

# 시리얼 샘플링 시스템의 最適制御

최 언 옥

釜山 工業 大學 制御計測學科

## Optimal Control of Serial-Sampling System

Yeon-Wook Cheo

Dept. of Control & Instrumentation Eng.  
Pusan National Institute of Technology

### ABSTRACT

In industrial multivariable plants, it is often the case that the plant outputs are detected not simultaneously but serially. In this paper, the problem of estimating the state vector of the plant based on the data obtained from such a detecting scheme is considered, and a special type of observer (referred to as a "serial-sampling" type observer) which renews its internal states whenever a new data is obtained is proposed. It is proved that such an observer can be constructed for almost every sampling period if the plant is observable as a continuous-time multivariable system, and that the poles of the closed-loop system using the serial-sampling type observer consist of the poles of the observer and those of the state feedback system. The behaviors of the observer and the closed-loop system are studied by simulation. The results of simulation indicate that a serial-sampling type observer can estimate the state of the plant more accurately than the ordinary type observers and improve the closed-loop performance.

### 1. 序論

多數의 出力변수를 가지고 있는 實พล렌트(plant)에서는, 出力변수의 測定値가 同時에 全部 檢出되어지지 않고 서로 조금씩 틀린 時刻에 檢出되어 차례로 디지털 計算器에 入力되어지는 경우가 있다. 例를 들면, 化學 플랜트 등에서 雜質이나 中間生成物의 成分을 측정하는 경우 그 測定値(成分)의 분석에는 상당한 時間이 所要되고 또한 그 分析裝置도 高價이다. 이와같은 경우에는 하나의 분석장치를 利用하여 數個所의 成分을 측정하는 方式을 채용함으로써 서로 틀린 時刻, 틀린 位置에 있어서의 成分의 측정치가 順次的으로 얻어지게 된다. 當論文에서 말하는 시리얼 샘플링(Serial Sampling)이라고 하는 것은 이와같은 데이터의 取得方式, 즉 p個의 檢出量  $y_1, y_2, \dots, y_p$  를 조금씩 틀린 時刻  $kT_0+t_1, kT_0+t_2, \dots, kT_0+t_p$  ( $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_p < T_0$ ) 에 측정해서 얻는 方式을 意味하고 있다.

從來의 觀測器 理論에서는 p個의 檢出量을 가진 制御對象의 狀態推定에는 p個의 데이터를 同時에 사용하고 있다. 따라서 從來의 觀測器 理論을 그대로 上記와 같은 플랜트에 適用하게 되면, p個의 測定値가 全部 얻어지는 시간  $T_0$ 마다 推定値를 更新하는 觀測器가 얻어진다. 따라서 이와같은 관측기에서는 하나의 出力變數가 檢出되더라도 그 情報를 직접 利用하지 못하고 나머지의 出力變數가 전부 檢出될 때 까지 기다리지 않으면 안 되게 되므로 주어진 하드웨어(hardware)上的 機能을 최대한 利用하지 못하고 있는 것이 아닌가 생각된다. 따라서, 한번의 測定이 行하여진 뒤 즉시 그 값에 따르는 制御를 수행할 수 있다면 상당한 制御性能의 向上을 기대할 수 있을 것이다.

上記와 같은 생각下에서, 當論文에서는 1個의 檢出量이 얻어질 때 마다 觀測器의 内部狀態를 更新해서 새로운 推定値를 얻을 수 있는 "시리얼 샘플링(Serial Sampling)型 觀測器"를 提案한다. 以下에서는 먼저, 시리얼 샘플링型 觀測器가, 만약 制御對象이 連續系로서 觀測可能(observable)하다면 거의 대부분의 샘플링 周期에 대해서도 構成可能함을 보이고, 이러한 觀

測器를 使用하여 閉루프를 構成하였을 경우, 全體 귀환(feedback) 制御시스템의 安定性에 關한 問題를 檢討한다. 또한 觀測器의 最初의 p-1個의 推定値(즉 全出力 變數가 1회씩 測定되어질 때 까지)의 決定方法에 對한 하나의 指針을 提案하고 시뮬레이션(simulation)에 依하여 그의 有用性을 確認한다. 表現上的 簡略化를 위하여 當論文에서는 出力變數의 測定間隔이 一定하다고 假定한다. 즉,  $t_2-t_1=t_3-t_2=\dots$  이다.

### 2. 制御對象과 用語의 記述

다음과 같은 連續시간의 制御對象을 생각한다.

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = A_c x_c(t) + B_c u_c(t) \quad (1)$$

$$y_c(t) = C_c x_c(t) \quad (2)$$

단,  $x_c(t)$ ,  $u_c(t)$ ,  $y_c(t)$  는 각각 n次元의 狀態벡터, m次元의 操作벡터, p次元의 檢出벡터를 意味하며, ( $A_c, B_c, C_c$ )는 적당한 크기의 定數行列이며 可制御 可觀測하다고 가정한다. 이와같은 制御對象에 대하여, 그 檢出벡터  $y_c(t)$  의 제 i成分  $y_{ci}(t)$  가 時刻

$$t = kT_0 + \tau + (i-1)T \quad k=0, 1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, p \quad (3)$$

에 있어서 測定되어지는 것으로하고, 그의 測定値를

$$y(k, i) = y_{ci}[kT_0 + \tau + (i-1)T] \quad (4)$$

로 둔다. 以下에서는 上記의 測定値를 使用해서 時刻

$$t = kT_0 + iT \quad k=0, 1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, p \quad (5)$$

에서의 制御對象의 狀態를 推定하는 觀測器를 생각한다. 단, 操作量  $u_c(t)$ 는 (5)의 時刻에서 스텝(step)狀으로 變換되어지는 것으로 가정한다. 즉

$$u_c(t) = u(k, i) \quad kT_0 + iT \leq t < kT_0 + (i+1)T \quad k=0, 1, 2, \dots; i=0, 1, 2, \dots, p \quad (6)$$

이다. 操作量에 關한 上記의 假定은 本질적인 것이 아니고, 보다 일반적인 操作條件下에서도 本論과 同一한 結果가 誘導된다.

