'90 韓國自動制御學術會議論文集 1990. 10.26~27

극점감도를 이용한 제어기 설계

○임 동 균　강 진 식　서 병 설

Controller Design by Using Pole-Sensitivity

○ Dong-Gyun Lim*)　Jin-Shig Kang**)　Byung-Sul Suh**)

* Department of Communication Eng., Choong-Chung Eng. Coll.

** Department of Electronic Communication Eng., Han Yang Univ.

Abstract

In this paper, we present a method of analising perturbed linear system by pole sensitivity defined by the rate of pole movement with respect of perturbation. Pole sensitivity give us not only the rate of pole movement but also the directional information of the pole movement. We present a method of design of a LQR by considering the pole sensitivity and show that the suggested method guarantee the stability robustness of parameter perturbation.

1. 서론

강인한 (robustness) 제어기의 설계는 매개변수 (parameter)에 구조화된 (structured), 또는 구조화되지 않은 (unstructured) 불확실성을 포함하거나 모델의 전달함수에 불확실성을 포함하는 형태[2]로 다루어져 왔다. 일반적으로 LQ 레귤레이터는 모델의 전달함수에 ±60°의 위상여유 (phase margin)와 -6~∞ dB의 이득여유 (amplitude margin)를 갖는다는 사실이 밝혀졌지만 공칭 (normiral)모델에 대한 LQ 레귤레이터가 안정하다 하더라도 시스템의 매개변수에 섭동이 존재하는 경우 안정도를 보장할 수 없다. 본 논문에서는 플랜트의 모델을 공칭행렬과 구조화된 불확실성을 포함하도록 모델링하고 이러한 상황하에서 극점감도를 섭동행렬의 크기변화에 대한 극점변화율로 정의하고, 극점감도를 최소화 하도록 제어기를 설계할 경우 LQ 레귤레이터의 안정도가 보장됨을 보인다.

2. 극점감도 (pole sensitivity)

선형시스템 제어에 있어서 고유치 (eigen value)와 고유벡터 (eigen vector)는 중요한 역할을 한다. 주어진 행렬에서 각 요소들에 대한 섭동 (perturbation)은 시스템의 고유치와 고유벡터를 변하게하는 요인이 된다. 정방행렬 A 에서 섭동행렬 C_A가 존재할때 고유치가 변화하는 값과 방향은 극점감도를 구함으로서 해석할 수 있다. 공칭 (norminal)행렬이 A_0 일때 i번째 고유치 λ_i와 i번째 고유벡터 u_i는 다음식을 만족한다.

$$A u_i = \lambda_i u_i \tag{1}$$

섭동된 행렬 (perturbed matrix)을 다음과 같이 가정한다.

$$A(\theta) = A_0 + C_A \theta(t) \tag{2}$$

여기서 θ는 비선형 시변 연속함수 (nonlinear time varing continous function)이며 다음과 같은 한계값을 갖는다고 가정한다.

$$|\theta| \le 1 \tag{3}$$

식 (2)에 대한 고유치 λ_i와 우방고유벡터 u_i는 다음과 같이 표현된다.

$$A(\alpha)u_i = \lambda_i u_i \tag{4}$$

여기서 λ_i, u, A 는 α에 의존하는 함수이며 α가 연속이므로 α에 대하여 미분 가능하게 된다. 따라서 식 (4)를 α에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{dA}{d\alpha} u_i + A\frac{du}{d\alpha} = \frac{d\lambda_i}{d\alpha} u_i + \lambda_i \frac{du_i}{d\alpha} \tag{5}$$

식 (5)의 좌,우변에 i번째 좌방 고유벡터 v_i를 곱하면 다음식으로 된다.

$$v_i^T \frac{dA}{d\alpha} u_i + v_i^T A \frac{du}{d\alpha} = \frac{d\lambda_i}{d\alpha} v_i^T u_i + \lambda_i v_i^T \frac{du_i}{d\alpha} \tag{6}$$

여기서 $v_i^T A(du_i/d\alpha) = \lambda_i v_i^T (du_i/d\alpha)$ 인 관계를 이용하면 식 (6)은 다음 식으로 나타내어 진다.

