

새로운 가변 구조 제어기의 설계에 관한 연구

이 정훈, 김 종준, 이 대식, 이 주장, 윤 명중
한국과학기술원 전기 및 전자공학과

A Study on New Variable Structure System Controller Design

Jung-Hoon Lee, Jong-Jun Kim, Dae-Sik Lee, Ju-Jang Lee, and Myung-Joong Youn

Department of Electrical Engineering
Korea Advanced Institute of Science and Technology

Abstract

In the VSS control, reaching phase and chattering problem are the main disadvantages. A simple nonlinear sliding surface is proposed to cope with the reaching phase. The chattering problem is alleviated by almost continuous control with the compensation using the infinite closed loop.

1. 서론

최근 활발한 연구가 진행되고 있는 가변 구조 제어(Variable Structure Control) 이론은 그 특성 상 슬라이딩 모드(Sliding Mode)를 가지게 된다[5-7]. 이와 같은 모드를 가지는 시스템은 시스템 매개 변수의 변화나 외란에 강인한(Robust) 특성을 가지게 되어, 유한 비선형 시스템(Bounded Nonlinear Systems) 제어 문제에 많이 적용된다[8]. 그러나 그 장점에 비해 리칭 페이즈(Reaching Phase)와 채터링(Chattering) 문제의 큰 두 가지 단점을 가지고 있다[4-7]. 리칭 페이즈는 시스템이 초기 상태에서 슬라이딩 면(Sliding Surface)에 다다를 때까지 이며, 이 영역에서는 슬라이딩 모드가 일어나지 않고 뱅-뱅 제어나 상태 제환이 되므로 외란에 대해 강인성(Robustness)을 보장받을 수 없다. 이와 같은 단점을 보완하기 위하여 리칭 시간을 줄이는 방법과 시변 슬라이딩 면을 기지는 방법이 지금까지 사용되고 있다[3][4]. 전자는 고이득 제환을 사용하며 이로 인하여 액츄에이터가 포화(Actuator Satur-

tion) 되는 단점이 있으며, 후자는 슬라이딩 면의 계수를 적응적으로 변화시키며 세부적으로는 변화된 슬라이딩 면을 리칭하는 현상이 여전히 존재한다[4]. 이와같은 문제는 비선형 슬라이딩 면을 사용하여 간단히 해결하였다[1].

또한 현실적으로 유한 시간의 스위칭 소자를 가지며, 불연속 제어입력은 시스템의 매개변수와 외란의 한계값을 이용하여 설계하므로 상태 제적이 슬라이딩 면 위에서 상하로 급격히 변화하는 채터링 현상이 생긴다. 이와같은 현상은 수학적인 모델에 포함이 안된 고주파수 동특성에 영향을 주게 된다[7]. 따라서 채터링 저감을 위한 방법으로 제어 입력 전체를 불연속 함수로 하는 것보다 연속함(등가 입력, 상태 제환)을 포함시키는 방법과 불연속 항 대신에 포화 함수(Saturation Function)를 사용하는 방법이 있다[3]. 또한 입력 이득을 슬라이딩 모드 존재 조건을 만족하는 범위에서 뿔수 있으면 작은 값으로 선택한다. 이 경우 외란에 대한 응답 특성이 느리게된다. 포화 함수를 사용할 경우는 부분적으로 슬라이딩 모드를 만족 시키지 못하는 경우가 발생할 우려가 있다. 연속함을 사용하는 경우는 시스템의 변수나 외란을 정확히 알 수 없는 경우에 슬라이딩 조건을 만족하도록 해석적으로 등가입력을 구할 수 없다는 문제가 있다.

본 연구에서는 레귤레이터 문제에 대하여 기술한다. 기지의 초기상태를 이용하는 비선형 슬라이딩 면을 선택하였으며, 제어입력을 등가 입력과 무한 페루프(Infinit

Closed Loop)를 이용하여 구하였으며 이로 인하여 VSS에 있어서 리칭 페이스와 채터링 문제를 보상하였다.