먼저, 필요한 用語와 記號를 導入한다. 檢出量의 測定時刻 (3) 및 狀態를 推定해야할 時刻 (5)의 關係를 圖示하면 그림 1과 같이 된다.  $\tau$ 는 操作量의 入力으로부터 다음의 測定量을 얻을 時까지의 時間이며, 대략 (測定時間-演算時間)으로 생각할 수 있다. 이 그림에 있어서, 時刻  $kT_0$ 에서  $(k+1)T_0$ 까지의 時間區間을 當論文에서는 (k 번째의) 프레임(frame)이라하며,  $T_0$ 를 프레임周期라고 부르기로 한다. 또한, 檢出量을 測定하는 주기  $T$ 를 샘플링주기라 하며  $T_0$ 와  $T$ 사이에는

$$T_0 = pT \quad (7)$$

의 關係가 있는 것으로 假定한다. 이와같이 시스템이 2種類의 周期를 가지고 있는 것에 對應해서, 時刻  $kT_0 + iT$ 에서 制御對象의 狀態를 2가지의 因數를 가지는 記號

$$x(k, i) = x_c(kT_0 + iT) \quad k=0, 1, 2, \dots; i=0, 1, 2, \dots, p \quad (8)$$

로서 나타낸다. 단, 이 定義에 있어서,  $i=p$ 와 다음 프레임이  $i=0$ 는 같은 意味이다. 즉,

$$x(k+1, 0) = x(k, p), \quad u(k, p) = u(k+1, 0) \quad (9)$$

인 것에 注意를 必要로 한다.

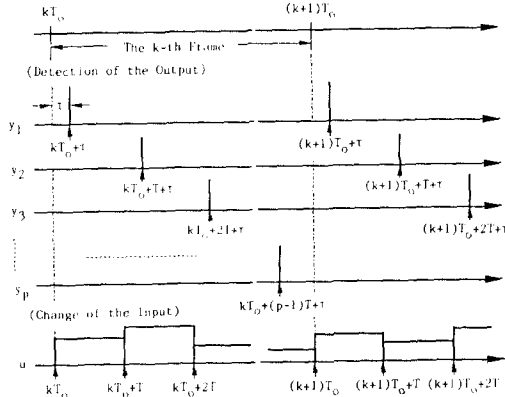


Fig.1 Timing of Detection of the Output and Change of the Input  
그림 1. 出力의 檢出時刻와 入力の 變化時刻

다음에上記와 같은 상태  $x(k,i)$  및 出力  $y(k,i)$ 에 대해서, 상태方程式을誘導하면 다음과 같다. 즉, (1)을 풀으므로써  $x(k,i)$ 에 관한遷移方程式

$$x(k,i+1) = Ax(k,i) + Bu(k,i) \quad (10)$$

$k=0, 1, 2, \dots; i=0, 1, 2, \dots, p$

가 얻어진다. 단,

$$A = \exp(AcT), \quad B = \int_0^T \exp(Ac\tau) Bc d\tau \quad (11)$$

이며, 제  $k$  프레임에서 제  $k+1$  프레임에의 접속은 (9)로 주어진다. 더우기, (1), (2)에 의해測定值  $y(k,i)$ 는

$$y(k,i+1) = c_{i+1}x(k,i) + d_{i+1}u(k,i) \quad (12)$$

$k=0, 1, 2, \dots; i=0, 1, 2, \dots, p$

으로되는 것을 간단히 確認할 수 있다. 단,  $c_{i+1}$  및  $d_{i+1}$ 는, 連續時間시스템의 出力行列  $Cc$ 의 제  $i+1$  행을  $c_{i+1}$  로 표시할 경우

$$c_{i+1} = Cc_{i+1} \exp(Ac\tau) \quad (13)$$

$$d_{i+1} = Cc_{i+1} \int_0^T \exp[Ac(\tau-\sigma)] Bc d\sigma \quad (14)$$

$i=0, 1, 2, \dots, p$

로 주어진다. 以上の (10) 및 (12)가 制御對象에 관한 離散時間의 狀態方程式이다. 檢出이 시리얼 샘플링型인 것에 對應해서 시간에 관한變數가 2種類( $k$  및  $i$ )로 되어있는 점이 通常의 狀態方程式과 틀린 점이다.

다음節에서는上記의 式들을 이용해서, 操作量이 변화하는時刻에서의 制御對象의 狀態를 推定하는 觀測器를 유도한다.

### 3. 시리얼 샘플링型 觀測器와 誤差方程式

여기서는, 制御對象의 狀態  $x(k,i)$ 를 推定하는 시리얼 샘플링型 觀測器의 基本構造를 설명하고 觀測器의 推定值의 眞值에 대한 誤差方程式(error equation)을 유도한다.

狀態방정식 (10), (12)에 相應해서, 다음식과 같은 動的 시스템을 생각한다.

$$z(k,i+1) = Az(k,i) + Bu(k,i) + [h_{i+1}c_{i+1}z(k,i) + d_{i+1}u(k,i) - y(k,i+1)] \quad (15)$$

$k=0, 1, 2, \dots; i=0, 1, 2, \dots, p-1$

위식에서,  $h_1, h_2, \dots, h_p$ 는 觀測器 設計者에 의하여 決定되어야 할  $n$ 次元의 定數벡터이다. 상기의 動的 시스템에서,  $(k+1)$  번째 프레임에서 觀測器의 初期條件은, (9)에 對應해서 다음식에 의하여 결정된다.

$$z(k+1,0) = z(k,p) \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

다음節에서 證明하는 것처럼,  $h_i$ 를 적당히 선택하면上記 動的 시스템의 狀態  $z(k,i)$ 가

$$k \rightarrow \infty \text{ 일때 } z(k,i) \rightarrow x(k,i) \quad i=0, 1, 2, \dots, p-1 \quad (17)$$

