta) & \dots & x(\beta) & x(\beta) & x(\beta) & \dots & x(\beta) & x(\beta) \\ & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x(\beta) & x(\beta) & \dots & x(\beta) & & & & & x(\beta) & x(\beta) & \dots & x(\beta) \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

$$\bar{B}(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x(\beta) & x(\beta) & \dots & x(\beta) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x(\beta) & \dots & x(\beta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

여기서 x(β)는 가능한 영이 아닌 요소를 나타내며 β의 함수이다.

식 (2-11)로 표현된 변환된 계통행렬 $\bar{A}(\beta)$ 에는 파라미터 변동항이 x(β)로 표현된 부분에만 존재하므로 가정 1을 항상 만족함을 알 수 있다.

표준형으로 변환된 $\bar{A}(\beta)$ 와 $\bar{B}(\beta)$ 는 가정 1을 만족하므로 기존의 제어기법에 의해 제어기를 구성한 경우 제어기 계수에는 미지의 파라미터 변동항인 β 가 포함되어 정확한 입력 값을 결정할 수 없게 된다.

따라서 다음절에서는 이러한 난점을 해결하기 위해 Lyapunov min-max 기법에 의한 제어기 설계에 관해 기술한다.

3. 불확실한 다변수 계통에 대한 제안된 Lyapunov min-max 기법

식 (2-9)와 같이 정의되는 좌표변환을 통하여 얻어진 새로운 좌표계에 대한 계통의 표현식은 아래와 같다.

$$\dot{Z} = \bar{A}(\beta)Z + \bar{B}(\beta)U \quad (2-10)$$

식 (2-10)에서 $\bar{A}(\beta)$ 는 불안정 할 수 있으므로 Lyapunov min-max 기법을 적용하기 위한 선행조건으로써 $\bar{A}(\beta)$ 를 안정화 시키는 것이 필요하게 된다.

식 (2-10)으로 표현되는 계통은 모든 파라미터 변동 β 에

대해 가제어하다고 가정하였으므로 계통행렬 $\bar{A}(\beta)$ 를 안정한 행렬 $\hat{A}(\beta)$ 로 안정화 시킬수 있는 귀환이득행렬 $G(\beta)$ 가 존재한다.

$$\hat{A}(\beta) = \bar{A}(\beta) - \bar{B}(\beta)G(\beta) \quad (3-1)$$

식 (3-1)을 이용하여 식 (2-9)를 다시 표현하면 다음과 같게 된다.

$$\dot{Z} = \hat{A}(\beta)Z + \bar{B}(U + G(\beta)Z) \quad (3-2)$$

여기서 $\hat{A}(\beta)$ 는 β 의 함수이므로 그 구체적인 값은 모르나 β 에 관계없이 항상 고유치가 좌반면에 위치하는 행렬이다. 또한 $G(\beta)$ 도 파라미터 변동항을 포함하고 있으므로 기존의 극배치 방식 (pole placement method)으로는 구할 수 없게 된다. $\hat{A}(\beta)$ 와 $G(\beta)$ 를 결정하는 문제는 3.3절에서 구체적으로 언급하기로 하며 다음절에서는 Lyapunov min-max 기법에 의한 스위칭 평면의 설정에 대해 기술한다.

3.1 Lyapunov min-max 기법에 의한 스위칭 평면의 설정

식 (3-2)와 같이 표현되는 계통에 대한 Lyapunov 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$V = Z^T P(\beta)Z \quad (3-3)$$

여기서 $P(\beta)$ 는 계통의 불확실성 β 에 대하여 식 (3-4)와 같이 표현되는 Lyapunov 방정식을 만족하는 positive definite 행렬이다.

$$P(\beta)\hat{A}(\beta) + \hat{A}(\beta)^T P(\beta) + Q(\beta) = 0 \quad (3-4)$$

식 (3-4)에서 $Q(\beta)$ 는 불확실성 β 의 함수인 positive definite 행렬이다.