2. 슬라이딩 모드 제어

1) 기본적 이론

다음과 같은 정규 제어가능(Canonical Controllable) SISO 시스템을 생각한다.

$$\dot{x} = Ax + Bu + BH \quad (1)$$

$$x_o = x(t_o)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h \end{bmatrix}$$

여기서, $x \in R^n$, u 는 제어 입력이며 $u: R^n \rightarrow R$ A, B 는 상수 행렬이며 비선형 Generalized 불확실 항 H 는 유한 스무드 외란으로 정합 조건(Matching Condition)을 만족한다. 위 제어가능 시스템 (1)에 대하여 가변구조 제어는 원하는 동특성을 갖는 슬라이딩 면(Sliding Surface)인 $s(x): R^n \rightarrow R$ 의 부호에 따라 다음과 같은 불연속 제어 입력을 인가 하게 된다[5].

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{for } s(x) > 0 \\ u^- & \text{for } s(x) < 0 \end{cases} \quad (2)$$

제어 입력 (2)가 무한대 주파수로 스위칭하게 되면 $s(x)$ 의 값은 영이 되는 상태가 생기며 이 때를 슬라이딩 모드(Sliding Mode)라 한다. 이때 시스템의 동특성은 슬라이딩 면에 고착되어 외란에 강인한 특성을 갖는다[5][6]. 그때 $s(x)$ 의 미분 또한 영이되어 식 (1)를 이용하여 식 (2)의 평균치의 의미인 동가 입력 u_{eq} 을 얻을 수 있다[6][7]. 즉

$$\begin{aligned} \dot{s}(x) &= 0 \\ &= \frac{\partial s(x)}{\partial x}(Ax + Bu_{eq} + BH) \\ u_{eq} &= -\left[\frac{\partial s(x)}{\partial x_n}b\right]^{-1}\left(\frac{\partial s(x)}{\partial x}(Ax + BH)\right) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, 모든 x_n 에 대하여 $\left(\frac{\partial s(x)}{\partial x_n}\right) = c_n \neq 0$. 슬라이딩

모드가 일어나기 위한 충분 조건은

$$\lim_{s(x) \rightarrow 0} s(x)\dot{s}(x) < 0 \quad (4)$$

이며[6] 제어 입력 (2) 선택 시에 적용된다.

2) 비선형 슬라이딩 면

리칭 페이스가 존재하는 이유는 시스템의 초기상태가 항상 슬라이딩 면 위에 존재하지 않기 때문이다. 간단한 비선형 슬라이딩 면을 사용하여 리칭 페이스를 제거하여 초기 상태부터 슬라이딩 모드가 생기게 하기 위하여서는 시스템의 초기 상태를 알고 있다는 가정이 필연적이며 시스템 (1)의 초기치는 다음과 같다.

$$x_o^T = [x_1(t_o), 0, \cdots, 0]. \quad (5)$$

비선형 슬라이딩 면을 다음과 같이 선정하자[1][2].

$$s(x) = s_L(x) + s_{NL}(x) \quad (6)$$

여기서 $s_L(x)$ 는 기존의 선형 슬라이딩면이며, $s_L(x) = cx$, $c_n = 1$. $s_{NL}(x)$ 는 $x=0$ 에서 영인 연속 비선형 항 $s_{NL}(0) = 0$ 이며 x_i ($i=1, \cdots, n-1$)의 함수로 구성한다[1][2].

슬라이딩 존재 조건을 만족하는 제어 입력에 의하여 상태 공간(State Space)의 한 위치에서 슬라이딩 모드가 존재하기 위해서는 그 위치에서 슬라이딩 면의 값이 영이어야 한다. 따라서 시스템의 초기 상태에서 슬라이딩 모드가 생기려면 초기상태의 $s(x)$ 값이 영이어야 한다. 식 (4)과 식 (5)에서

$$\begin{aligned} s(x_o) &= 0 \\ s_L(x_o) &= -s_{NL}(x_o) \end{aligned} \quad (7)$$

$s_{NL}(x)$ 는 위 조건을 만족하면서 원하는 성능을 충족할 수 있는 함수로 선택한다[1]. 또 시스템 (1)에 대한 슬라이딩 면 (6)이 원하는 동특성을 갖도록 설계 할때 그 동특성이 안정성을 만족하게 설계 하여야 한다.

