'90 韓國自動制御學術會議論文集 1990. 10.26~27

동시 안정화에의한 LQG의 매개변수화

ㅇ강 진 식 오 원 근 서 병 설

Parameterization of LQG via Simultaneou Stabilizatiuon

Jin-Shig Kang Won-Geun Oh Byung-Sul Suh

Department of Electronic communication Eng.

Han Yang Univ.

Abstract

In this paper, we present a method of parameterizing LQG which simultaneously stabilizes a set of plant model by employing the well known saparation principle and Hurwith polynomial. A conditions for existance of simultaneously stabilizing LQG for given set of plant is drived. We show that suggested parameterization achieves the closed loop stability by fixed LQG for given set of plant.

1.서론

시스템을 모델링하는데 있어서는 하나의 공칭(norminal) 모델에 어느정도의 모델링 오차를 갖도록 할 수도 있지만 모델링 오차가 큰 경우에는 동작점에 따라 여러개의 모델로 모델링 하는게 편리하며 모델링 오차도 적어진다. 이렇게 여러개의 동작점을 갖도록 시스템을 모델링 하였을 때의 모델 각각에 대한 제어기를 설계하고 동작점의 변화에 따라 스위칭 동작을 통하여 알맞은 제어기를 선택하는 방법이 있지만 동작점의 수에 따라 제어기를 설계하여야 하며 적당한 스위칭 함수의 선택에 있어서도 많은 문제점을 포함한다. 다른 방법으로는 여러개의 시스템모델을 동시에 안정화 (stabilization)하는 고정 제어기 (fixed controller)를 설계하는 방법이 있다. 동시 안정화 제어기 설계는 극점배치를 이용하여 상태궤환 제어기를 설계하는 방법, 폐루프 다항식을 이용하여 설계하는 방법등이 있지만 LQG 에 대한 동시안정화 제어기 설계에 대하여서는 아직까지 연구된 바 없다. 본 논문에서는 Hurwitz 다항식을 이용하여 동시 안정화 할 수 있는 LQG 제어기를 매개변수화 하며 이러한 제어기가 존재할 수 있는 조건을 유도하고 시뮬레이션을 통하여 실제 시스템 제어에 이용될 수 있음을 보인다.

2. 문제의 공식화(formulation)

다음과 같이 주어지는 플랜트의 집합을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = A_i\, x(t) + b_i\, u(t) + \xi$$
$$y(t) = c_i\, x(t) + \theta \qquad i=1,2,\ldots,m \qquad (1)$$

여기서 x(t) 는 n 차원(dimensional)인 상태벡터(state vector) 이며 u(t), y(t) 는 각각 입력과 출력을 나타내는 벡터, 그리고 θ, ξ 는 출력단의 센서잡음(noise)과 입력단의 왜란(disturbance)을 표현한다. 또한 i 는 m개의 동작점(operating point)중 i 번째 동작점임을 나타낸다. 본 논문에서는 m개의 동작점 각각에서의 플랜트의 표현이 안정가능(stabilizable)하며 reachable 한것으로 가정한다. 동시안정화(simultaneously stabilizable)를 위한 제어기 설계는 m개의 동작점 각각에 대해 플랜트를 동시에 안정화하는 비 스위칭 형태의 제어기를 설계하는것이 본 논문의 목적이다. LQG(linear Quadratic Gaussian)는 LQR(linear Quadratic Regulator)과 KBF(Kalman Baush Filter)로 구성되며 전달함수는 다음식으로 표현된다.

$$K^i(s) = Kc^i\ (\ sI - A_i + b_i\, Kc^i + Kf^i\, c_i\ )\ Kf^i \qquad (2)$$

여기서 Kc^i와 Kf^i는 i 번째 동작점에대한 LQR이득 행렬과 KBF 이득행렬이다. 그리고 플랜트의 전달함수행렬은 다음의 식으로 나타내어진다.

$$G_i(s) = c_i\ (\ sI - A_i\ )^{-1}\, b_i \qquad (3)$$

식 (2)와 (3)을 이용하며 폐루프(closed loop)의 전달함수를 구하면 다음과 같다.

$$G^i_{cl}(s) = \frac{G^i(s)\ K^i(s)}{I + G^i(s)\ K^i(s)} \qquad (4)$$

따라서 m개의 동작점의 변화에의하여 플랜트모델이 바뀔때 스위칭 동작을 요구하지 않는 제어기를 구한다.