$$v_i^T \frac{dA}{d\alpha} u_i = \frac{d\lambda_i}{d\alpha} v_i^T u_i \tag{7}$$

극점감도 (pole sensitivity)를 α의 변화율에 대한 극점위치 변화율로 정의하면 식 (7)에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_i \equiv \frac{d\lambda_i}{d\alpha} = \frac{v_i^T (dA/d\alpha) u_i}{v_i^T u_i} \tag{8}$$

식 (8)은 미소한 α의 변화에 의한 i번째 고유치의 변화율을 나타내며 S_i값의 부호와 $d\alpha$의 부호로서 i번째 고유치가 변화하는 방향을 알 수 있다. S_i와 $d\alpha$ 와의 관계는 다음과 같이 요약된다.

요약 : ① $S_i > 0,\ d\alpha > 0$ 인 경우

- $d\lambda_i > 0$
- 고유치는 우측면으로 이동하려는 성질을 갖는다.

② $S_i > 0,\ d\alpha < 0$ 인 경우

- $d\lambda_i < 0$
- 고유치는 좌측면으로 이동하려는 성질을 갖는다.

③ $S_i > 0,\ d\alpha > 0$ 인 경우

- $d\lambda_i < 0$
- 고유치는 좌측면으로 이동하려는 성질을 갖는다.

④ $S_i < 0,\ d\alpha < 0$ 인 경우

- $d\lambda_i > 0$
- 고유치는 우측면으로 이동하려는 성질을 갖는다.

3.LQR (Linear Quadratic Regulator) 설계

다음과 같은 시스템을 고려 한다.

$$\dot{X}(t) = A_o X(t) + B_o u(t)$$
$$y(t) = C\,X(t) \tag{9}$$

LQR 설계문제는 식 (9)로 주어지는 플랜트 모델에 대하여 다음과 같이 주어지는 평가함수 (cost function)를 최소로 하는 제어 입력 u(t)를 구하는 문제로 요약된다.

$$J = \int_{t_o}^{t_f} [\, X^T Q X + u^T R u \,]\, dt \tag{10}$$

이때 제어입력 u(t)는 다음과 같이 구하여 진다.

$$u(t) = -R^{-1} B^T K X(t) \tag{11}$$

여기서 K는 다음과 같이 주어지는 대수 리카티 방정식의 해이다.

$$0 = Q - KBR^{-1}B^T K + A_o^T K + K A_o \tag{12}$$

LQR 설계 및 특징에 대하여서는 많은 연구결과가 나왔으며 구조적 특징을 갖지않는 (unparametric or unstructured) 모델 불확실성 (model uncertainty)에 대해서는 ±60°의 위상여유 (phase margin)와 −6∼∞ dB의 진폭여유 (amplitude margin)를 갖지만 시스템 매개변수의 변화에 대하여서는 강인성 (robustness)이 보장되지 않는다.

4. 극점감도를 고려한 LQR 설계문제

다음과 같은 시스템을 고려한다.

$$\dot{X}(t) = A(\alpha)X(t)+B_o u(t)$$
$$y(t) = C\,X(t) \qquad (13)$$

여기서 $A(\alpha)$는 다음과 같이 가정한다.

$$A(\alpha) = A_o + C(\alpha)$$

$$\frac{dC(\alpha)}{d\alpha} = C_A' \qquad (14)$$

시스템의 매개변수 (parameter) A의 변화를 고려한 LQR 설계문제는 다음의 두 조건을 만족시키는 상태궤환제어 $u(t) = -FX(t)$를 구하는 문제로 된다.

$$\text{i)}\ \lambda_i(\ A(\alpha) - BF\ ) < 0 \qquad (15)$$

$$\text{ii)}\ J = \int_{t_o}^{t_f}[\ X^TQX + u^TRu\ ]\,dt \qquad (16)$$

5. 매개변수 불확실성을 포함하는 LQR의 극점감도.