식 (3-3)을 식간에 대해 미분하여 식 (3-2)를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{V} = -Z^T Q(\beta)Z + 2(\bar{B}^T(\beta)P(\beta)Z)^T [U + G(\beta)Z] \quad (3-5)$$

식 (3-5)의 V 를 항상 음의 값이 되도록 제어입력 U 를 결정한다면 Z 는 점근적으로 안정하게 된다. 그런데 Z 가 영으로 수렴하게 된다면 변환행렬 $T(\beta)$ 가 정칙이므로 X 도 영으로 수렴하게 된다.

식 (3-5)에서 V 가 항상 음의 값이 되도록 제어입력 U 를 가장 구조 제어이론을 적용하여 구성하기 위해서는 먼저 스위칭 평면의 설정이 필요하다.

일반적으로 스위칭 평면은 다음과 같이 선정한다.

$$S = \bar{B}^T(\beta)P(\beta)Z = 0 \quad (3-6)$$

식 (3-6)을 원래 좌표계로 환원하면 다음과 같다.

$$S = \bar{B}^T(\beta)P(\beta)T(\beta)X = 0 \quad (3-7)$$

식 (3-7) 이 스위칭 평면으로 정의되기 위해서는 모든 불확실성 β 에 대하여 식 (3-7)이 항상 고정되어 있어야만 한다. 그런데 식 (3-7)로 정의된 스위칭 평면은 β 의 함수이므로 스위칭 평면이 β 의 값에 따라 변할뿐 아니라 정확한 값도 알 수 없으므로 스위칭 논리를 구성할 수가 없게 된다.

이러한 문제를 해결하기 위해 식 (3-4)를 만족하는 $P(\beta)$ 를 결정하는데 있어 식 (3-7)에 존재하는 불확실성 β 를 상쇄할 수 있도록 $P(\beta)$ 를 다음과 같이 선정해야만 한다.

$$\bar{B}^T(\beta)P(\beta) = \bar{B}^T(\beta_0)P(\beta_0)T(\beta_0)T(\beta)^{-1} \quad (3-8)$$

그러므로 식 (3-8)이 만족하도록 $P(\beta)$ 를 결정하게 되면 스위칭 평면 S 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$S = \bar{B}^T(\beta_0)P(\beta_0)T(\beta_0)X \quad (3-9)$$

식 (3-9)를 이용하여 식 (3-5)를 다시 표현하면 다음과 같게 된다.

$$\dot{V} = -Z^T Q(\beta)Z + 2S^T [U + G(\beta)Z] \quad (3-10)$$

다음 절에서는 식 (3-10)이 항상 음이 되도록 하는 제어입력 U 를 결정하는 방법에 대해 기술한다.

3.2 Lyapunov min-max 기법에 의한 제어입력의 결정

V 가 항상 음의 값이 되려면 식 (3-10)에서 두번째항이 항상 음이 되도록 U 를 결정해 주면 된다.

먼저 식 (3-10)의 두번째항을 성분으로 표현하면 다음과 같다.

$$2S^T [U + G(\beta)T(\beta)X] = \sum_{i=1}^m s_i [u_i + \text{Row}_i(G(\beta)T(\beta))X] \quad (3-11)$$

여기서 s_i 와 u_i 는 각각 S 와 U 의 i 번째 성분이며 $\text{Row}_i(G(\beta)T(\beta))$ 는 $G(\beta)T(\beta)$ 의 i 번째 행 벡터를 나타낸다.

식 (3-11)이 항상 음의 값이 되도록 하기 위해 제어입력 u_i 를 다음과 같이 결정한다.

$$u_i = - \max_{\beta} \|\text{Row}_i(G(\beta)T(\beta))\| \|X\| \text{sgn}(s_i) \quad (3-12)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

여기서 $\|\cdot\|$ 는 유클리드 공간에서 정의되는 norm이며 $\text{sgn}(s_i)$ 는 식 (3-13)과 같이 정의되는 함수이다.

$$\text{sgn}(s_i) = \begin{cases} 1 & s_i > 0 \\ -1 & s_i < 0 \end{cases} \quad (3-13)$$

그림 1에 제안된 Lyapunov min-max 기법을 이용한 제어계통의 블록선도를 나타내었다.

