

다변수 비선형시스템에서의 강인한추적

° 백은보* 배종일** 이만형***

° 부산대학교 대학원 기계공학과* 부산공업대학 전기공학과**
부산대학교 공과대학 정밀기계과***

Robust Tracking in Multivariable Nonlinear Systems

° Woon-Bo Baek* Jong-Il Bae** Man-Hyung Lee***

° Graduate School* Dept. of Electric Eng.**

Pusan National University Pusan National Institute of Technology

Dept. of Mechanical & Precision Eng.***

Pusan National University

Abstract

We treat the problem of the robust tracking of a class of nonlinear systems which can be asymptotically decoupled in approximate sense by state variable feedback. A nonlinear control law is derived such that the tracking error in the closed loop system is uniformly bounded and tends to a certain small neighborhood of the origin. Simulation results show that simultaneous lateral and longitudinal maneuvers in airplane can be accurately performed in spite of uncertainty in stability derivatives.

1. 서론

근래에 다변수 비선형시스템의 제어를 위한 많은 방식 중에서 가장 활발하게 연구되고 있는 궤환 선형화 방식 (feedback linearization technique)은 비선형 궤환과 비선형 상태변환을 통하여 주어진 비선형시스템을 선형시스템과 같은 입출력 관계를 갖도록 하는 기법이다. [1-6]

최근 여러분야에서 궤환선형화 방식의 응용 실례를 찾아볼 수 있는 데 이것을 적용하기 위해서는 완전한 수학적 모델링이 요구된다. 그러나 복잡한 비선형성 및 불확실성을 가지는 실제시스템을 정확하게 수학적 모델링하는것은 매우 어려운 일이기 때문에 불확실성 및 동적 모델링오차를 보상할 수 있는 비선형 제어기를 설계하는 것이 필수적이라 할 수 있다. [7]

불확실 비선형시스템의 제어방식으로 Lyapunov식 접근방법과 가변구조제어방식등이 사용되고 있는데 입출력 사이의 정확한 비연성을 얻기 위해서 정합조건 (matching condition)을 만족시켜야 한다. 그러나 실제시스템의 상황에서는 모호화되지 않은 운동, 잡음 및 외란 등으로 인하여 이러한 조건들이 만족되지 않으며 정확한 비연성을 얻는 것은 거의 불가능하다. 따라서 이러한 불확실성을 고려하여 근사적 비연성을 얻는 접근방식이 연구되어 왔다. [8-10]

한편, 비행체 제어시스템은 작동범위에서의 비행환경 변화에 따른 공기역학적인 연성, 피치-로울-요사이의 운동학적인 연성 및 관성의 연성 등의 영향으로 로울 운동 및 급속한 응답을 얻는 데 문제가 되며, 또한 큰 진행각으로 인한 비선형성 및 공력계수 변동 등의 불확실성때문에 제어시스템 설계과정에서 어려움이 많았으며 이를 해결하기 위한 많은 이론들이 연구되어 왔다. [11-16]

본 연구에서는 불확실성이 고려되지 않은 비선형시스템에서 비선형 상태변환과 비선형궤환을 통해 정확한 비연성을 얻는 제어칙(U_d)을 유도하고 불확실성을 포함하여서는 근사적 비연성이 되며 추적오차가 요구되는 범위내에 유지되게 하는 강인한 적응제어칙(U_r)을 유도하여 이 두가지를 합성한 제어칙(U=U_d+U_r)을 구성하였다. 이것을 불확실성이 존재하는 F-80 A기의 비선형모델에 적용하였다. 두가지 비행환경에서 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 공력계수의 변동 및 외란 등의 불확실성에 대한 적응능력에 대해 고찰하고 궤적추종 제어의 강인성을 입증하고자 한다.

2. 비연성제어 이론

다음과 같은 다이내믹 방정식으로 기술되는 비선형시스템을 고려해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x, t) + \Delta A(x, t) + (B(x, t) + \Delta B(x, t)) u(t) \\ y &= C(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 벡터 $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$ 는 각각 $n \times 1$, $m \times 1$, $m \times 1$ 차원이며 $\Delta A(x, t)$, $\Delta B(x, t)$ 는 불확실성을 나타내는 함수이다.