3. LQG의 설계

LQG의 설계 문제는 KBF와 LQR을 분리하여 설계할 수

있으며[1] 본 논문에서는 m개의 프랜트 모델에 대하여 동시에 안정화하는 KBF 이득 행렬 K_f와 LQR 이득 행렬 K_c를 구하고 LQG로 합성함으로서 폐루프 시스템이 안정함을 보인다.

1). 동시 안정화법을 이용한 LQR설계

식 (1)로 주어지는 m개의 플랜트 집합에 대하여 동시 안정화하기 위한 LQR설계 문제는 다음과 같이 요약된다.

: 모든 i에대하여 $(A_i - b_i K_c)$의 모든 고유치의 실수부가 음의값을 갖도록 K_c를 선택한다.

위의 조건은 LQR루프의 특성방정식이 Hurwitz가되도록 K_c를 선택하는 것과 동일하다. i번째의 플랜트에 대하여 n^i, d^i를 다음과 같이 정한다.

$$\frac{n^i}{d^i} = (sI - A_i)^{-1} b_i \qquad \text{——(5)}$$

여기서 n^i는 nxq인 numerator 행렬로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$n^i = [\, p^i_1(s)\ p^i_2(s)\ \ldots\ldots\ldots\ p^i_n(s) \,]^T$$

i번째의 동작점에 대한 LQR루프의 행렬값(determinent)은 다음과 같다.

$$\det[\, G^i_{LQR}(s) \,] = \frac{\det[\, c_i\, (\, sI - A_i\,)^{-1} b_i \,]\, \det[\, sI - A_i \,]}{\det[\, sI - A_i + b_i K_c \,]}$$

$$= \frac{\det[\, c_i\, (\, sI - A_i\,)^{-1} b_i \,]}{\det[\, I + K_c\, (\, sI - A_i\,)^{-1} b_i \,]} \qquad \text{---(6)}$$

식 (6)에 (5)를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\det[\, G^i_{LQR}(s) \,] = \frac{\det\left(c_i \dfrac{n^i}{d^i} \right)}{\det\left(I + K_c \dfrac{n^i}{d^i} \right)} \qquad \text{——(7)}$$

식 (7)의 분모항은 i번째 LQR 루프의 특성방정식이며 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$\det\left(d^i + K_c\, n^i \right) = 0 \qquad \text{---(8)}$$

LQR 루프가 안정이기 위하여서는 식 (8)로 표현되는 특성방정식이 Hurwitz 다항식이 되어야 한다. 여기서 이득행렬 K_c를 $\rho\, K_c'$으로 매개변수화(parameterize)하고 n^i를 이용하여 정리하면 다음과 같게된다.

$$0 = \det\left(d^i + \rho\, K_c' \begin{bmatrix} p^i_1(s) \\ p^i_2(s) \\ \\ p^i_n(s) \end{bmatrix} \right) \qquad \text{-----(9)}$$

LQR 루프의 안정도를 만족하는 ρ의 존재는 다음의 정리로 요약된다.

정리 1. LQR 루프 안정도

d^i 의 최고차항의 계수가 1이며 $K_c\, n^i$가 n-1차 Hurwitz 다항식이면 LQR 루프를 안정화하는 ρ가 존재한다.