식 (3-12)로 표현되는 제어입력을 결정하기 위해서는 $G(\beta)$ 의 값이 필요하므로 다음절에서는 $G(\beta)$ 를 결정하는 방법에 대해 기술한다.

3.3 이득행렬 $G(\beta)$ 의 결정

이득행렬 $G(\beta)$ 를 결정하기 전에 먼저 식 (3-1)을 고려한다.

$$\hat{A}(\beta) = \bar{A}(\beta) - \bar{B}(\beta)G(\beta) \quad (3-1)$$

여기서 $\hat{A}(\beta)$ 는 식 (3-8)을 만족하는 $P(\beta)$ 를 구하여 식 (3-4)로 주어진 Lyapunov 방정식을 풀어서 결정할 수 있다. 식 (3-1)에서 $\bar{B}(\beta)$ 는 역행렬이 정의되지 않으므로 일반적으로 $G(\beta)$ 는 유일하게 결정되지 않는다.

그러므로, $\bar{B}(\beta)$ 의 좌측 의사 역행렬 (pseudo inverse) 를 이용하여 $G(\beta)$ 를 다음과 같이 결정한다.

$$G(\beta) = \bar{B}^L(\beta) \{ \bar{A}(\beta) - \hat{A}(\beta) \} \quad (3-14)$$

여기서 $\bar{B}^L(\beta)$ 는 식 (3-15)와 같이 정의되는 $\bar{B}(\beta)$ 의 좌측 의사 역행렬이다.

$$\bar{B}^L(\beta) = [\bar{B}^T(\beta) \bar{B}(\beta)]^{-1} \bar{B}^T(\beta) \quad (3-15)$$

일반적으로 식 (3-14)는 식 (3-1)의 정확한 해는 아니며, 단지 $\bar{B}(\beta)G(\beta) - \{ \bar{A}(\beta) - \hat{A}(\beta) \}$ 의 norm을 최소로 하는 해가 된다. 그러나 다음 정리 1에서 식 (3-14)로 결정되는 이득행렬 $G(\beta)$ 는 계통이 가제어 표준형으로 표현된 경우에 한해 식 (3-1)의 근사해가 아닌 정확한 해임을 증명하였다. [13], [14]

정리 1.

계통이 가제어 표준형으로 표현되어 있는 경우 식 (3-14)로 표현되는 $G(\beta)$ 는 식 (3-1)의 정확한 해가 된다.

$$\hat{A}(\beta) = \bar{A}(\beta) - \bar{B}(\beta)G(\beta) \quad (3-1)$$

$$G(\beta) = \bar{B}^L(\beta) \{ \bar{A}(\beta) - \hat{A}(\beta) \} \quad (3-14)$$

여기서 $\bar{B}^L(\beta)$ 는 $\bar{B}(\beta)$ 의 좌측 의사 역행렬이며 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{B}^L(\beta) = [\bar{B}^T(\beta) \bar{B}(\beta)]^{-1} \bar{B}^T(\beta) \quad (3-15)$$

<증명>

$\bar{A}(\beta) - \hat{A}(\beta) = \tilde{A}(\beta)$ 라 정의하면 $\tilde{A}(\beta)$ 는 다음과 같은 형태를 가진다.

$$\tilde{A}(\beta) = [\tilde{a}_1(\beta) \tilde{a}_2(\beta) \cdots \tilde{a}_n(\beta)]^T \quad (3-16)$$

여기서 $\tilde{a}_i(\beta)$ 는 다음과 같이 표현되는 행벡터이다.

$$\tilde{a}_i(\beta) = 0 \quad \text{if } i \neq i_h = \sum_{k=1}^h \mu_k \quad (3-17)$$

단 $h = 1, 2, \dots, m$

식 (3-14)가 식 (3-1)의 정확한 해가 된다는 것을 보이려면 $G(\beta)$ 를 식 (3-1)에 대입하여 양변이 서로 같다는 것을 증명하면 된다.