각 출력요소가 하나의 입력요소에 의해서만 제어되는 비연성 제어칙을 얻기위해 다음 식(2)와 같이 정의되는 연산자를 사용한다. $C_i(x, t)$ 는 C의 i번째 요소를 나타낸다.

$$AC_i = \frac{\partial C_i}{\partial t}(x, t) + \left[\frac{\partial C_i}{\partial x}(x, t) \right] A(x, t)$$

$$A^j C_i = A(A^{j-1} C_i)(x, t)$$

$$BA^j C_i = \left[\frac{\partial}{\partial x} A^j C_i(x, t) \right] B(x, t) \quad (2)$$

가정 1. : 다음 식(3)을 만족하는 음이 아닌 최소의 정수 $d_i < \infty$, $i = 1, \dots, m$ 가 존재한다.

$$B^*(x, t) = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial}{\partial x} A^{d_1} C_1(x, t) \right] B(x, t) \\ \vdots \\ \left[\frac{\partial}{\partial x} A^{d_m} C_m(x, t) \right] B(x, t) \end{bmatrix} \neq 0 \quad (3)$$

가정 2. : $\Delta A(x, t)$, $\Delta B(x, t)$ 에 대해 $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, d_{i-1}$ 에서 다음식이 만족한다.

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial x} A^j C_i(x, t) \right] \Delta A(x, t) = 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial x} A^j C_i(x, t) \right] \Delta B(x, t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

가정 1.이 만족되면, 공칭시스템 (즉, $\Delta A = \Delta B = 0$ 인 경우)은 정확한 비연성이 될 수 있다.^[5-6] 가정 2.는 y_i 를 d_i 번 미분할 때까지 불확실성 함수가 나타나지 않는 것을 나타낸다. 비연성 제어칙을 얻기 위해 $y_i^{(j)} (= d^j y / dt^j)$ 을 구하면 다음과 같다.^[8-11]

$$\begin{aligned} y^{(j)}(t) &= A^j C_i(x, t), \quad j = 0, 1, \dots, d_i \\ y^{(d_i+1)}(t) &= A_i^*(x, t) + \Delta A_i^*(x, t) \\ &\quad + [B_i^*(x, t) + \Delta B_i^*(x, t)] u(t) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, $A_i^*(x, t) = A^{d_i+1} C_i(x, t)$,

$$\begin{aligned} \Delta A_i^*(x, t) &= \left[\frac{\partial}{\partial x} A^{d_i} C_i(x, t) \right] \Delta A(x, t) \\ \Delta B_i^*(x, t) &= \left[\frac{\partial}{\partial x} A^{d_i} C_i(x, t) \right] \Delta B(x, t) \end{aligned} \quad (6)$$

시스템 식(1)이 추종해야 할 기준 궤적을 $y_r(t) = (y_{r1}(t), \dots, y_{rm}(t))^T$, 추적오차를 $\tilde{y} = (y_1 - y_{r1}, \dots, y_m - y_{rm})^T$, $Y_r(t) = (y_{r1}^{d_1+1}(t), \dots, y_{rm}^{d_m+1}(t))^T$ 라 하면 비연성제어칙(U_d)은 다음과 같다.^[14]

$$\begin{aligned} U_d(x, t) &= (B^*(x, t))^{-1} [-A^*(x, t) + Y_r(t)] \\ &\quad - (B^*(x, t))^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{d_1+1} k_{1i} y_1^{(i-1)}(t) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{d_m+1} k_{mi} y_m^{(i-1)}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 k_{ij} 는 다음 식을 만족하는 상수이다.

$$\tilde{y}_i^{(d_i+1)} + k_{i, d_i+1} \tilde{y}_i^{(d_i)} + \dots + k_{i1} \tilde{y}_i = 0 \quad (8)$$

제어칙(7)을 갖는 페루우프시스템에서 $\Delta A^* = 0$, $\Delta B^* = 0$ 일 때 식(8)과 같이 $y_i; i=1, \dots, m$ 은 정확한 비연성이 된다. 불확실성이 존재할 때는 식(8)에 불확실성에 관련된 추가적인 연성항이 나타나며 정확한 비연성은 거의 불가능하다. 다음 장에서는 페루우프시스템에서 추적오차 y 가 균등유계(Uniformly Bounded)되도록 추가되는 강인한 제어칙(U_r)을 구성하며, 합성칙 $U = U_d + U_r$ 은 근사적 비연성이 된다.