를 滿足시키는 것이 可能하다. (15), (16)의 動的 시스템(17)을 滿足할 경우 이 式을 시리얼 샘플링型 觀測器로 부른다. 또한, (17)의 成立與否에 관계없이 定數벡터  $h_1, h_2, \dots, h_p$ 를 觀測器利得(observer' gain)이라한다. (14)의 形態로 나타낼 수 있는 바와 같이 시리얼 샘플링型 觀測器는, 直前의 檢出量  $y(k,i)$ 와 操作벡터  $u(k,i)$ 을 이용해서時刻  $kT_n + (i+1)$ 에서의 觀測器의 內部狀態를 更新하는 全次元型 觀測器이다. 다음節의 준비로서, 觀測器의 推定誤差

$$\varepsilon(k,i) = z(k,i) - x(k,i), \quad i=0, 1, 2, \dots, p \quad (18)$$

에 관한 基礎방정식을 유도하고 그의 기본적인 性質을 조사한다. (12)를 (15)에 代入하면

$$z(k,i+1) = (A+h_{i+1}c_{i+1})z(k,i) + Bu(k,i) - h_{i+1}c_{i+1}x(k,i) \quad (19)$$

이 얻어진다. 또, (10)에서 (19)를 빼면 다음식이 유도된다.

$$\varepsilon(k,i+1) = (A+h_{i+1}c_{i+1})\varepsilon(k,i) \quad (20)$$

(9)와 (16)로부터

$$\varepsilon(k+1,0) = \varepsilon(k,p) \quad (21)$$

가 됨을 알 수가 있다. 위의 2式을 사용해서時刻  $kT_n + iT_n$ 에서時刻  $(k+1)T_n + iT_n$ 까지의 誤差의 遷移를 求하면

$$\varepsilon(k+1,i) = \Phi_i \varepsilon(k,i) \quad i=0, 1, 2, \dots, p \quad (22)$$

로 된다. 여기서

$$\Phi_i = (A+h_{i+1}c_{i+1}) \cdots (A+h_1c_1) (A+h_p c_p) (A+h_{p-1}c_{p-1}) \cdots (A+h_{i+1}c_{i+1}) \quad (23)$$

$$h_0 = h_p, \quad c_0 = c_p \quad (24)$$

이다. (23)의 係數行列은, 프레임주기  $T_n$ 에 대한 觀測器의 推定誤差의 遷移를 의미하고 있다. 만약, 遷移行列  $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{p-1}$ 가 전부 安定하도록 벡터  $h_i$ 를 決定할 수가 있다면 (다시 말하면,  $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{p-1}$ 의 모든 固有值가 複素平面에서 單位圓內에 存在한다면), 收斂條件 (17)은 명백하게 만족하게된다. 그런데, (23)을 보면 알 수 있는 바와 같이,  $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{p-1}$ 은 同一한 正方形行列을 순서만 하나씩 차례로 바꾸어서 곱한 것이다. 이 사실로부터, 遷移行列  $\Phi_i$  中의 하나에 대해서만 그의 安定性 문제를 證明함으로써 모든  $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{p-1}$ 에 대해서도 安定性을 確信할 수 있게된다. 따라서, 하나의  $\Phi_i$ 를 安定化시킬 수 있는 觀測器利得  $h_1, h_2, \dots, h_p$ 의 存在를 證明함으로써 시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性를 結論지을 수 있다. 다음節에서 遷移行列  $\Phi_0$ 에 注目하여 이事實을 證明한다. (23)에서  $i=0$ 로 두고 右邊을 展開하면

$$\Phi_0 = (A+h_p c_p) (A+h_{p-1} c_{p-1}) \cdots (A+h_1 c_1) = AP + KG \quad (25)$$

단,

$$K = [(A+h_p c_p) \cdots (A+h_2 c_2) h_1, (A+h_p c_p) \cdots (A+h_3 c_3) h_2, \dots, (A+h_p c_p) h_{p-1}, h_p] \quad (26)$$

$$G = [c_1^T, (c_2 A)^T, \dots, (c_{p-1} A^{p-2})^T, (c_p A^{p-1})^T]^T \quad (27)$$

이다. 以上이 시리얼 샘플링型 觀測器의 推定誤差에 대한 기본적인 性質이다.

### 4. 시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性의 證明

먼저 거의 모든 경우에 대하여  $(AP, G)$ 가 可觀測함을 證明한다. 이를 위하여 다음의 補題가 必要하다.

<補題> 1:  $(Ac, Bc)$ 를 可觀測한 쌍으로 假定하고,  $(n_1, n_2, \dots, n_p)$ 를 그의 可觀測性指數벡터(Controllability Index Vector)로 한다. 또,  $a_{i1}, \dots, a_{in_i}$  ( $i=1, \dots, p$ )를  $n_i$ 개의 서로 다른 實數로 한다. 이 경우, 다음식으로 정의되는 正方形行列  $M$ 은 거의 대부분의 定數  $T$ 에 대하여 正則(nonsingular)이다.

$$M = [M_{11}^T, \dots, M_{1n_1}^T, M_{21}^T, \dots, M_{2n_2}^T, \dots, M_{p1}^T, \dots, M_{pn_p}^T]^T \quad (28)$$

$$M_{ij} = c_{i+1} \exp(Ac a_{ij} T), \quad i=1, 2, \dots, p; \quad j=1, \dots, n_i \quad (29)$$

단,  $(Ac, Cc)$ 의 可觀測性指數벡터는 다음을 만족하는  $p$ 개의 整數의 集合  $(n_1, \dots, n_p)$ 로 定義되어진다.

$$\det [c_{11}^T, \dots, (c_{11} A c_{11}^{n_1-1})^T, c_{22}^T, \dots, (c_{22} A c_{22}^{n_2-1})^T, \dots, c_{pp}^T, \dots, (c_{pp} A c_{pp}^{n_p-1})^T]^T \neq 0$$

上記의 補題는 실질적으로 參考文獻(2)와 같은 내용이지만

論文的 目的에 맞추기 위하여 그 表現을 약간 變경하여 표시하였다. 이 補題로부터 다음의 定理가 얻어진다.

<<定理 1>> (AP, G)는 거의 대부분의 샘플링 周期 T에 대하여 可觀測하다.