LQR 루프의 고유치와 고유벡터와의 관계식은 다음과 같다.

$$(\ A(\alpha) - BF\ )u_i = \lambda_i u_i \qquad (17)$$

(17)식의 양변을 α에 대하여 미분하면 다음식을 얻는다.

$$(\ A(\alpha)-BF\ )\frac{du_i}{d\alpha} + \frac{d}{d\alpha}(\ A(\alpha)-BF\ )u_i$$

$$= \frac{d\lambda_i}{d\alpha}u_i + \lambda_i\frac{du_i}{d\alpha} \qquad (18)$$

여기서 좌방고유벡터 v_i^T를 양변에 곱하고 정리하면 다음과 같이 변형된다.

$$v_i^T(\ A(\alpha)-BF\ )\frac{du_i}{d\alpha} = v_i^T\lambda_i\frac{du_i}{d\alpha} \qquad (19)$$

매개변수의 변화에 의하여 제어이득 F의 값도 변화되어야 한다. 따라서 극점감도는 다음과 같이 얻어진다.

$$S_i = \frac{d\lambda_i}{d\alpha} = \frac{v_i^T(\ C_A' - BR^{-1}B^T(dK/d\alpha)\ )u_i}{v_i^T\,u_i} \qquad (20)$$

여기서 $dK/d\alpha$는 α값의 변화에 의한 대수리카티 방정식의 해의 변화량을 나타낸다. 즉 i번째 극점의 변화율은 섭동행렬 C_A'과 α의 변화에 의한 궤환 이득행렬 K의 변화량에 의하여 결정된다. 식 (5)에서 $dK/d\alpha$ 항을 구하기 위하여 $[\ C_A, B\ ]$가 가제어 (controllable)라고 가정하며 제어이득 F를 다음과 같이 선택한다.

$$F = -R^{-1}B^T(\ K_o + \frac{dK}{d\alpha}\ ) \qquad (21)$$

여기서 K_o는 공칭 플랜트 (nominal plant)에 대한 최적 LQR 해인 리카티 방정식의 해이며 $dK/d\alpha$는 위에서 설명한 바와 같이 α의 변화에 대한 리카티 방정식 해의 변화량을 나타낸다.

정리 1)

$[\ C_A, B\ ]$가 가제어 (controllable) 이며 보조제어이득 $dK/d\alpha$ 를 $\lambda_i(\ C_A' - BR^{-1}B^T(dK/d\alpha)) \le 0$가 되게 선택할 경우 섭동된 LQR 시스템에 대한 정상상태 응답은 α 값에 관계없이 $t \to \infty$ 일때 0에 근접한다.

증명)

섭동된 시스템에 대한 LQR루프의 응답은 다음식으로 된다.

$$X(t) = \exp(A(\alpha)-BR^{-1}B^T(K_o+\frac{dK}{d\alpha}))t\ X(0)$$

$$= \exp(A_o-BR^{-1}B^TK_o)t\ \exp(\alpha C_A-BR^{-1}B^T\frac{dK}{d\alpha})t\ X(0) \qquad (22)$$

Q.E.D.

정리 2)

$dK/d\alpha$를 $S_i \to 0$이 되도록 선택하면 섭동된 시스템에 대한 LQR 루프의 극점은 공칭 시스템의 극점에 접근한다.

증명)

LQR 루프의 극점은

$$(A_o + \alpha C_A(\alpha) - BR^{-1}B^T(K_o + \frac{dK}{d\alpha}))u_i = \lambda u_i \quad (23)$$

$$0 = (A_o - BR^{-1}B^T K_o + C_A(\alpha) - BR^{-1}B^T \frac{dK}{d\alpha})u_i$$

$$= \underbrace{(A_o - BR^{-1}B^T K_o)u_i}_{①} + \underbrace{(C_A(\alpha) - BR^{-1}B^T \frac{dK}{d\alpha})u_i}_{②} \quad (24)$$

여기서

$$① = (A_o - BR^{-1}B^T K_o)u_i u_i^o = \lambda_i^o u_i^o \quad (25)$$

$$② = (C_A(\alpha) - BR^{-1}B^T \frac{dK}{d\alpha})u_i u_i^P = \lambda_i^P u_i^P \quad (26)$$

가 성립한다. 따라서 식 (24)는 다음과 같이 표현된다.

$$(24)\text{식} = v_i^T \lambda_i^o u_i^o + v_i^T \lambda_i^P u_i^P$$

$$= v_i^o v_i^T \lambda_i^o u_i^o + v_i^o(v_i^T(C_A(\alpha) - BR^{-1}B^T \frac{dK}{d\alpha})u_i^T)u_i^o \quad (27)$$

여기서 $S_i \to 0$이며 $v_i^T u_i^T = 1$ 이므로 두번째 항은 0으로 접근한다. 따라서 LQR 루프의 극점은 공칭 시스템에 대한 LQR 루프의 극점에 접근한다.