3. 강인한 적응추적 (Robust Adaptive Tracking)

강인한 추적을 위해 추가되는 제어칙은 Lyapunov 안정이론을 사용하여 유도되며 결과 제어칙은 다음과 같다.

$$U_r = (B^*(x, t))^{-1} [-k_0 z_s + U_d] \quad (9)$$

여기서 $k_0 = \text{diag}(k_{i0})$, $i = 1, \dots, m$, $z_s = (z_{s1}, \dots, z_{sm})^T$ 그리고

$$\dot{z}_s = \tilde{y} \quad (10)$$

U_d 는 불확실성을 보상하기 위해 구성되며 다음과 같이 두면

$$Z = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_1^{(d_1)}, z_{s1}, \dots, \tilde{y}_m, \dots, \tilde{y}_m^{(d_m)}, z_{sm})^T \quad (11)$$

식(5); (7), (9), (10)으로부터 전체 페루우프시스템은 다음과 같은 상태방정식으로 정리된다.

$$\dot{Z} = E Z + F W \quad (12)$$

여기서, $E = \text{diag}(E_i)$, $F = \text{diag}(F_i)$,

$$F_i = [0, \dots, 0, 1, 0]^T,$$

$$W = \Delta A^*(x, t) + \Delta B^*[f(x, z, t) + (B^*(x, t))^{-1} U_d] + U_d,$$

$$f(x, z, t) = U_d(x, t) - (B^*(x, t))^{-1} k_0 z_s,$$

$$E_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -k_{i1} & -k_{i2} & -k_{i3} & \dots & -k_{i, d_i+1} & -k_{i0} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

여기서 k_{ij} 는 E의 고유치의 실수부가 음이 되도록 설정된다. 식(13)의 Lyapunov식에서 $Q(>0)$ 에 대해 $P(>0)$ 를 구한다.

$$E^T P + P E = -Q \quad (13)$$

여기서,

$$Q = \text{diag}(Q_{ii}), \quad Q_{ii} > 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$P = \text{diag}(P_{ii}), \quad i = 1, \dots, m \quad \text{로 두면 식(13)은}$$

$$E_i^T P_{ii} + P_{ii} E_i = -Q_{ii}, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{으로 된다.}$$

가정 3. : 다음과 같은 함수 $\beta_1(x, z, t)$, $\beta_2(x, z, t)$, $\gamma_1(x, z, t)$, $\gamma_2(x, z, t)$, 상수 γ_0 , β_20 가 존재한다.

$$\begin{aligned} \|\Delta B^*(x, t)(\Delta B^*(x, t))^{-1}\| &\leq \gamma_1(x, z, t) < \gamma_0 < 1 \\ \|\Delta A^*(x, t) + \Delta B^*(x, t)f(x, z, t)\| &\leq \beta_2(x, z, t) < \beta_20 \\ \|(F^T P F)^{-1} F^T P E z + \Delta A^*(x, t) + \Delta B^*(x, t)f(x, z, t)\| &\leq \beta_1(x, z, t) \\ \gamma_2(x, z, t) &= \text{Sup}[\beta_1(x, z, t), \beta_2(x, z, t)] \end{aligned} \quad (14)$$

가정 3은 Lyapunov 타원체, $Z(r) = \{ Z \in R^p : Z^T P Z \leq r > 0 \}$ 를 정의하고 $B(\eta) = \{ Z \in R^p : \|Z\| \leq \eta \}$, $\eta = [2\beta_20 \delta \{2\delta + \epsilon - 2(\delta^2 + \epsilon^2)^{1/2}\} / (\epsilon \lambda_m(Q))]^{1/2}$, $r^* = \min\{ r : Z(r) \supseteq B(\eta) \}$, $r_1 > r^*$ 인 $Z(r_1)$ 에 대해 Lyapunov함수 $Z^T P Z$ 를 사용하여 전체 페루우프시스템의 궁극균등유계 (Uniformly Ultimately Bounded)^[17]를 증명하기 위한 것이다. 그 증명은 부록에 나타내었다.