먼저 식 (3-1)을 변형하여 다시 쓰면 식 (3-18)과 같다.

$$\bar{B}(\beta)G(\beta) = \bar{A}(\beta) - \hat{A}(\beta) \quad (3-18)$$

식 (3-18)에 식 (3-14)의 $G(\beta)$ 를 대입하면 다음과 같다.

$$\bar{B}(\beta)\bar{B}^L(\beta) \{ \bar{A}(\beta) - \hat{A}(\beta) \} = \bar{A}(\beta) - \hat{A}(\beta) \quad (3-19)$$

식 (3-19)에서 $\bar{B}(\beta)\bar{B}^L(\beta) = W \in R^{n \times n}$ 라 정의하고 $\bar{B}(\beta)$ 의 형태에 유의하여 W 의 각 성분을 결정하면 다음과 같다.

$$W_{ij} = \xi_i \delta_{ij} \quad (3-20)$$

여기서 ξ_i 와 δ_{ij} 는 각각 다음과 같이 정의되는 기호이다.

$$\begin{cases} \xi_i = 0 & \text{if } i \neq i_h \\ \xi_i = 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3-21)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (3-22)$$

W 와 $\tilde{A}(\beta)$ 의 곱을 Z 라 정의하고 식(3-17), 식(3-21), 식(3-22)를 이용하여 Z 의 각 성분을 W 와 $\tilde{A}(\beta)$ 의 각 성분으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Z_{ij}(\beta) &= \sum_{k=1}^n W_{ik} \tilde{A}_{kj}(\beta) \\ &= \sum_{k=1}^n \xi_i \delta_{ik} \tilde{A}_{kj}(\beta) \\ &= \xi_i \tilde{A}_{ij}(\beta) \\ &= \tilde{A}_{ij}(\beta) \end{aligned} \quad (3-23)$$

식 (3-23)으로 부터 다음의 관계가 성립한다.

$$Z(\beta) = W \tilde{A}(\beta) = \tilde{A}(\beta) \quad (3-24)$$

그러므로 식 (3-24)로 부터 식 (3-14)로 정리된 $G(\beta)$ 는 식 (3-1)의 정확한 해임을 알 수 있다.

- 증명 끝 -

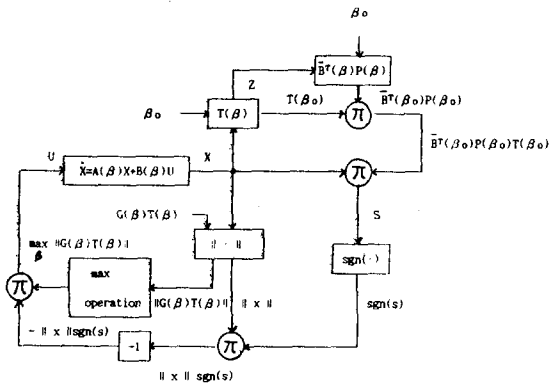


그림 1. 제안된 Lyapunov min-max 기법을 이용한 제어 계통의 블록선도

4. 시뮬레이션 연구 및 결과

본 절에서는 제안된 Lyapunov min-max 기법의 유효성을 입증하기 위하여 식 (4-1)과 같이 표현되는 2차 계통에 대하여 시뮬레이션을 수행하였다.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-\beta) \\ \beta & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \beta \\ 1-\beta \end{bmatrix} U \quad (4-1)$$

$$X(0) = [0.3 \quad -1]^T$$

여기서 β 는 계통의 파라미터 변동을 나타내며 다음과 같은 범위내에서 변화한다고 가정하였다.