(증명)  $(n_1, \dots, n_p)$ 를  $(A_c, C_c)$ 의 可觀測性指數벡터로 한다. (AP, G)의 可觀測性行列에서부터 다음과 같이 하여 n개의 行을 선택한다. 즉, G의 제 1行으로부터 생기는 行(다시말하면  $C_{c1}$ 을 포함하는 行)을 위에서 부터  $n_1$ 行, G의 제 2行으로부터 생기는 行(다시말하면  $C_{c2}$ 를 포함하는 行)을 위에서 부터  $n_2$ 行,  $\dots$ , G의 제 p行으로부터 생기는 行(다시말하면  $C_{cp}$ 를 포함하는 行)위에서부터  $n_p$ 行 選擇한다. 이들의 行벡터들은

$$\gamma_{ij} = c_i A^{i-1} A^p (j-1) \quad i=1, \dots, p; \quad j=1, \dots, n_i \quad (30)$$

의 形態로 주어지지만, 이들을 나열하여 n次の 正方形列

$$\Gamma = [\gamma_{11}^T, \dots, \gamma_{1n_1}^T, \gamma_{21}^T, \dots, \gamma_{2n_2}^T, \dots, \gamma_{pn_p}^T] \quad (31)$$

을 만든다. 補題 1에서

$$a_{ij} = i-1+p(j-1)+(\tau/p) \quad (32)$$

로 두면, 行列 M은 상기 行列  $\Gamma$ 와 一致하게 된다( $C_1$ 가 (13)式으로 주어진 사실에 유의할 것). 그러므로,  $\Gamma$ 는 거의 대부분의 샘플링 주기에 대하여 正則이다. 따라서, (AP, G)의 可觀測性行列은 거의 대부분의 샘플링 주기에 대해서 풀 랭크(full rank)를 가진다. [증명끝]

위의 定理로부터, 絕對值가 1보다 작은 n개의 複素數  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  이 指定되었을 때, 적당한 行列

$$K^* = [k_1^*, k_2^*, \dots, k_p^*] \quad (33)$$

을 선택함으로써 行列

$$\Phi_0^* = AP + K^*G \quad (34)$$

의 固有值가  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  로 되도록 할 수가 있음을 알 수가 있다. 여기서, 만약

$$(A+h_p C_p) \dots (A+h_3 C_3) (A+h_2 C_2) h_1 = k_1^* \quad (35.1)$$

$$(A+h_p C_p) \dots (A+h_3 C_3) h_2 = k_2^* \quad (35.2)$$

$$(A+h_p C_p) \dots (A+h_{i+1} C_{i+1}) h_i = k_i^* \quad (35.i)$$

$$(A+h_p C_p) h_{p-1} = k_{p-1}^* \quad (35.p-1)$$

$$h_p = k_p^* \quad (35.p)$$

가 成立하면, 遷移行列  $\Phi_0^*$ 가 上記의  $\Phi_0^*$ 와 같아지게 된다. 따라서, 絕對值가 1보다 작은 적당한  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 에 대해서 식 (35)를 만족하는  $h_i$ 가 存在하는 것을 보이면 시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性이 證明된 것으로 된다. 以下, 이와같은 方針에 따라서 시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性을 證明한다.

<<定理 2>> (시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性):  $(A_c, C_c)$ 가 可觀測하다면, (1), (2)로 주어진 制御對象에 대해서 거의 대부분의 샘플링 주기 T에 대하여 시리얼 샘플링型 觀測器가 항상 構成可能하다.

(證明) R을  $n \times n$ 인 正則行列로 가정하고 다음과 같이 狀態變換를 等價變換한다.

$$\tilde{x}_c = R x_c \quad (36)$$

이 變換式에 의하여 行列  $A^p$ 와 G는 다음과 같이 된다.

$$\tilde{A}^p = R A^p R^{-1} \quad (37)$$

$$\tilde{G} = G R^{-1} \quad (38)$$

定理 1에 의하여, 거의 대부분의 샘플링 周期 T에 대하여 (AP, G)는 可觀測함이 保證된다. 그러므로, 任意的 주기 T에 있어서 (AP, G)는 可觀測하다고 가정할 수가 있다. 이 가정과 (37), (38)에 의하여, (AP, G)가 다음과 같은 可觀測標準形을 가지도록 正則行列 R을 선택할 수가 있다(3).

$$\tilde{A}^p = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \dots & \theta_{1q} \\ 0 & \theta_{22} & \dots & \theta_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta_{qq} \end{bmatrix} \quad \tilde{G} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & e_q \\ G_1 & G_2 & \dots & G_q \end{bmatrix} \quad (39)$$

여기서  $\tilde{A}^p$ 의 對角線上的 블록行列  $\theta_{ii}$ 는 다음과 같은 스칼라 (scalar) 可觀測標準形을 가진다.

$$\theta_{ii} = \begin{vmatrix} 0, & \dots & 0, & -\theta_{i1} \\ 1, & & 0, & -\theta_{i2} \\ & & \vdots & \vdots \\ 0, & \dots & 1, & -\theta_{ii} \end{vmatrix} \quad (i \times i) \quad (40)$$

또, AP의 對角線上的 오른쪽위의 블록행렬은

$$\theta_{ij} = \begin{vmatrix} & & & \theta_{ij,1} \\ & & & \theta_{ij,2} \\ & & & \vdots \\ & & & \theta_{ij,i} \end{vmatrix} \quad (i \times i) \quad (41)$$

의 形態를 가진다. 또한,  $\tilde{G}$ 의 對角線上的 블록은

$$e_i = [0 \dots \dots 0 \ 1] \quad (42)$$

의 形態를 하고 있으며, 블록행렬  $G_i$ 는 크기가  $(p-q) \times i$ 인 任意的 行列이다. 以下에서는, (AP, G)가 처음부터 (39)로 된 可觀測標準形으로 주어졌다는 假定하에서, 시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性을 證明한다. 만약, 그렇지 못할 경우에는 (36)에 의한 等價變換을 遂行함으로써 上記의 標準形을 얻을 수 있다. 즉, 等價變換된 시스템에 대해서 시리얼 샘플링型 觀測器를 構成한 다음, 逆變換을 취함으로써 원래의 시스템에 대한 觀測器를 얻을 수 있다.