6. 예제

다음 식으로 주어지는 플랜트 모델을 고려한다.

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} -0.018 & -12.4 & -12.40 & -792.2 & 0.016 & -0.241 \\ 0 & -869.8 & -1.682 & -71.20 & 9.066 & -0.176 \\ 0 & -0.516 & -63.38 & -2019. & 0.009 & 0.229 \\ 0 & 0.003 & 1 & -5.119 & -0.003 & 0.089 \\ 0 & 4.07 & 176.3 & 5729 & & \\ 0.016 & -99.97 & 7.337 & 233.8 & & 0 \end{array}\right)$$

여기서 섭동행렬 C_A는 다음과 같다.

$$C_A = \begin{bmatrix} -78.240 & -227.206 & -189.681 & -350.606 \\ -273.021 & -431.498 & -233.779 & -189.817 \\ -192.692 & -568.308 & -479.213 & -888.701 \\ -0.1173 & -0.9167 & -0.7454 & -2.1430 \end{bmatrix}$$

제어 가중치를 $R=10^{-4}I$, 상태 가중치를 $Q=C^TC$로 선택했을 때의 LQR 제어 이득은 다음과 같다.

$$K_C = \begin{bmatrix} -1.59853 & 9909.74 & 4.1760 & 588.351 \\ 0.06902 & -14.460 & 17635.2 & 572675.9 \end{bmatrix}$$

섭동행렬 C_A를 고려한 극점감도는 아래와 같이 구하였다.

$$S_i = [\ -78.24 \ \ -432.01 \ \ -303.311 \ \ -2684.35\ ]$$

섭동행렬 C_A가 존재하지 않는 경우 LQR 루프의 극점은 다음과 같이 구하여진다.

1 : -90789.76 + j 0

2 : -54993.73 + j 0

3 : -3.918858 + j 0

4 : -1.918799 + j 0

그리고 섭동행렬 C_A가 존재하는 경우 LQR 루프의 극점은 다음에 보여지는 바와 같다.

섭동행렬이 존재하고 α의 값이 변화할때 $dK/d\alpha$ 값은

-31.9134 9860.70 -233.247 -6284.116

-63.1729 -86.004 17473.81 572343.8

이때 LQR 루프의 극점은 다음과 같아진다.

1 : -91174.70 + j 0

2 : -55096.00 + j 0

3 : -507.3077 + j 0

4 : -3.756306 + j 0

위의 예에서 보여지는 바와 같이 섭동행렬이 존재하는 경우 일반적인 LQR 에서의 안정도는 보장되지 않았지만 본 논문에서 제안된 방법으로 설계하였을 경우에 LQR 루프는 안정함을 알 수 있다.

6. 결론 및 연구과제

예제에서 보인 바와 같이 플랜트의 매개변수 행렬에 섭동이 존재할 경우 LQR의 안정도는 보장되지 않았지

만 섭동행렬을 고려한 설계에서 α의 값이 비선형으로 변화하여도 LQR 루프는 안정함을 알 수 있다. 앞으로의 연구과제로는 섭동행렬을 비선형함수 α와 섭동행렬 C_A의 형태로 실제 시스템을 모델링 할 수 없는 경우에 LQR 루프의 안정도에 대한 연구가 필요하다.

VI. 참고문헌

(1). Anderson, B.D.O., and Moore, J.B., 'Linear Optimal Control', Printice-Hall, 1971.

(2). Kwakernaak, H., and Sivan, P., 'Linear Optimal Control Theory', Wiley-Interscience, 1972

(3). J.C. Doyle, "Guaranteed Margins for LQG regulator", IEEE Trans. on Auto. Contr. Vol.AC-23, Aug., 1978

(4). M.G. Safanov and M. Athans, " Gain and Phase Margins of Multiloop LQG regulators," IEEE Trans. Auto. Contr., vor. AC-22, 1977