$$0.1 \leq \beta \leq 1 \quad (4-2)$$

4.1 가제어 표준형으로의 변환

식 (2-4)로 부터 가제어 행렬 $U(\beta)$ 는 다음과 같이 결정된다.

$$U(\beta) = \begin{bmatrix} \beta & -(1-\beta)^2 \\ (1-\beta) & \beta^2 \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

식 (2-8)로부터 가제어 표준형 변환행렬 $T(\beta)$ 는 다음과 같이 결정된다.

$$T(\beta) = \frac{1}{\Delta(\beta)} \begin{bmatrix} -(1-\beta) & \beta \\ \beta^2 & (1-\beta)^2 \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

여기서 $\Delta(\beta)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta(\beta) = \det\{U(\beta)\} = \beta^3 + (1-\beta)^3 \quad (4-5)$$

식 (4-4)에서 결정된 $T(\beta)$ 를 이용하여 다음과 같은 좌표 변환을 정의한다.

$$Z = T(\beta)X \quad (2-9)$$

식 (4-6)에서 정의된 좌표변환을 이용하여 식 (4-1)의 계통을 새로운 좌표계에서 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\beta(1-\beta) \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U \quad (4-7)$$

식 (4-7)로부터 파라미터 변동항은 새로운 좌표계에서 정합조건이 만족됨을 알 수 있다.

4.2 스위칭 평면의 설정

식 (3-8)을 만족하는 positive definite 행렬 $P(\beta)$ 를 구하여 $\bar{B}^T P(\beta)$ 와 곱을 취하면 다음과 같다.

$$\bar{B}^T P(\beta) = [P_{21}(\beta) \ P_{22}(\beta)] \quad (4-8)$$

여기서 $P_{21}(\beta)$ 와 $P_{22}(\beta)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$P_{21}(\beta) = (2\beta-1)P_{22}(\beta_0) + (4\beta-4\beta+2)P_{21}(\beta_0)$$

$$P_{22}(\beta) = P_{22}(\beta_0) + (2-4\beta)P_{21}(\beta_0) \quad (4-9)$$

그런데 식 (4-9)에서 $\beta_0 = 0.5$ 로 선정하였으며 $P_{21}(\beta_0)$ 와 $P_{22}(\beta_0)$ 를 각각 식 (4-10)과 같이 선정하면 식 (4-9)는 식 (4-11)과 같이 표현된다.

$$P_{21}(\beta_0) = 1, \quad P_{22}(\beta_0) = 4 \quad (4-10)$$

$$\begin{aligned} P_{21}(\beta) &= 4\beta^2 + 4\beta - 2 \\ P_{22}(\beta) &= 6 - 4\beta \end{aligned} \quad (4-11)$$

따라서 식 (3-9)로부터 스위칭 평면 S 는 다음과 같이 결정된다.

$$S = 2x_1 + 6x_2 \quad (4-12)$$

4.3 궤환이득 $G(\beta)$ 의 결정

식 (3-4)의 Lyapunov 방정식을 풀어 $\hat{A}(\beta)$ 를 결정하면 다음과 같다.

$$\hat{A}(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \hat{a}_1(\beta) & \hat{a}_2(\beta) \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

여기서 $\hat{a}_1(\beta)$ 와 $\hat{a}_2(\beta)$ 는 각각 다음과 같이 결정된다.

$$a_1(\beta) = \frac{-1}{4\beta^2 + 4\beta - 2} \quad (4-14)$$

$$a_2(\beta) = \frac{4\beta^2 + 4\beta - 1}{4\beta - 6}$$

식 (4-7)과 식 (4-14)로부터 궤환이득 $G(\beta)$ 를 결정하면 다음과 같다.

$$G(\beta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\beta^2 + 4\beta - 2} - \beta(1-\beta) & -\frac{4\beta^2 + 4\beta - 1}{4\beta - 6} \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

4.4 제어입력의 결정

식 (4-4)와 식 (4-15)의 값을 이용하여 제어입력 U 를 식 (3-12)로부터 결정하면 다음과 같다.

$$u = -\max_{0.1 \leq \beta \leq 1} \|G(\beta)T(\beta)\| (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \text{sgn}(s) \quad (4-16)$$

이상과 같이 결정된 정보로부터 시뮬레이션을 수행한 결과를 그림 2 - 그림 9에 도시하였다.