$i$ 개의  $\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{ii}$ 를 絕對值가 1보다 작으며 同時에 0이 아닌 複素數로 둔다. ( $\theta_{ii}, e_i$ )는 분명하게 可觀測한 쌍이므로, 적당한  $i$ 차 벡터  $k_i$ 가 存在해서 행렬  $\theta_{ii} + k_i e_i$ 의 固有值가 ( $\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{ii}$ )가 되도록 만들 수가 있다. 이와같은  $k_i$ 를 사용해서  $n$ 次元의 벡터를 다음과 같이 定義한다.

$$k_i^* = [0^T, \dots, (\bar{k}_i)^T, \dots, 0^T]^T \quad i=1, \dots, q \quad (43a)$$

$$k_i^* = 0 \quad i=q+1, \dots, p \quad (43b)$$

이 값에의해,  $\Phi_0^*$ 는

$$\Phi_0^* = \begin{vmatrix} \theta_{11} + \bar{k}_1 e_1, & \theta_{12}, & \dots & \theta_{1q} \\ 0 & \theta_{22} + \bar{k}_2 e_2, & \dots & \theta_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \theta_{qq} + \bar{k}_q e_q \end{vmatrix} \quad (44)$$

로 되므로, 그의 固有值는  $\lambda_{11}, \dots, \lambda_{q+q}$ 로 된다. 다시말하면  $\Phi_0^*$ 는 安定하다. 따라서, (43)의  $k_i^*$ 에 대해서 聯立方程式 (35)가 解를 가지는 것을 나타내면 證明은 完了하게 된다.

먼저, (11)에 의해 A는 正則이므로 AP 및  $\theta_{ii}$ 도 正則임을 알 수가 있다. 또, 假定에의해  $\lambda_{ij}$ 로서는 0이 아닌 것을 선택하였으므로,  $\theta_{ii} + k_i e_i$ 도 전부 正則으로 된다. 여기서 聯立方程式 (35)를 밑에서 부터(즉, (35.p)로부터) 풀어가기로 한다.  $i=q+1, \dots, p$ 에 대해서는,  $k_i^* = 0$ 이므로

$$h_i = 0, \quad i=p, p-1, \dots, q+1 \quad (45)$$

로 둘 수 있다. 이때 (35)의 q번째 식은

$$A^{p-q} h_q = k_q^* \quad (46)$$

로 된다. A가 正則이기때문에 (46)은 唯一解

$$h_q = A^{-(p-q)} k_q^* \quad (47)$$

를 가진다. 만약  $h_q$ 를 위식과 같이 선택한다면, 그 다음 方程式 (35.q-1)은 다음과 같이된다.

$$A^{p-q} (A+h_q C_q) h_{q-1} = k_{q-1}^* \quad (48)$$

여기서, 行列  $A+h_q C_q$ 의 正則性を 보이기위하여,  $K_q^*$ 를

$$K_q^* = [0, \dots, 0, k_q^*, 0, \dots, 0] \quad (49)$$

와 같이 두고 행렬  $AP + K_q^* G$ 를 생각한다. (AP, G)가 처음부터 (39)의 形態를 하고 있다는 假定下에서 다음식을 얻을 수가 있다.

$$\det[AP + K_q^* G] = \det \theta_{11} \dots \det \theta_{q-1, q-1} \det(\theta_{qq} + k_q e_q) \neq 0 \quad (50)$$

그러므로,  $AP + K_q^* G$ 는 正則임을 알 수가 있다. (46), (47), (27)을 사용해서 계산해보면,

$$\begin{aligned} AP + K_q^* G &= AP + A^{p-q} h_q C_q A^{q-1} \\ &= A^{p-q} (A+h_q C_q) A^{q-1} \end{aligned} \quad (51)$$

을 얻을 수 있다. 따라서,  $(A+h_q C_q)$ 의 正則性は  $AP + K_q^* G$ 의 正則性에 달려있으므로, 方程式 (48)은 唯一解

$$h_{q-1}=(A+h_q C_q)^{-1} A^{-(p-q)} k_{q-1} \quad (52)$$

를 가진다. 이와같은 방법을 되풀이하면, 聯立方程式 (35.1), ..., (35.2), (35.1)은 각각  $h_{q-2}, \dots, h_2, h_1$ 에 대한 唯一解를 가진다는 것을 알 수가 있다. 여기서, 方程式 (35.1)의 係數行列의 正則性을 보이기위해서

$$K_i^*=[0, \dots, 0, k_i^*, k_{i+1}^*, \dots, k_{q-1}^*, k_q^*, 0, \dots, 0] \quad (53)$$

로 두고, 行列  $AP+K_i^*G$ 를 생각하면 된다. 聯立方程式 (35.1) (35.p)가 解를 가진다는 사실로부터, 시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性은 證明되었다. [證明끝]

上記의 定理 2의 證明의 方法(즉, 觀測器의 極을 먼저 指定하고, 그것에 대한 觀測器의 利得  $h_i$ 를 실제로 求하는 方法)을 사용했다. 그러나, 이 方法은 실제로 시리얼 샘플링型 觀測器를 構成한다는 觀點에서 보면 致命的인 弱點을 內包하고 있다(定理 2의 證明으로서 充分하다). 즉, 證明에서는 먼저 시스템을 Wonham의 可觀測標準形으로 變形해서 證明을 遂行하고있기 때문에, 시리얼 샘플링型 觀測器의 構成에는 단지  $q$ 개의 출력변수만을 사용하게 된다. 여기서  $q$ 는 標準形으로 變形했을 때의 블록행렬의 갯수이다. Wonham의 標準形에서, 一般의  $q$ 는 서로 獨立한 출력변수의 數  $p$ 보다 적은 경우가 많다. 極단적인 例로서, 만약  $(A, cc_1)$ 이 可觀測한 쌍이라면  $q$ 는 거의 대부분의 샘플링 周期에 關해서 1로 된다. 따라서, 上記의 方法에 依하여 觀測器를 設計하면 檢出量의 一部分만을 利用하게 되어 "시리얼 샘플링型" 觀測器의 主된 目的에서 벗어나게 된다. 그러므로, 실제로 觀測器를 設計하기위한 다른 方法을 必要하게 된다. 제 7節의 例題에서는 다음의 課程에 의해 觀測器를 設計하였다.

먼저 Kimura-Hikita<sup>(4), (5)</sup>方法을 使用하여 目的에 맞는 귀환(feedback)利得  $K^*$ 를 計算한다(35)의 聯立方程式을 풀으므로써, 利得  $h_i$ 를 얻고있다. 現時點에서, 任意的  $K^*$ 에 대하여 方程式 (35)가 반드시 解를 가진다는 것에 대해 數學的인 保證을 할 수는 없지만 現在까지 (35)가 解를 가지지 않는 例를 發見하지 못했다. 따라서, 0이 아닌 極을 指定하는 거의 대부분의  $K^*$ 에 대하여 聯立方程式 (35)가 解를 가진다고 推測할 수가 있다.