그 결과 제어칙은 다음과 같다.

$$U_a = -K(x, z, t)V / (\|V\| + \delta) \quad (15)$$

여기서,

$$V = F^T P Z \quad (16)$$

$$K(x, z, t) > \beta_2(x, z, t)(\varepsilon + \delta) / \{\varepsilon(1 - \gamma_1(x, t))\} \quad (17)$$

4. 비행제어시스템 설계

본 연구에서는 비행체 모델로서 F-80 A 기를 사용하였다. 시뮬레이션을 위한 두가지 비행환경에서의 공력 계수는 부록에 나타나 있고 기본적인 공기역학적 비선형성이 고려된 일반적인 그 운동방정식은 다음과 같다. [15-16]

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{\beta}\beta + l_{q}q + l_{r}r + (l_{\beta a}\beta + l_{r a}r)\alpha + l_{p}p - i_{1}qr \\ \tilde{m}_{\alpha}\dot{\alpha} + \tilde{m}_{q}q + i_{2}pr - \tilde{m}_{\alpha}p\beta + \tilde{m}_{\alpha}(g/v)(\cos\theta\cos\phi - \cos\theta_0) \\ n_{\beta}\beta + n_{r}r + n_{p}p + n_{p a}p\alpha - i_{3}pq + n_{q}q \\ q_{\beta} - p\beta + Z_{\alpha}\dot{\alpha} + (g/v)(\cos\theta\cos\phi - \cos\theta_0) \\ y_{\beta}\beta + p(\sin\alpha_0 + \alpha) - r\cos\alpha + (g/v)(\cos\theta\sin\phi) \\ p + q \tan\theta\sin\phi + r \tan\theta\cos\phi \\ q \cos\phi - r \sin\phi \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \tilde{l}_{\delta} & l_{\delta r} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{m}_{\delta_0} \\ \tilde{n}_{\delta} & n_{\delta r} & 0 \\ 0 & 0 & z_{\delta_0} \\ y_{\delta a} & y_{\delta r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \\ \delta_o \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$= A(x) + \Delta A(x) + (B(x) + \Delta B(x)) u$$

여기서 $x = [p, q, r, \alpha, \beta, \phi, \theta]^T$, $u = [\delta_a, \delta_r, \delta_o]^T$

$$\begin{aligned} \tilde{l}_{\delta a} &= l_{\delta a} + l_{\alpha\delta a} \alpha, \quad \tilde{n}_{\delta a} = n_{\delta a} + n_{\alpha\delta a} \alpha, \\ y &= (\phi, \beta, \alpha)^T = C(x) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\hat{A}(x) = A(x) + \Delta A(x), \quad \hat{B}(x) = B(x) + \Delta B(x),$$

$\hat{A}(x) = [f_p, f_q, f_r, f_{\alpha}, f_{\beta}, f_{\phi}]^T$ 로 두고 식(2)에서

같이 정의된 연산자를 사용하자.

$$AC(x) = (f_{\phi}, f_{\beta}, f_{\alpha})^T$$

$$\frac{\partial}{\partial x} C_i(x)\hat{B}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_{\delta a} & y_{\delta r} & 0 \\ 0 & 0 & z_{\delta_0} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$y_{\delta a}$, $y_{\delta r}$, z_{δ_0} 는 크기가 작으므로 $[\partial C/\partial x]\hat{B} = 0$ 으로 할때 $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ 이 된다.

$$\begin{aligned} A^*(x) + \Delta A^*(x) &= \hat{A}^2 C_i(x), \\ B^*(x) + \Delta B^*(x) &= [\partial(\hat{A}C(x)/\partial x)]\hat{B}(x) \end{aligned} \quad (21)$$

윗식은 쉽게 계산될 수 있다. 그리고 다음과 같이 기준궤적을 정한다.

$$y_r^{(3)} + g_{c22}y_r^{(2)} + g_{c11}y_r^{(1)} + g_{c00}(y_r - y_r^*) = 0 \quad (22)$$

여기서 $g_{c i i}$ 는 다음 3차 다항식과 같은 특성식이 되도록 정한다.

$$\begin{aligned} s^3 + g_{c22}s^2 + g_{c11}s + g_{c00} \\ = (s + \lambda_c)(s^2 + 2\xi_c\omega_{nc}s + \omega_{nc}^2) \end{aligned} \quad (23)$$

공칭 비행조건에서 A^* , B^* 를 사용한 결과 제어칙, $U (= U_d + U_r)$ 은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} U(t) &= (B^*(x))^{-1} (A^*(x) + U_a) \\ &+ (B^*(x))^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_r - k_{11}\dot{\phi} - k_{12}\ddot{\phi} - k_{10}Z_{\phi 1} \\ \ddot{\beta}_r - k_{21}\dot{\beta} - k_{22}\ddot{\beta} - k_{20}Z_{\beta 2} \\ \ddot{\alpha}_r - k_{31}\dot{\alpha} - k_{32}\ddot{\alpha} - k_{30}Z_{\alpha 3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

U_a 를 구하기 위해 먼저 V_i 를 구한다.