2 차 시스템을 예를 들면,

$$\text{초기 조건 : } x_o = [x_1(t_o), 0] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{선형 면 : } s_L(x) &= c_1x_1 + x_2, \\ c_1 &> 0 \end{aligned} \quad (9-i)$$

$$\text{비선형 면 : } s_{NL}(x) = -\frac{c_1}{x_1(t_o)^2} x_1^3 \quad (9-ii)$$

$$\text{슬라이딩 면 : } s(x) = s_L(x) + s_{NL}(x) \quad (9-iii)$$

이며 이와같은 슬라이딩 면은 그림 1 과 같다.

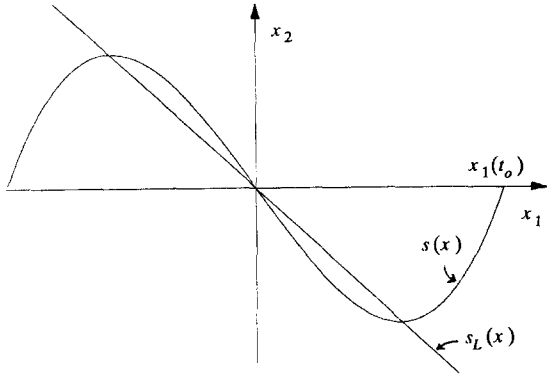


그림 1. Comparison of linear and nonlinear surfaces

3) 보상과 제어 입력

본 연구의 두번째 목적은 시스템의 불확실성(Uncertainty)나 외란의 한계값(Bound)에 의하여 불연속 제어 입력에 의한 채터링 저감에 있다. 그 방법으로는 기존의 로보트 제어에 많이 이용하는 무한 페루프를 사용하여 불확실성과 외란을 예측하여 보상하고 등가입력과 슬라이딩 면의 값을 제환하여 연속에 가까운 제어 입력으로 사용한다. 제어 입력을 다음과 같이 구성한다.

$$u = u_{eq} + u_{comp}(\hat{H}) + \Psi(s(x)) \quad (10)$$

여기서, $u_{comp}(\hat{H})$ 는 시스템 (1)에서 외란 H 의 보상항 이며 보상 방법은 다음과 같다. 시스템 (1)에서 상태변수의 미분을 알 수 있다는 가정을 필요로 하며 \hat{H} 는

$$B\hat{H} = \dot{x} - (Ax + Bu) \quad (11)$$

이용하여 구한다. 디지털 제어를 할 경우 One Sampling Time에 해당하는 Delay가 생기므로 이에 따른 보상 오차 ($\Delta\hat{H}$)는 $(H - \hat{H})$ 이다. 이 오차에 의하여 슬라이딩 면에서 오차가 유지되므로, 보정으로 새 번째 항이 필요하다.

$$\Psi(s(x)) = \psi_1 s(x) + \psi_2 \text{sign}(s(x)) \quad (12)$$

$$\psi_1 > 0, \quad \psi_2 = \text{sup}(|\Delta\hat{H}|)$$

슬라이딩 면의 값을 영으로 하는 것이 슬라이딩 모드 제어의 목적이므로 슬라이딩 면의 값 자체가 오차의 의미를 갖고 있으므로 오차 출력을 제환하는 의미이며 또 보상항 $u_{comp}(\hat{H})$ 의 오차를 보정하게 된다. 따라서 u_{eq} 는 식 (1)에서 외란이 보상된 슬라이딩 모드에 대한 등가 입력이며 제안된 제어입력 식 (11)은 슬라이딩 모드 존재 조건 식