증명)

d^i의 최고차항의 계수가 1이므로 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$d^i = s^n + d^i_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots + d^i_1 s + d^i_0$$

그리고 $K_c' n^i$도 Hurwitz 다항식이므로 다음과 같이 표현된다.

$$K_c'\, n^i = K_c'{}_{n-1} s^{n-1} + K_c'{}_{n-2} s^{n-2} + \ldots\ldots + K_c'{}_1 s + K_c'{}_0$$

따라서 식 (8)은 다음과 같다.

$$0 = s^n + (\, d^i_{n-1} + \rho K_c'{}_{n-1} \,)\, s^{n-1} + (\, d^i_{n-2} + \rho K_c'{}_{n-2} \,)\, s^{n-2} + \cdots (\, d^i_1 + \rho K_c'{}_1 \,)\, s^1 + d^i_0 + \rho K_c'{}_0 \qquad \text{----(10)}$$

식 (10)이 Hurwitz 이기 위해서는 모든 i,j (i,j=1,2,...,n)에 대하여 $d^i_j + \rho K_c'{}_j > 0$ 이라야 한다. 여기서 $K_c'{}_j$ 는 $K_c' n^i$가 Hurwitz이기위한 계수들이므로 $\rho \to \infty$ 이면 식 (10)은 Hurwitz임을 만족한다.

증명끝.

LQR 루프의 안정도를 보장하기 위한 조건은 $K_c'\, n^i$가 Hurwitz 다항식이라야 한다. 즉 모든 i에 대하여 동시에 $K_c'\, n^i$가 Hurwitz 다항식이 되는 K_c'이 존재하여야 한다. n^i의 표현식과 식 (9)를 이용하면 $K_c'\, n^i$를 다음의 행렬식으로 정의할 수 있다.

$$K_c'\, n^i = K_c' \begin{bmatrix} q^i_1 \\ q^i_2 \\ \\ q^i_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^n \\ s^{n-1} \\ \\ s^0 \end{bmatrix} \qquad \text{----- (11)}$$

$$= K_c'\, L^i$$

따라서 $K_c'\, n^i$가 Hurwitz 다항식이려면 벡터 $K_c' L_i$의 모든 요소가 0보다 커야한다. $K_c'\, n^i$가 Hurwitz이기위한 K_c'의 존재는 다음의 정리로 요약된다.

보조정리 2).[1]

$K_c'\, n^i$가 Hurwitz 다항식이려면 행렬 $K_c' L_i$는 $K_c' L_i > 0$를 만족하여야 한다.

보조정리 2를 만족하는 K_c'을 구하는 과정은 다음과 같이 요약된다.

①. 모든 요소가 양의값을 갖는 임의의 벡터 q를 선택한다.

②. $K_c' = L_1^{-1} q$인 관계를 이용하여 K_c'을 구한다.

③. 모든 i (i=2,...,n)에 대하여 $K_c' L_i > 0$ 임을 조사고 이를 만족하지 않는 i가 존재하는 경우 q를 조정하여 ①을 수행한다.

위의 앨고리즘을 이용하면 m개의 동작점에 대하여 동시안정도를 보장하는 LQR이득 K_c를 구한다.

2). 동시 안정화법을 이용한 KBF설계

식 (1)로 주어지는 m개의 플랜트 집합에 대하여 동시 안정화하기 위한 KBF설계는 다음과 같이 요약된다.

모든 i에대하여 ($A_i - K_f c_i$)의 모든 고유치의 실수부가 음의값을 갖도록 Kc를 선택한다. 즉, KBF루프의 특성방정식이 Hurwitz가되도록 K_f를 선택하는 것과 동일하다.

i번째의 플랜트에 대하여 m^i, e^i를 다음과 같이 정한다.

$$\frac{m^i}{e^i} = c_i\,(sI - A_i)^{-1} \qquad \text{—— (12)}$$

여기서 m^i는 nxq인 numerator 행렬로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$m^i = [\ p^i_1(s)\ p^i_2(s)\ \ldots\ldots\ldots\ p^i_n(s)\ ]^T$$

i번째의 동작점에 대한 KBF루프의 행렬값(determinent)은 다음과 같다.

$$\det[\ G^i_{KBF}(s)\ ]$$

$$= \frac{\det\left(c_i \dfrac{m^i}{e^i}\right)}{\det\left(I + \dfrac{m^i}{e^i} c_i\right)} \qquad \text{——(13)}$$

i 번째 KBF 루프의 특성방정식은 다음과 같다.

$$\det\left(e^i + m^i K_f\right) = 0 \qquad \text{—— (14)}$$

KBF 루프가 안정이기 위하여서는 식 (8)로 표현되는 특성방정식이 Hurwitz 다항식이 되어야 한다. 여기서 이득행렬 K_f를 $\delta\ K_f'$로 매개변수화(parameterize) 하고 정리하면 다음과 같다.

$$m^i K_f = \delta \begin{bmatrix} s^n \\ s^{n-1} \\ \\ s^0 \end{bmatrix} M_i\ K_f' \qquad \text{—— (15)}$$

벡터 $M_i K_f'$의 모든 요소가 0보다 크면 KBF의 특성방정식은 Hurwitz이다.