### 5. 시리얼 샘플링型 觀測器를 가진 制御系

이 節에서는 시리얼 샘플링型 觀測器의 出力에 의해 狀態귀환을 遂行하는 閉루프系(closed-loop system)의 特性을 調査한다. 즉, 制御對象은 (1)과 (2)에 의하여 주어지며 出力의 檢出은 (5)의 形態로 이루어진다는 假定下에서, (15), (16)으로 주어지는 시리얼 샘플링型 觀測器를 設計하여 이 制御對象에 適用했을 경우 (6)式의 形態로 주어지는 入力는 다음과 같이 표현된다.

$$u(k, i) = -Fz(k, i) \quad k=1, 2, \dots; i=0, 1, 2, \dots, p-1 \quad (54)$$

여기서 行列  $F$ 는 狀態歸還法則(state feedback law)

$$u(k, i) = -F_x c(kT_0 + iT) \quad (55)$$

가 離散系의 閉루프系를 安定化시킬 수 있도록 선택되어진다. 그러한 行列  $F$ 는 極配置方法이나 離散形 LQG方法에 의하여 求해될 수 있다.

閉루프系의 움직임을 해석하기 위하여 (54)를 (10)과 (15)에 代入하면 다음의 式을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} x(k, i+1) \\ z(k, i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BF \\ -h_{i+1}c_{i+1} & A+h_{i+1}c_{i+1}-BF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k, i) \\ z(k, i) \end{bmatrix} \quad (56)$$

(56)을 等價變換

$$\begin{bmatrix} x(k, i) \\ \varepsilon(k, i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k, i) \\ z(k, i) \end{bmatrix} \quad (57)$$

을 利用함으로써 다음의 式을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} x(k, i+1) \\ \varepsilon(k, i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BF & -BF \\ 0 & A+h_{i+1}c_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k, i) \\ \varepsilon(k, i) \end{bmatrix} \quad (58)$$

이 式으로부터 프레임 周期에 대한 閉루프系의 狀態 遷移方程式

$$\begin{bmatrix} x(k+1, i) \\ \varepsilon(k+1, i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A-BF)^p & \Lambda_i \\ 0 & \Phi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k, i) \\ \varepsilon(k, i) \end{bmatrix} \quad (59)$$

을 얻을 수 있다. 여기서

$$\Phi_i = (A+h_1c_1) \cdots (A+h_1c_1)(A+h_p c_p) \cdots (A+h_{i+1}c_{i+1}) \quad (60a)$$

$$\Lambda_i = (A-BF)^{p-1} BF + (A-BF)^{p-2} BF \Psi_{p-1} + \dots + (A-BF) BF \Psi_2 + BF \Psi_1 \quad (60b)$$

$$\Psi_i = (A+h_p c_p) \cdots (A+h_{i+1}c_{i+1}) \quad (60c)$$

이다. (59)로부터, 閉루프系의 極(즉, 프레임 周期  $T_0$ 에 대한 狀態의 遷移)은, 狀態歸還 레플레이터의 極과 시리얼 샘플링型 觀測器의 極으로 構成되어있음을 알 수 있다. 이것은 全體 閉루프系가 安定함을 意味하고있다.

### 6. 觀測器의 初期值 設定을 위한 한 方法

시리얼 샘플링의 定義로부터 알 수 있는 바와 같이, 當論文에서 提案하고 있는 觀測器는 전 出力變數가 한번이상 檢出되어질 때까지는 觀測器로써 正確하게 變動하지못한다. 즉, 시리얼 샘플링型 觀測器는 그의 첫번째 프레임에서는 觀測器로써 그 役割을 하지못하기 때문에 가능한 한 正確한 값을 얻기위하여서는 觀測器 出力값에 대해 補正이 必要하게된다. 여기서, 最適歸還利得(optimal feedback gain)  $F_0$ 를 計算하기위하여 使用한 評價函數를 利用해서 첫번째  $p-1$ 개의 制御對象의 狀態의 推定值을 얻기위한 하나의 方法을 提案한다.

다음 式으로 주어지는 評價函數를 使用하여 最適歸還利得을 計算한다.

$$J(x_c(0), u(\cdot), \infty; T) = \sum_{k=0}^{\infty} [x_c^T(k) Q x_c(k) + u^T(k) R u(k)] \quad (61)$$

단,  $Q, R$ 은 크기가 각각  $n \times n, m \times m$ 인 對稱이고 正定(symmetric positive definite)行列이다. 5節에서의 歸還利得  $F_0$ 를 最適制御理論을 使用하여 求한다면 上記 評價函數의 最適值는 다음과 같이 주어진다.

$$J^0(x_c(0), u(\cdot), \infty; T) = x_c^T(0) P x_c(0) \quad (62)$$

단  $P$ 는 離散形 리카치(Riccati)方程式의 解이며,  $x_c(0)$ 는 制御對象의 初期狀態 값이다. 여기서 첫번째 프레임의  $i$ 번째 檢出量  $y_c(i-iT+i) = y_c(i)$ 를 未知의 初期狀態  $x_c(0)$ 로 나타내면

$$y_c(i) = c_i A^{i-1} x_c(0) + d_i u_c(0, i-1) + c_i \sum_{j=1}^{i-1} A^{j-1} B u_c(0, j-1) \quad (63)$$

로 된다. 이 式으로부터 첫번째 프레임 동안의 檢出量을 벡터形式으로 表示하면 다음과 같다.

$$\xi(i) = \beta(i) x_c(0) + \gamma(i) \eta(i), \quad i=1, 2, \dots, p-1 \quad (64a)$$

$$\xi(i) = [y_c(0, 1), y_c(0, 2), \dots, y_c(0, i)]^T \quad (64b)$$

$$\beta(i) = [c_1^T, c_2^T, \dots, c_i^T]^T \quad (64c)$$

$$\eta(i) = [u^T(0, 0), u^T(0, 1), \dots, u^T(0, i-1)]^T \quad (64d)$$

$$\gamma(i) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 B & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_i A^{i-2} B, c_i A^{i-3} B, \dots & c_i B & d & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (64e)$$