(4)을 만족 한다. 증명하면

$$\begin{aligned} \dot{s}(x) &= \frac{\partial s(x)}{\partial x}(Ax + Bu + BH) \\ &= \frac{\partial s(x)}{\partial x}(Ax - Bu_{eq} - B\Psi(s(x)) - B\hat{H} + BH) \\ &= -b[\psi_1 s(x) + \psi_2 \text{sign}(s(x)) + (\hat{H} - H)] \end{aligned}$$

$$s\dot{s}(x) = -b[\psi_1 s^2(x) + \psi_2 |s(x)| + (\hat{H} - H)s(x)] < 0.$$

제안된 제어 시스템의 블록 다이어그램은 그림 2 와 같다.

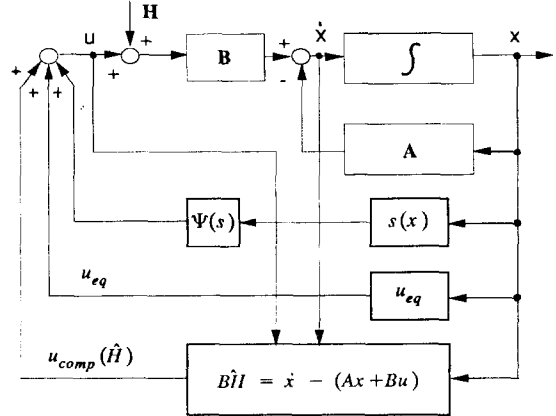


그림 2. Control structure of the proposed scheme

3. 적용 예제

직류 모터를 예를 들어 연구된 가변 구조 제어를 적용해보자.

$$\text{Dynamic Equation : } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = ax_2 + bu + h \end{cases} \quad (13)$$

$$a = -0.31, \quad b = 20, \quad h = -60\sin(20t)$$

여기서, x_1 은 모터의 위치 오차 [rad]이며 x_2 는 그의 미분 값 [rad/sec]이며 u 는 제어 입력으로 전류 [A]를 나타내고 h 는 외란이다. 위 시스템에 대하여 초기조건을 식 (8)로, 선형과 제안된 슬라이딩 면을 각각 식 (9-i)와 식 (9-iii)로 선정하고 다음의 두 가지 제어 입력에 대하여 시뮬레이션해 보자.

$$\text{제어 입력 : } u_1 = (k_1|x_1| + k_2|x_2| + k_3)\text{sign}(s(x)) \quad (14)$$

$$u_2 = u_{eq} + u_{comp}(\hat{H}) + \Psi(s(x)) \quad (15)$$

여기서,

$$u_{eq} = -b^{-1}(c_1 + a - 3c_1x_1^2/(x_1(t_0)^2))x_2$$

$$u_{comp}(\hat{h}) = -b^{-1}(x_2 - (ax_2 + bu))$$

$$\Psi_S(x) = -(\psi_1 s(x) + \psi_2 \text{sign}(s(x)))$$

이때 선형 슬라이딩 면 (9-i)에 대하여 슬라이딩 존재 조건을 만족시키는 u_1 의 이득의 조건은

$$k_1 > 0, k_2 > \sup\left(\frac{c_1+a}{b}\right), k_3 > \sup\left(\frac{h}{b}\right)$$

이고 비선형 슬라이딩 면 (9-iii)에 대하여 u_1 의 이득의 조건은

$$k_1 > 0, k_2 > \sup\left(\frac{c_1+a-3c_1x_1^2/x(t_0^2)}{b}\right), k_3 > \sup\left(\frac{h}{b}\right)$$

이다.