$Q_{ii} = \text{diag}(q_{11}, q_{22}, q_{33})$; $i = 1, 2, 3$ 로 두고 $E_i^T P_{ii} + P_{ii} E_i = -Q_{ii}$ 를 풀면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_{23} &= q_{33}/2k_{10} \\ P_{12} &= [q_{11} + 2k_{12}P_{23} + (k_{10}q_{22}/k_{12})] / (2k_{11} - 2k_{10}k_{12}^{-1}) \\ P_{13} &= k_{10}(q_{22} + 2P_{12}) / (2k_{12}) + k_{12}P_{23} \\ P_{22} &= (q_{22} + 2P_{12}) / (2k_{12}) \\ P_{11} &= P_{12}k_{12} + k_{11}P_{22} - P_{23} \\ P_{33} &= P_{12}k_{10} + k_{11}P_{23} \end{aligned} \quad (25)$$

따라서,

$$V_i = P_{12} \ddot{y}_i + P_{22} \dot{y}_i + P_{23} Z_{\phi i} \quad (26)$$

또한 γ_1 , β_2 는 식(14)에서 결정되었고 $K(x, z, t)$ 는 식(17)에서 계산되었다.

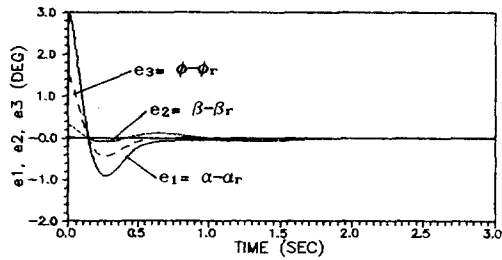
5. 시뮬레이션 및 고찰

기준궤적은 식(23)에서 $\xi_c = 0.707$, $\omega_{nc} = 3.5$, $\lambda_c = 2.5$ 로 두고 그 최종치는 $y_r^* = (\phi^*, \beta^*, \alpha^*)^T = (250^\circ, 0^\circ, 10^\circ)$ 로 설정하였다. 그리고 시뮬레이션 결과 고찰을 통해 $Q = I$, $k = 15$, $\delta = 0.2$ 로 취하였다. $\phi(0) = 3^\circ$, $\beta(0) = 0.3^\circ$, $\alpha(0) = 1.5^\circ$ 로 초기 조건을 정하였다.

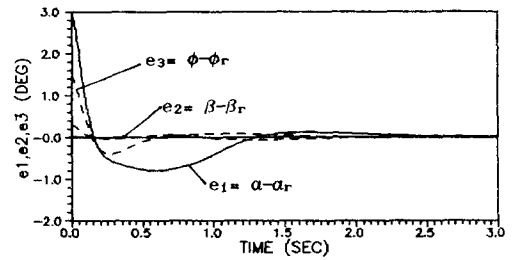
(1) 비행환경 I에서 시뮬레이션 결과를 그림 1.에 나타내었다. 추적오차는 약 1 초후에 0으로 수렴하여 우수한 추적성능을 보여 주었다. 최대입력의 크기는 $\delta_a = 27.02^\circ$, $\delta_r = 18.48^\circ$, $\delta_o = 8.54^\circ$ 가 되어 비교적 큰 입력이 요구되었다.

(2) 비행환경 I에서 제어기를 구성하고 비행환경 II에 적용시킨 시뮬레이션 결과를 그림 2.에 나타내었다. 추적오차는 약 2.5초후에 0으로 수렴하여 비교적 양호한 추적성능을 보여 주었다. 최대입력의 크기는 $\delta_a = 25.23^\circ$, $\delta_r = 17.78^\circ$, $\delta_o = 3.96^\circ$ 가 되어 비교적 적은 입력이 요구되었다.

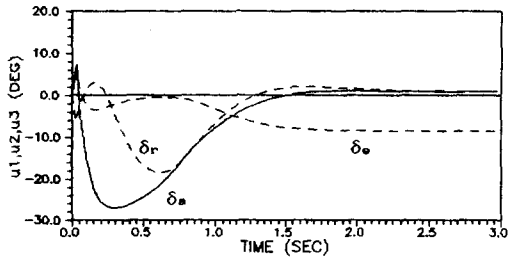
(3) 비행환경 II에서 제어기를 구성하고 비행환경 I에 적용시킨 시뮬레이션 결과를 그림 3.에 나타내었다. 추적오차는 초기응답은 비교적 양호하지 못하나 약 2 초후에 0으로 수렴하여 양호한 추적성능을 보여 주었다. 최대입력의 크기는 $\delta_a = 28.25^\circ$, $\delta_r = 18.57^\circ$, $\delta_o = 8.47^\circ$ 가 되어 큰 입력이 요구되었다.