(64)式으로부터 簡單히

$$\xi(i) - \gamma(i) \eta(i) = \beta(i) x_c(0) \quad (65)$$

가 얻어진다. 따라서, 既知의 檢出量과 操作量으로부터 未知의 初期狀態 값  $x_c(0)$ 을 얻기하기위해서는  $\beta(i)$ 의 逆行列을 計算해야한다. 그러나, (64c)로부터 알 수 있는 바와같이  $\beta(i)$ 는  $i \times n$  ( $i < n$ )次元의 行列이므로 一般의 逆行列이 存在하지않는다. 그러므로, 當論文에서는 評價函數의 最適值를 最小化하는 意味에서의 一般化(Moore-Penrose)逆行列을 使用함으로써 가장 適切한 初期值를 얻고있다. 즉, (62)는

$$J^0 = x_c^T(0) P x_c(0) = (P^{1/2} x_c(0))^T (P^{1/2} x_c(0)) = x_0^T x_0 \quad (66)$$

로 變形되므로 (65)를 (66)을 利用하여 表示하면

$$\xi(i) - \gamma(i) \eta(i) = \beta(i) P^{-1/2} x_0 \quad (67)$$

가 얻어진다. (67)의 解로써

$$x_0 = [\beta(i) P^{-1/2}]^{-1} [\xi(i) - \gamma(i) \eta(i)] \quad (68)$$

를 使用하면 (68)은 (67)을 滿足할 뿐 아니라 (67)의 任意的 解  $x_0$ 에 對해서 다음의 不等式도 滿足한다는 것이 알려져 있다<sup>(6)</sup>.

$$\| [x_0] \| \leq \| [x_0 - I] \| \quad (69)$$

다시말하면 (69)는, (68)이 評價函數의 最適值를 最小로하는 解인 것을 意味하고있다. 따라서 i 번째의 出力이 檢出된 後의 串列 샘플링型 觀測器의 出力 z(0, i)는 다음과 같이 計算되는 觀測器 内部의 前狀態

$$z(0, i-1) = A^{i-1}(P-1/2x_0) + [A^{i-2}B, \dots, AB, B]\eta(i-1) \quad (70)$$

$$i=2, 3, \dots, p-1$$

를 이용하여 (15)에 의하여 計算된다.

### 7. 例題

[예제 1] 먼저 串列 샘플링型 관측기의 動作을 獨立의(즉, 오픈루프의 狀態下에서)으로 살펴보기 위하여 다음과 같이 3個의 出力을 가진 自由(free)시스템을 생각한다.

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = A_c x_c(t) \quad y_c(t) = C_c x_c(t) \quad (71)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

上記 시스템은 각각 1 雙직 複素平面上의 虛數軸上과 左半面上에 極을 가지고 있다. 여기서  $T=1, T_0=3, \tau=0.8$ 으로 두고,  $0.1 \pm j0.1$ 에 觀測器의 極을 가지는 串列 샘플링型 觀測器를 設計하면 觀測器 利得은 다음과 같다.

$$h_1 T = [-0.426, -1.044, 0.328, -0.283]$$

$$h_2 T = [-1.138, 1.786, -0.976, -0.953]$$

시스템의 狀態의 各成分의 推定值은 그림 2(a)에 表示하고 있으며, 比較를 위해 上記의 觀測器와 同一한 位置에 極을 가지는 一般의 形態의 觀測器를 設計하여 그의 出力을 그림 2(b)에 나타냈다. 이 그림으로부터 串列 샘플링型 觀測器가 일반적인 觀測器 보다 더욱 正確한 推定值을 나타내고 있는 것을 알 수가 있다.

[예제 2] 여기서는 다음식으로 주어지는 시스템<sup>8)</sup>에 대하여 串列 샘플링型 觀測器를 가지는 LQG레귤레이터(regulator)를 設計했다.

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = A_c x_c(t) + B_c u_c(t) \quad y_c(t) = C_c x_c(t) \quad (72)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 1.58 & -0.2077 & 6.175 & -5.676 \\ -0.5814 & -4.29 & 0 & 0.671 \\ 1.067 & 4.273 & -6.654 & 5.893 \\ 0.048 & 4.273 & 1.343 & -2.104 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5.679 & 0 \\ 1.136 & -3.146 \\ 1.136 & 0 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

여기서  $T=0.1, T_0=0.4, \tau=0.08$ 로 두고,  $0.1 \pm j0.1, -0.05, 0.05$ 에 극을 가지는 串列 샘플링型 觀測器를 설계한뒤, 다음식과 같은 連續時間系로 주어지는 評價函數에 의해 歸還利得을 계산한다.

$$J = \int_0^{\infty} [y_c^T(t) Q y_c(t) + u_c^T R u_c(t)] dt$$

단,  $Q = \text{diag}[1, 1], R = \text{diag}[1, 1]$  이다. LQG방법에 의하여 구한 귀환이득은 다음과 같다.

$$F = \begin{bmatrix} 0.410 & 0.478 & 0.313 & -0.025 \\ -2.005 & -0.124 & -1.468 & 0.909 \end{bmatrix}$$

制御對象의 初期條件은

$$x_c^T(0) = [1, 0, -1, 1]$$

두고 시뮬레이션을 遂行한 結果는 그림 3과 같다. 例題 1과 마찬가지로 比較를 위하여, 上記의 觀測器와 같은 位置에 極을 가지는 一般의 觀測器를 사용했을 경우의 시스템의 應答를 點線으로 표시하였다. 豫想했던 바와 마찬가지로 串列 샘플링型의 觀測器를 사용한 경우가 一般의 觀測器의 경우보다 더 좋은 遷移應答(transient response)을 나타내고 있음을 알 수가 있다.