시뮬레이션의 결과를 보면, 그림 4는 선형 슬라이딩 면 (9-i)에 $c_1=3$ 에 대하여 제어 입력을 (14)의 이득을 $k_1=0.388, k_2=0.277, k_3=3.5$ 로 선정할 결과이며 제적에서 리칭 페이지를 볼 수가 있다. 그림 5는 비선형 면 (9-iii)에 $c_1=8$ 로 잡고 이득을 $k_1=0.776, k_2=0.385, k_3=3.5$ 로 선정할 제어 입력 (14)에 대한 결과이다. 그림에서 초기에 x_2 가 영이므로 Speed Boost-up 시킬 필요가 있지만 리칭 페이지는 개선이 됨을 볼 수가 있다. 그림 6에서는 그림 5에서와 같이 비선형 면 (9-iii)에 대하여 이득 $\psi_1=25, \psi_2=0.01$ 의 제안된 제어 입력 (15)에 대한 결과이다. 여기서는 비선형 면에 의하여 리칭 페이지가, 제안된 제어 입력에 의하여 채터링이 보상되었다. 그림 3은 세가지 경우의 시뮬레이션 시에 인가된 외란이다.

4. 결론

가변구조 제어의 두 가지 큰 단점인 리칭 페이지와 채터링에 대하여 다루었다. 비선형 슬라이딩 면을 사용하여 리칭 페이지의 단점을 제거하였으며, 이로 인하여 전 제적에 대한 강인성이 보장 되었다. 또한 무한 페루프를 사용한 보상항을 포함한 슬라이딩 모드 제어 입력으로 채터링을 현저히 감소시켰다.

참 고 문 헌

[1] 이 정훈, 이 대식, 김 만고, 윤 명중, "새로운 슬라이딩 라인을 갖는 가변 구조 제어를 이용한 직류 모터의 위치제어," 제 11 회 대한전기학회 전력전자 연구회 학술연구 발표회 논문집, 1990년 4월 9일, pp.11-14.

[2] D. S. Lee and M. J. Youn, "Controller Design of Variable Structure Systems with Nonlinear Sliding Surface," *IEE Electronics Letters*, 7th December vol.25, no.25, pp.1715-1716 1989.

[3] H. Hashimoto, et.al., "A Microprocessor-Based Robot Manipulator Control With Sliding Mode," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol.34, no.1, pp.11-18, 1987.

[4] J. J. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking Control of Non-linear Systems Using Sliding surfaces, with Application to Robot Manipulators," *INT. J. Control*, vol.38, no.2, pp.465-495, 1983.

[5] U. Itkis, *Control Systems of Variable Structure*. New York: Wiley, 1976.

[6] V. I. Utkin, "Variable Structure Systems with Sliding Modes," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-22, no.2, pp.212-222, 1977.

[7] R. A. Decarlo et. al., "Variable Structure Control of Nonlinear Multivariable Systems: A Tutorial," *Proc. of IEEE*, vol.76 no.3, 212-232, 1988.

[8] H. Sira-Ramirez, "Nonlinear Variable Structure Systems in Sliding Modes: The General Case," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-34, no.11, pp.1186-1188, 1989.