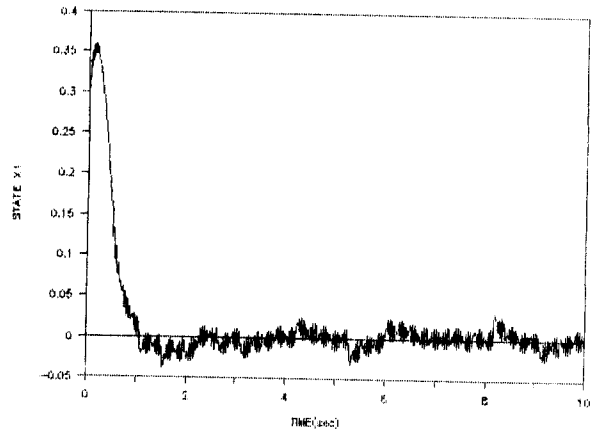
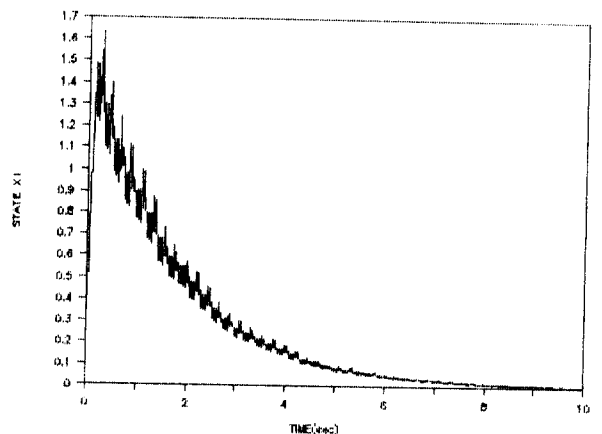