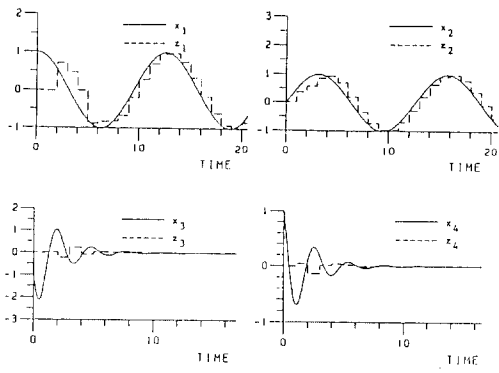
### 8. 結論

當論文에서는, 出力變數의 檢出이 同時에 이루어지지않고 順次的으로 行하여지는 시스템(즉, 串列 샘플링 시스템)을 對象으로하여, 하나의 데이터가 얻어질 때마다 그의 内部狀態를 更新하는 새로운 形態의 觀測器를 提案하였다. 또한 주어진 制御對象이 連續時間系로서 可觀測하다면 거의 대부분의 샘플링 주기에 대하여 上記 觀測器가 構成可能함을 證明하고, 오픈루프系를 構成하였을 경우 전체 시스템이 安定함을 確認하였다. 시뮬레이션에 의하여 當論文에서 提案된 觀測器가 一般의 觀測器에 의하여 眞值에 더욱 가까운 推定值을 얻을 수 있다는 것을 확인하였다.

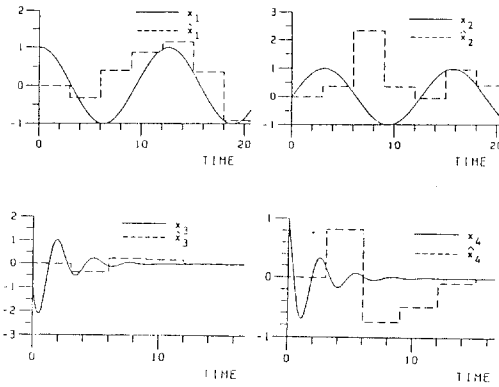
當論文에서 提案된 觀測器의 사용시의 計算時間에 대해 약간의 설명이 필요하다. 串列 샘플링型 觀測器를 실제로 사용할 경우 觀測器의 内部狀態의 更新을 위한 計算시간이 필요하게 된다. 序論에서 밝힌 바와같이 串列 샘플링 시스템의 代表的인 例로서 化學 플랜트를 들었다. 이와같은 시스템에서는, 마이크로프로세서의 計算速度가 플랜트의 時定數(time constant)보다 훨씬 빠르기 때문에 計算時間은 問題가 되지않는다. 그러나, 上記의 串列 샘플링型 觀測器를 서보(servo)시스템에 적용할 경우 다음과 같은 점에 留意해야한다. 즉 3절에서 提案된 觀測器는 각 段階에 있어서 單 하나의 檢出量만을 필요로하지만, 狀態遷移의 계산은 각 段階마다 필요하다. 따라서, 計算에 必要한 極점의 實수는 一般의 觀測器의 그것에 비교해서 조금밖에 出지않는다. 그러므로, 샘플링 주기가 制御法則에 포함된 計算量에 따라서 決定되는 狀況下에서는, 串列 샘플링型의 觀測器의 프레임 주기  $T_0$ 가 一般의 觀測器의 샘플링 주기보다 더 길게 선택되어질수도 있다. 이와같은 경우에는 串列 샘플링型 觀測器가 一般의 觀測器보다 항상 利點을 가지고 있다고는 할 수가 없다. 그렇지만, 샘플링 周期가 어떠한 要件에 의해 미리 定해져있고, 또한 그 周期내에 串列 샘플링型 觀測器의 계산이 可能한 狀況下에서는 一般의 觀測器보다 더 나은 結果를 얻을 수 있을 것이다.

### 9. 參考文獻

1. F.R.Cantmacher, The Theory of Matrices, Chelsea, 1959.
2. T.Hagiwara and M.Araki, "Controllability indices of sampled-data systems," Int.J. systems. SCI, vol. 19, pp. 2449-2457, 1988.
3. W.M.Wonham, "On pole assignment in multi-input controllable linear systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-12, pp.660-665, 1967.
4. H.Kimura, "Pole assignment by gain output feedback," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-20, pp.509-516, 1975
5. H.Hikita, S.Koyama, and R.Miura, "The redundancy of feedback gain matrix and the derivation of low feedback gain matrix in pole assignment," Trans.SICE, vol.11, pp. 556-560, 1975.
6. C.R.Rao, and S.K.Mitra, Generalized Inverse of Matrices and its Application, Wiley, New York (1971)
7. Y.W.Choe, and M.Araki, "Serial-Sampling Type Observer" Trans.SICE, vol. 25, No. 10, pp.1076-1082, 1989
8. D.J.Davison, and I.J.Ferguson, "The design of controllers for the multivariable robust servomechanism problem using optimization methods," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-26, pp.93-101, 1981.



(a) Serial-Sampling Type Observer



(b) Ordinary Type Observer

그림 2 예제 1의 시뮬레이션 결과

Fig.2 Estimation by the Serial-Sampling Type Observer

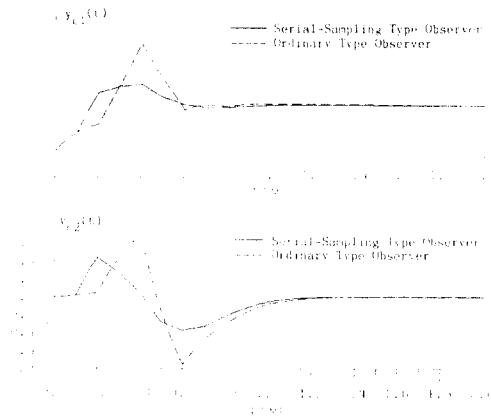


그림 3 예제 2의 시뮬레이션 결과

Fig.3 Regulator using the Serial-Sampling Type Observer

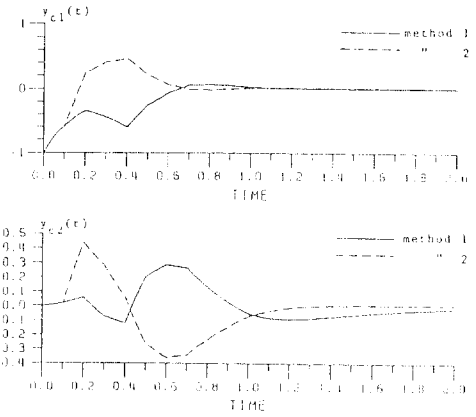


그림 4 초기치 설정 방법에 의한 결과

Fig.4 Result by the observer's Initial Setting