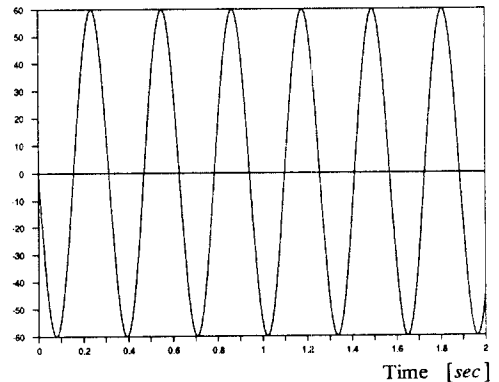


그림 3. Disturbances $h=-60\sin(20t)$

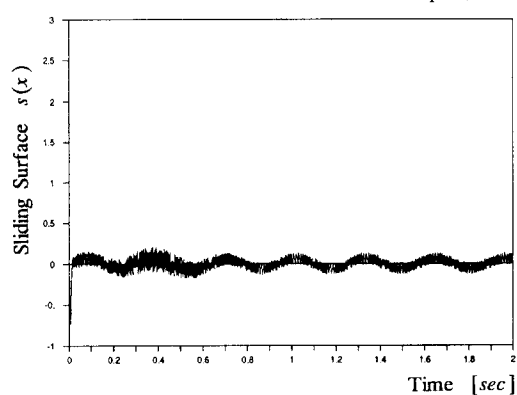
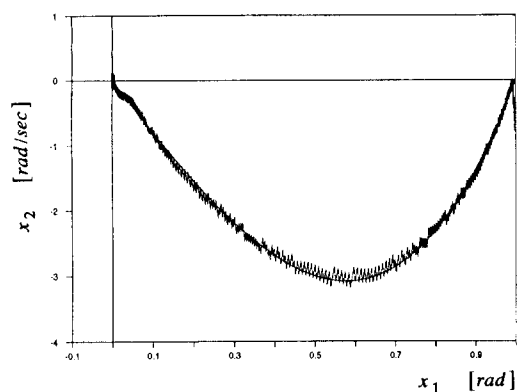
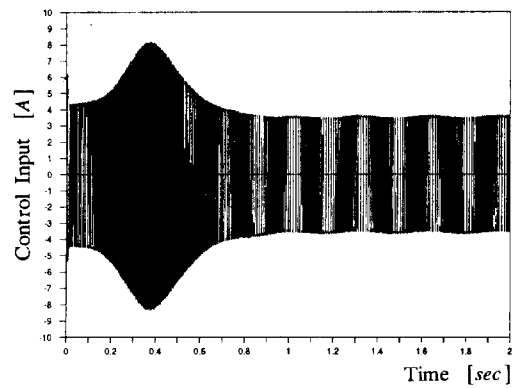
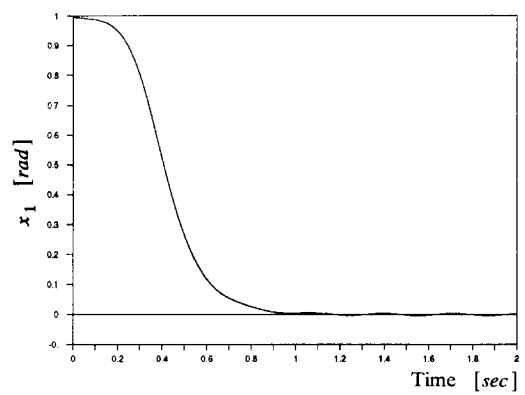
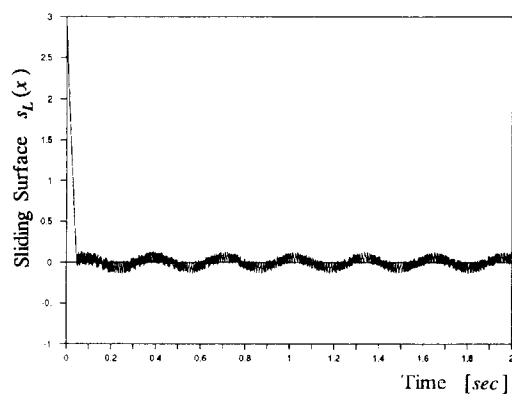
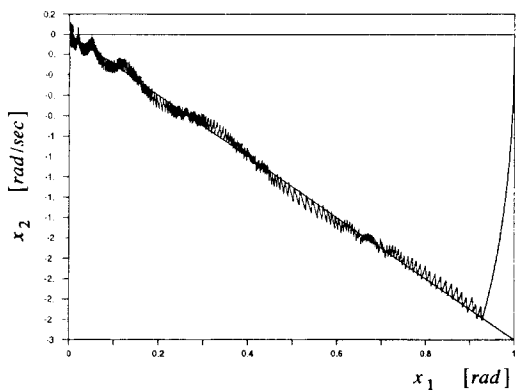
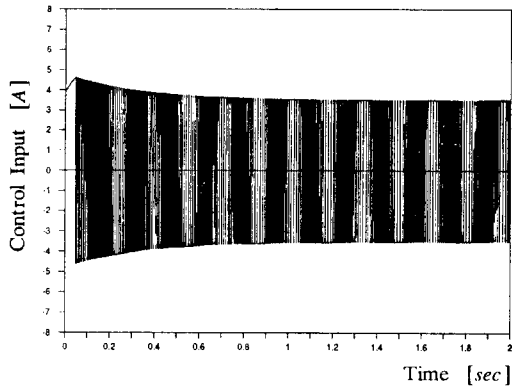
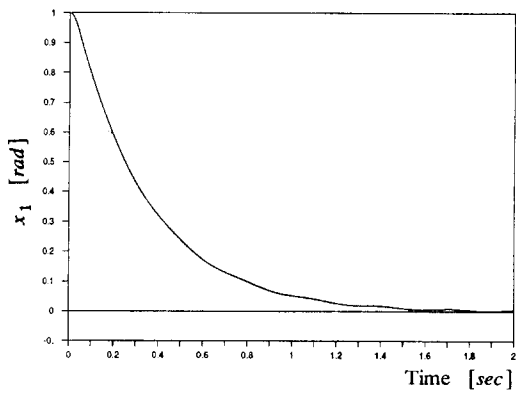