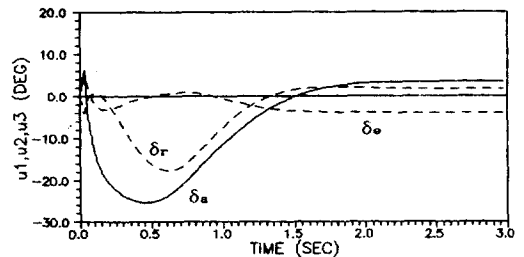
(a)



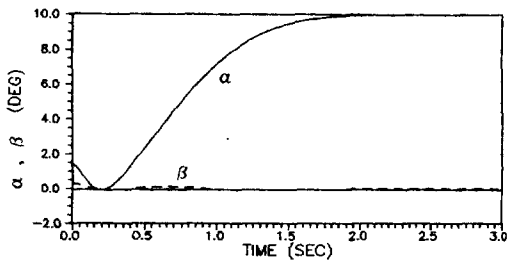
(a)



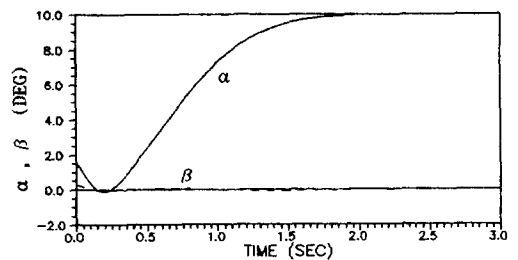
(b)



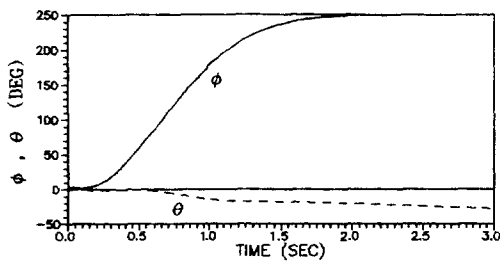
(b)



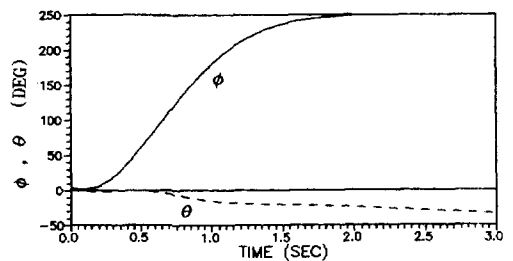
(c)



(c)



(d)



(d)

Fig. 1. Aerodynamic Coeff. of Flight Condition I, With Controller Designed for Flight Condition I.

- (a) Tracking Error ($e_1 = \alpha - \alpha_r$, $e_2 = \beta - \beta_r$, $e_3 = \phi - \phi_r$),
 (b) Control Motions (δ_a , δ_r , δ_e),
 (c) Angle of Attack and Sideslip (α , β),
 (d) Bank Angle and Pitch Angle (ϕ , θ).

Fig. 2. Aerodynamic Coeff. of Flight Condition II, With Controller Designed for Flight Condition I.

- (a) Tracking Error ($e_1 = \alpha - \alpha_r$, $e_2 = \beta - \beta_r$, $e_3 = \phi - \phi_r$),
 (b) Control Motions (δ_a , δ_r , δ_e),
 (c) Angle of Attack and Sideslip (α , β),
 (d) Bank Angle and Pitch Angle (ϕ , θ).

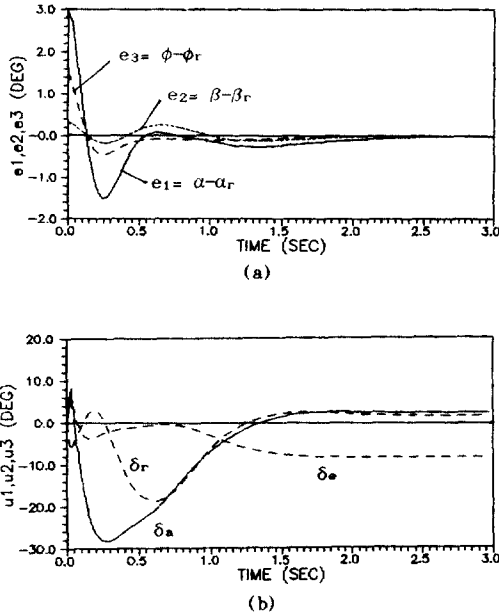


Fig. 3. Aerodynamic Coeff. of Flight Condition I, With Controller Designed for Flight Condition II,