K_f'을 구하는 과정은 다음과 같이 요약된다.

①. 모든 요소가 양의값을 갖는 임의의 벡터 q를 선택한다.

②. $K_f' = q\ M_1^{-1}$인 관계를 이용하여 Kc'을 구한다.

③. 모든 i (i=2,...,n)에 대하여 $M_i\ K_f > 0$ 임을 조사하고 이를 만족하지 않는 i가 존재하는 경우 q를 조정하여 ①을 수행한다.

④. KBF의 특성방정식이 Hurwitz이기 위한 δ를 선택한다.

위의 알고리즘을 이용하면 m개의 동작점에 대하여 동시안정도를 보장하는 KBF이득 K_f를 구한다.

4. 예제

다음과 같은 두개의 동작점을 갖는 플랜트를 고려하자.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.451 & -1.077 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [\ 0.7372\ 0.773\ 0\ ]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1.429 & -1.451 & -.4390 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [\ 0.2173\ 0.250\ 0\ ]$$

1). LQR 설계

플랜트 모델에 대한 $(sI - A_i)^{-1}\ b_i$의 표현은 각각의 동작점에 대하여 다음과 같이 된다.

$$(sI - A_1)^{-1}\ b_1$$

$$= \frac{1}{s^3 + 1.077\ s^2 + 1.451\ s} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix} \qquad 14$$

$$(sI - A_2)^{-1}\ b_2$$

$$= \frac{1}{s^3 + 0.439\ s^2 + 0.010\ s - 1.429} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix} \qquad 15$$

식 (14), (15)에서 L_1, L_2는 다음과 같이 구하여진다.

$$L_1 = L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

여기서 $L_1 = L_2$ 이므로 임의의 양의벡터 q 는 어떤값을 선택하여도 되며, $K_c = L_1^{-1} q$로 구한 LQR이득은 두 플랜트를 동시에 안정화 한다.

2). KBF 설계

두 플랜트 모델에 대한 $c_i\ (sI - A_i)^{-1}$의 표현은 각각 다음과 같다.

$$c_1\ (sI - A_1)^{-1} = \frac{1}{s\hat{}3 + 1.077s\hat{}2 + 1.451372s}$$

$$* \begin{bmatrix} .737274s\hat{}2 + .7940441s + 1.070059 \\ .773s\hat{}2 + 1.569795s + .7940441 \\ .773s + .737274 \end{bmatrix}$$

$$c_1\ (sI - A_1)^{-1} = \frac{1}{s\hat{}3 + 5.78938s\hat{}2 + 9.308035s + 5.377463}$$

$$\begin{bmatrix} .2173195s\hat{}2 + 1.258145s + .6771073 \\ .25025s\hat{}2 + 1.666112s + 1.258145 \\ .25025s + .2173195 \end{bmatrix}$$

위의 두 식에서 M_1, M_2 행렬은 다음과 같다.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.73727 & 0.79404 & 1.07005 \\ 0.77300 & 1.56979 & 0.70404 \\ 0 & 0.77300 & 0.73727 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0.21732 & 1.25814 & 0.67711 \\ 0.25025 & 1.66611 & 1.25814 \\ 0 & 0.25025 & 0.21732 \end{bmatrix}$$

여기서 임의의 양의 벡터 q를 $q = [1\ 1\ 1]^T$로 선택하면 KBF 이득 행렬 K_f는 다음과 같이 구하여 진다.

$$K_f = \begin{bmatrix} -0.41612 \\ 0.44097 \\ 0.89401 \end{bmatrix}$$

그리고 $M_2 K_f$ 는 다음에 보여지는것 처럼 0보다 크게 되어 위에서 구한 KBF이득 행렬이 두 동작점 모두에서 플랜트를 안정화 한다.