그림 4. The case of linear surface with control (14)

그림 5. The case of nonlinear surface with control (14)

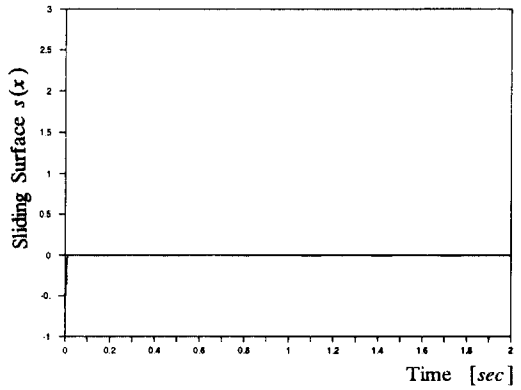
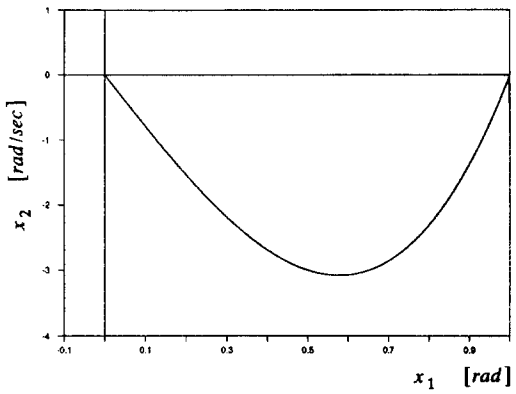
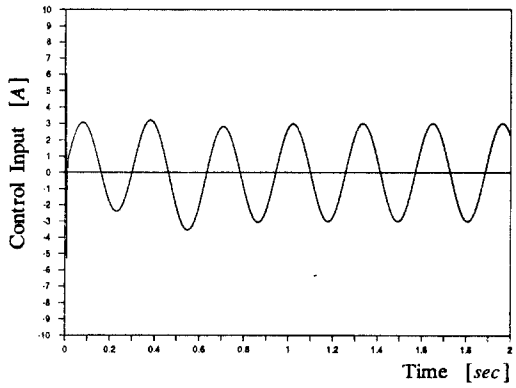
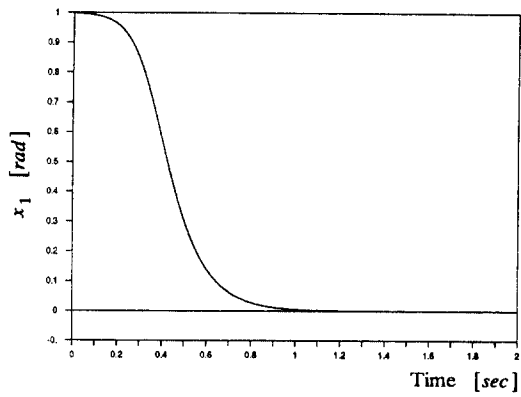


그림 6. The case of nonlinear surface with control (15)