- (a) Tracking Error ($e_1 = \alpha - \alpha_r$, $e_2 = \beta - \beta_r$, $e_3 = \phi - \phi_r$),
- (b) Control Motions (δ_a , δ_r , δ_e),
- (c) Angle of Attack and Sideslip (α , β),
- (d) Bank Angle and Pitch Angle (ϕ , θ).

6. 결론

본 연구에서는 시스템 파라메타의 변동 및 동적모델링 오차 등의 불확실성을 갖는 다변수 비선형시스템에서의 강인한 추적에 관한 연구를 수행하였다.

비선형귀환과 비선형상태변환을 통해 근사적으로 비연성이 되며 추적오차가 유한한 시간내에 궁극유계되는 강인한 적응칙을 구성하여 비행제어 시스템에 적용하였다.

그 결과 구성된 제어칙을 공력계수의 변동 등의 불확실성이 존재하는 F-80 A 기에 적용한 결과 우수한 추적성능을 보여 주었다.

부 록

A.1. 페투우프시스템의 궁극적 균등유계 증명:

다음과 같은 Lyapunov함수 를 정의하자.

$$W = Z^T P Z \quad (27)$$

식(12), (16), (27) 에서

$$\dot{W} = Z^T [PE + E^T P] + 2 Z^T P F [\Delta A^*(x, t) + \Delta B^* \{ f(x, z, t) + (B^*(x, t))^{-1} U_a \} + U_a] \quad (28)$$

식(13), (14), (15), (28) 에서 .

$$\dot{W} \leq -2^T Q Z + 2\beta_2(x, z, t) \|V\| - 2(1-\gamma_1(x, t))K(x, z, t) \|V\|^2 / (\|V\| + \delta) \quad (29)$$

식(17), (29) 에서

$$\dot{W} \leq -2^T Q Z + 2\beta_2(x, z, t) \|V\| \delta (\epsilon - \|V\|) / (\epsilon (\|V\| + \delta)) \quad (30)$$

다음과 같이 두면, $G(V) = \|V\|(\epsilon - \|V\|) / (\|V\| + \delta)$

그 최대값은 $G(V)_{max} = \delta + \epsilon - 2(\delta^2 + \epsilon\delta)^{1/2}$ 이다.

따라서

$$\dot{W} \leq -\|Z\| (Q) + 2\beta_{20}\delta G(V)_{max} / \epsilon \quad (31)$$

$z \notin B(\eta)$ 이면 $\dot{W} \leq 0$ 이 된다. [17]

여기서, $B(\eta) = \{ Z \in R^p : \|Z\| \leq \eta \}$,

$$\eta = [2\beta_{20}\delta \{ 2\delta + \epsilon - 2(\delta^2 + \epsilon\delta)^{1/2} \} / (\epsilon \lambda_m(Q))]^{1/2}$$

Table 1. Constants in Equation of Motion (Eq. (17)) for Swept-Wing Fighter at Two Flight Conditions

	Condi- tion I	Condi- tion II		Condi- tion I	Condi- tion II
y_β	-0.196	-0.280	m_α	-23.18	-10.70
z_α	-1.329	-1.746	$m_{\dot{\alpha}}$	-0.173	-0.251
l_β	-9.990	-20.910	m_q	-0.814	-1.168
l_p	-3.933	-5.786	m_{δ_e}	-28.37	-31.64
l_q	0.107	0.108	n_β	5.670	8.880
l_r	0.126	0.221	n_p	0.002	0.013
$l_{r\alpha}$	8.390	13.160	$n_{p\alpha}$	-1.578	-1.583
$l_{\beta\alpha}$	-684.4	-543.80	n_r	-0.235	-0.377
l_{δ_a}	-45.83	-60.270	n_{δ_a}	-0.921	-1.282
$l_{\delta_a\alpha}$	63.50	64.60	$n_{\delta_a\alpha}$	1.132	2.459
l_{δ_r}	-7.64	-10.050	n_{δ_r}	-6.510	-8.300
y_{δ_a}	0.0071	0.0119	z_{δ_e}	-0.168	-0.224
g/V	0.0345	0.04127			