3). LQG

위에서 구한 LQR 이득과 KBF 이득을 조합하여 LQG 전달함수를 각각의 동작점에 대하여 구하면 다음과 같다.

$K_1(s)$:

$$\begin{bmatrix} 0.3067917 & 1.321658 & 0 & -0.4161162 \\ -0.3251184 & -0.3408726 & 1 & 0.4409736 \\ -1.659127 & -3.142439 & -2.077 & 0.894006 \\ & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

전달함수 K_1을 이용하여 구한 각각의 동작점에 대한 폐루프 극점은 다음과 같다.

$G_{c1}^{11}(s)$: $-0.7088248 + j\,1.007081$
$-0.7088248 - j\,1.007081$
$-0.6593505 + j\,0$
$-0.4324671 + j\,1.450632$
$-0.4324671 - j\,1.450632$
$-0.2461467 + j\,0$

$G_{c1}^{12}(s)$: $-3.7743250 + j\,0$
$-0.9162938 + j\,0.6397210$
$-0.9162938 - j\,0.6397210$
$-0.8796417 + j\,0.3222680$
$-0.8796417 - j\,0.3222680$
$-0.4866250 + j\,0$

위의 결과에서 보여지는 바와 같이 제안한 알고리즘으로 설계한 제어기는 두개의 동작점에 대하여 플랜트를 안정화한다.

4). 결론

예제에서 보인 바와 같이 m개의 전달함수 행렬의 부호가 동일하며 각각에 대하여 (A_i, B_i)쌍이 안정가능이고 (A_i, C_i)쌍이 관측가능이면 동시에 안정화 시키는 고정제어기를 구할 수 있다. 그러나 안정화 조건과 아울러 중요하게 다루어지는 최적조건과 실행도(performance)문제에 대하여서는 연구되어야 할 과제이다.

참고문헌

[1] Anderson, B.O.D., and Moore, J.B.,"Linear Optimal Control", Printice-Hall, 1971.

[2] Kwakernaak, H., and Sivan, P., "Linear Optimal Control Theory", Wiley-Interscience, 1972

[3] J.C.Doyle, "Guaranteed Margins for LQG Regulator", IEEE Trans. on Auto. Contr. Vol.AC-23, Aug., 1978

[4] W.E.Schmitendorf, C.V.Hollot, " Simultaneous stabilization via linear state feedback control", Proc. 27th Conf. on Decision and control ,Austin, Texas, FA4-11:15, 1988.

[5] B.K.Ghosh, C.I.Byrnes,"Simultaneous stabilization and simultaneous pole-placement by non-switching dynamic compensation", IEEE Trans. Auto. Ctrl.28, pp. 735-741, 1983

[6] B.K.Ghose, " A geometric approach to simultaneous system design : Parameter insensi-tive desturbance decoulping by state and output feedback", Modelling, Identification and robust control, C.I.Byrnes and A.Lindquist (editors), Elsevier Science Publishers, B.V., North-Holland, 1986

[7] W.M.Wonham, " Linear multivarible control, a geometric approach ", Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, Springer Verlag, 1974

[8] B.R.Barmish , K.H.Wei, " Simultaneous stabilizability of single input-single output systems ", Modelling, Identification and robust control, C.I.Byrnes and A.Lindquist (editors), Elsevier Science Publishers, B.V., North-Holland, 1986

[9] R.Saeks, J.Murray,"Fractional representations , Algebric geometry and the simultaneous stabilization problem ", IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. AC-27, pp. 895-903, 1982

[10] D.C.Youla, J.J.Bongiorno, C.N.Lu, " Single-Loop feedback stabilization of linear multi-varible dynamical plants ", Automatica,Vol.10 , pp. 159-173, 1974

[11] E.Emre, " Simultaneous Stabilization with fixed closed loop characteristic polynomial " IEEE Trans. Auto. Contr., AC-28, pp. 103-104, 1983