그림 2. 기존의 가변구조 제어기법에 의한 상태궤적 x_1



443 그림 3. 제안된 Lyapunov min-max 기법에 의한 상태궤적 x_1

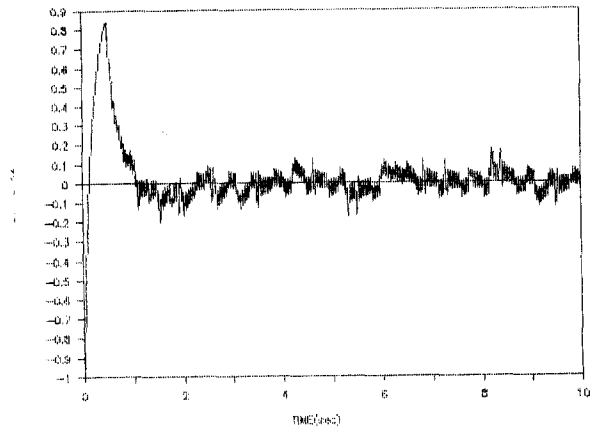


그림 4. 기존의 가변구조 제어기법에 의한 상태궤적 x_2

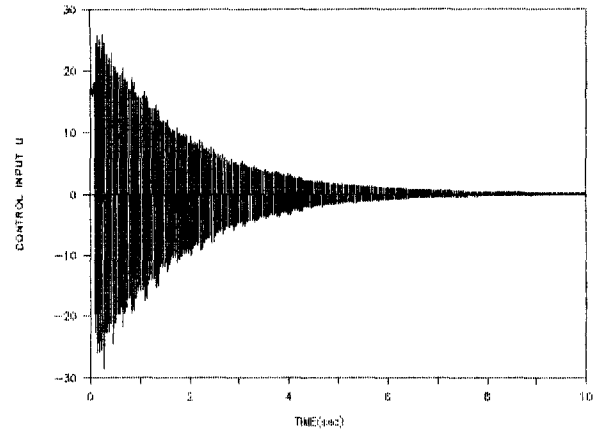


그림 7. 제안된 Lyapunov min-max 기법에 의한 제어입력 u

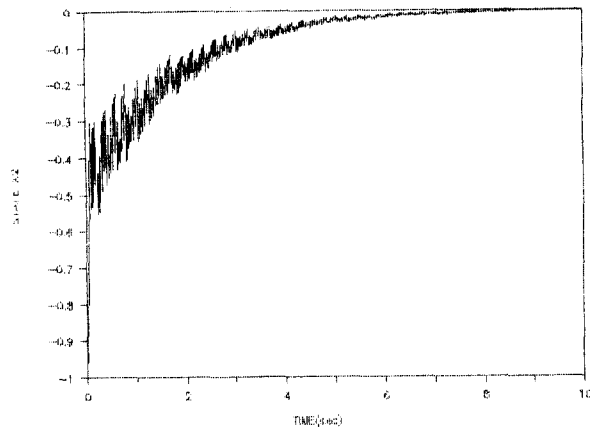


그림 5. 제안된 Lyapunov min-max 기법에 의한 상태궤적 x_2

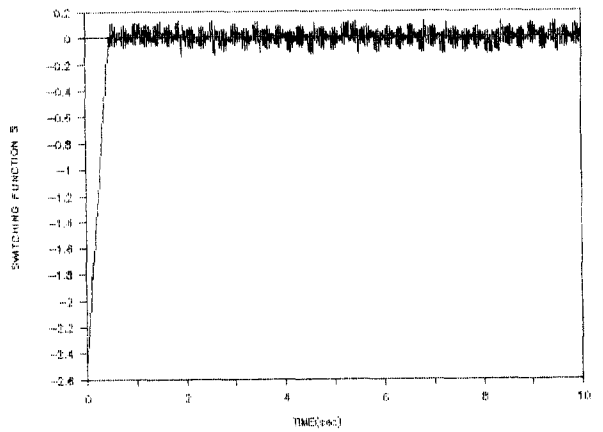


그림 8. 기존의 가변구조 제어기법에 의한 스위칭 함수 s

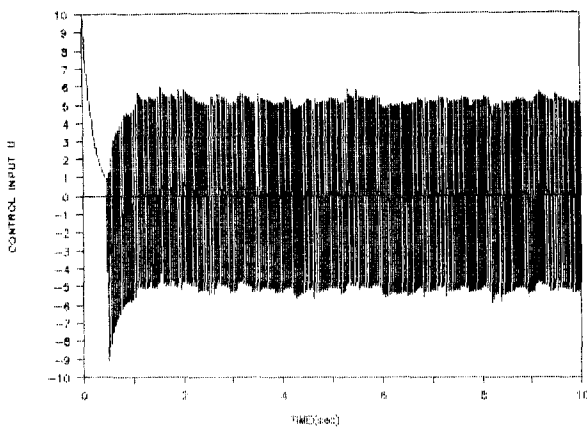


그림 6. 기존의 가변구조 제어기법에 의한 제어입력 u

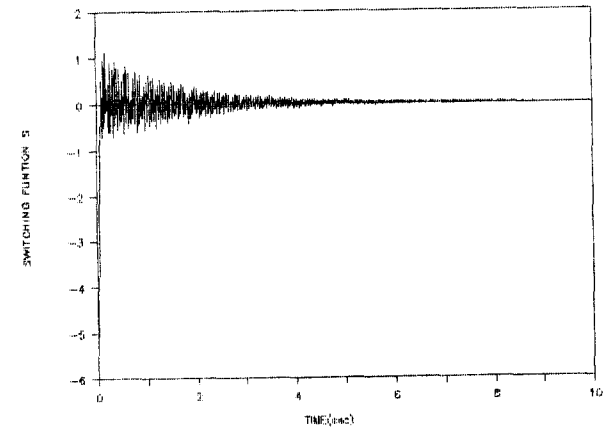


그림 9. 제안된 Lyapunov min-max 기법에 의한 스위칭 함수 s

5. 결 론

본 논문에서는 Lyapunov min-max 기법을 이용하여 계통의 파라미터 변동항이 정합조건을 만족하지 못하는 경우에도 효과적으로 불확실성을 보상하는 건설한 제어 알고리즘을 제안하였다. 제안된 건설 제어 알고리즘은 기존의 정합조건이라는 엄격한 틀에서 벗어나 단지 모든 불확실성에 대하여 계통이 가제어하다는 가정만이 만족된다면 계통의 점근적 안정도 (asymptotic stability)를 보장할 수 있는 장점을 가지고 있다. 또한 빠른 스위칭에 의해 계통을 제어하기 때문에 일반 자동제어 분야에서는 서로 상충관계에 있는 응답의 속응성과 정확성을 동시에 개선 할 수 있다는 장점도 가지고 있다.

그러나 기존의 가변구조 제어기법과는 달리 슬라이딩 모드에서의 계통의 고유치를 설계자 임의대로 설정할 수 없다는 단점이 있다. 향후 과제로서 계통의 파라미터 변동 뿐만 아니라 미지의 외란이 정합조건을 만족하지 못하는 경우에도 효과적으로 계통의 불확실성을 보상할 수 있는 제어 알고리즘의 개발에 대한 연구가 수행 될 예정이다.

6. 참고 문헌.

1. M.J. Corless, G. Leitmann, "Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems" IEEE Trans. Vol.AC-26, No.5 1139-1144
2. W.E.Schmitendorf, T.H.Hopp, " Asymptotic tracking of uncertain systems in the absence of matching conditions" ACC. '85. 423-426
3. Y. H. Chen, G. Leitmann, " Robustness of uncertain systems in the absence of matching assumptions" INT.J.Control.1987, Vol.45, No5. 1527-1542