기호 설명

하첨자 x, y, z : 비행기의 주축

I_x, I_y, I_z : 주축에 대한 관성모멘트 (kg/m^2)

i_x, i_y, i_z : 무차원 관성계수

p, q, r : 횡동, 종동, 선수동요율 (Roll rate, Pitch rate, Yaw rate : rad/sec)

V : 질량중심에서의 비행체 속도 (m/sec)

α : 양각 (Attack angle: rad)

β : 옆미끄럼각 (Sideslip angle: rad)

ϕ : 횡경사각 (Bank angle: rad)

θ : 종경사각 (Pitch angle: rad)

δ_a : 보조날개(Aileron)의 변형각 (rad)

δ_r : 방향타(Rudder)의 변형각 (rad)

δ_e : 승강타(Elevator)의 변형각 (rad)

l : 횡동요 모멘트 / I_x (sec^{-1})

m : 종동요 모멘트 / I_y (sec^{-1})

n : 선수동요 모멘트 / I_z (sec^{-1})

y : y축의 외력 / 비행기의 운동량 (sec^{-1})

z : z축의 외력 / 비행기의 운동량 (sec^{-1})

참고 문헌

- [1] Boothby, M., An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, 1975.
- [2] Brockett, R.W., Millman, R.S., Sussmann, H.J., Differential Geometric Control Theory, Birkhauser, 1982.
- [3] Su, R., "On The Linear Equivalence of Nonlinear Systems," Systems and Control Letters, Vol. 2, pp. 48-52, 1982.
- [4] Ha, I.J., "The Standard Decomposed System and Noninteracting Feedback Control of Nonlinear Systems," SIAM, Journal of Control and Optimization, Vol. 26, pp. 1235-1249, 1988.
- [5] Hunt, L.R. and Su, R., Meyer, G., "Global Transformations of Nonlinear Systems," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-28, pp. 24-31, 1983.
- [6] Isidori, A., Krener, A.J., Gori-Giorgi, C., and Monaco, S., "Nonlinear Decoupling via Feedback: A Differential Geometric Approach," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-26, pp. 331-345, 1981.
- [7] Kokotovic, P.V., "Recent Trends in Feedback Design: An Overview," Automatica, Vol. 21, No. 3, pp. 225-236, 1985.
- [8] Nijmeijer, H., "The Regular Local Noninteracting Control Problem for Nonlinear Systems," SIAM Journal of Control Optimization, Vol. 24, pp. 1232-1245, 1986.
- [9] Ha, I.J., and Guilbert, E.G., "Robust Tracking in Nonlinear Systems," IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 26, pp. 763-771, 1987.
- [10] Zak, S.H., "An Eclectic Approach to the State Feedback Control of Nonlinear Dynamic Systems," ASME Trans. on Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, pp. 631-640, 1989.
- [11] Singh, S.N., "Decoupled Ultimate Boundness Control of Systems and Large Aircraft Maneuver," IEEE Trans. on Aerospace and electronic systems, Vol. 25, No. 5, pp. 677-688, 1989.
- [12] Menon, P.K.A., and Badgett, M.E., Walker, R.A., and Duke, E. L., "Nonlinear Flight Test Trajectory Controllers for an Aircraft," Journal of Guidance, Control, Dynamics, Vol. 10, No. 1, pp. 67-72, 1987.
- [13] Meyer, G., and Su, R., Hunt, L.R., "Application of Nonlinear Transformations to Automatic Flight Control," Automatica, Vol. 20, No. 1, pp. 103-107, 1984.
- [14] Singh, S.N., and Schy, A.A., "Output Feedback Nonlinear Decoupled Control Synthesis and Observer Design for Manoeuvring Aircraft," International Journal of Control, Vol. 31, pp. 781-806, 1980.
- [15] Rhoads, D.W., and Schuler, T.M., "A Theoretical and Experimental Study of Airplane Dynamics in Large Disturbance Maneuvers," Journal of Astronautical Sciences, Vol. 24, pp. 507-532, 1957.
- [16] Hacker, T., and Oprisiu, C., "A Discussion of the Roll Coupled Problem. Progress in Aerospace Science," Vol. 15, Pergamon Press, Oxford, pp. 151-180, 1974.
- [17] Leitmann, G., "On the Efficiency of Nonlinear Control in Uncertain Linear System," Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 102, pp. 95-102, Jun. 1981.