4. Y.H.Chen, "On the robustness of mismatched uncertain dynamical systems " Journal of Dynamic systems, Measurement, and Control 1987, Vol.109, 29-35
5. R.K.Yedavalli, Z.Liang, " Reduced conservatism in the ultimate boundedness control of mismatched uncertain linear systems" Journal of Dynamic systems, Measurement and control 1987, Vol.109, 1-6
6. B. R. Barmish, G. Leitmann, " On the ultimate boundedness control of uncertain systems in the absence of matching assumptions " IEEE Trans. Vol. AC-27, No.1, 1982, 153-158
7. S.Gutmann, "Uncertain dynamical system - a Lyapunov min - max approach " IEEE Trans. Vol.AC-24, No.3, 1979, 437-443
8. E.P.Ryan, "A Variable structure approach to feedback regulation of uncertain dynamical system" INT J. CONT. 1983, Vol.38, No.6, 1121-1134
9. H.L.Stalford, " Robust control of uncertain systems in the absence of matching conditions : scalar input " Proceeding of the 26th conference on decision and control 1987, 1298-1307
10. G. T. Park, C. P. Kuo, D. S. Kim, " The Robust Controller Design for Uncertain Multivariable Systems Using Switching Dynamics " KACC, 1989
11. D. G. Luenberger, " Canonical forms for linear multivariable systems " IEEE Trans, 1967, 290-293
12. C.T. Chen, Linear system theory and design
13. H.J.Malik, " A note on generalized inverses"
14. C.A.Rohde, " Some results on generalized inverses" Siam review, Vol 8, No.2, 1966, 201-205