'90 韓國自動制御學術會議論文集 1990. 10.26~27

블럭펄스 함수에 의한 선형 디지탈 시스템의 모델 축소에 관한 연구

安斗守[*] · 李 勝[*o] · 蔡永茂[**]

[*] 成均館大學校 大學院 電氣工學科

[**] 忠州工業專門大學 制御計測科

A Study on Model Reduction of Linear Digital Systems via Block Pulse Functions

Doo-Soo Ahn[*] · Seung Lee[*o] · Young-Moo Chae[**]

[*] Dept. of Electric Eng. Sung Kyun Kwan Univ.

[**] Dept. of Control & Instrumentation. Chung Ju JR.Collage

ABSTRACT

A method of model reduction for reducing a higher order Z-transfer function to its lower order model is developed based on the Block - pulse function. The approach is following : I. Block - pulse function can be applied for Z-transfer function of linear digital system described by high order. II. To determined both the coefficients of the denominator and numerator of reduced model. The proposed method is simple for computation, can preserve the dynamic characteristic of the original model satisfactorily.

I. 서 론

제어계를 해석하고 설계할때 모델의 차수가 적을수록 취급하기가 편리하므로 고차계로 표현되는 모델을 저차계로 바꾸는것이 요구된다.[1]

이와같은 연구로는 Y.Shamash의 Pade근사법[2], Y.P.Shih 와 W.T.Wu 의 연분수에 의한 방법[3], Bosely 와 Lees 그리고 Hickens 와 Shina 의 마르코프 파라메터를 이용한 모델 축소법[4], Horng 과 Chou 의 Walsh 함수를 이용한 방법[5], 등이 있다.

본 연구에서는 Z-변환 함수에 의해 표현된 선형 디지탈 시스템의 차수를 블럭펄스 함수를 이용하여 축소하는 방법을 제시하고자 하였다. 접근 방식은 고차계로 표현되는 선형 디지탈 시스템의 Z-변환 전달함수에 블럭펄스 함수를 적용하여 축소된 모델의 분모와 분자의 계수를 결정하여 보다 간단한 처리에 의해 저차계의 모델을 얻을수 있도록 하였다.

본 연구의 목적은 모델을 축소할때 계산의 간단화이며, 또한 축소된 모델의 동적특성이 원래 모델의 동적특성을 보존하여 원래 시스템과 같은 ZERO 초기응답을 보장하게 한는데 있으며 적용예를 통하여 만족한 결과를 얻을수 있었다.

II. 블럭펄스 함수

블럭펄스 함수 $\phi_i(k)$는 $k \in [0,1)$ 인 정의구간에서 다음과 같이 정의된다.[6]

$$\phi_i(k) = \begin{cases} 1 & (i-1)/m \le k \le i/m \\ 0 & \text{그외 구간} \end{cases} \quad (1)$$

적분 가능한 임의의 함수 $f(k)$를 블럭펄스 함수의 급수로 근사화 하면 다음과 같이 전개된다.

$$f(k) \simeq \sum_{i=0}^{N-1} f_i \phi_i(k) \quad (2)$$

여기서 계수 f_i는 summation square error ε를 최소화 하기위해 다음과 같이 결정된다.

$$\varepsilon = \sum_{k=0}^{N-1} [\ f(k) - \sum_{k=0}^{N-1} f_i\Phi_i(k)\ ]^2 \tag{3}$$

$$f_i = \frac{1}{N}\ f(k)\Phi_i(k) \qquad i = 0,1,2,\cdots\cdots,N-1 \tag{4}$$

III. Shifted 변환 행렬

기저벡터 $\Phi(k+j)$ 가 Nonsingular transformation 을 통하여 $\Phi(k)$에 대해 표현하면

$$\Phi(k+j) = T^j\Phi(k)\quad , \qquad j = 0,1,2,\cdots\cdots \tag{5}$$

여기서 T를 Shifted transformation matrix 라고 부르며 T의 각 요소들은 다음에 의해 얻어진다.

$$\Phi_j(k+1) = \sum_{j=0}^{N-1} t_{ij}\Phi_j(k)\ , \quad i = 0,1,2,\cdots\cdots \tag{6}$$

여기서 t_{ij}는 T 행렬의 i+1 행과 j+1열 요소이며 t_{ij}는 다음과 같다.

$$t_{ij} = \frac{1}{N}\ [\ \sum_{k=0}^{N-1} \Phi_i(k+1)\Phi_j(k)\ ]\ , \quad i,j = 0,1,2,\cdots\cdots \tag{7}$$

T행렬의 일반형은

$$T_{(m\times n)} = \left[\begin{array}{c|c} O_{(n\times(m-n))} & I_{(n\times n)} \\ \hline I_{((m-n)\times(m-m))} & O_{((m-n)\times n)} \end{array}\right] \tag{8}$$

이며

$$T_{(4\times4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

이다.

IV. 블럭펄스 함수에 의한 모델 축소

선형 디지탈 시스템인 Z-변환 함수가 다음과 같을때

$$H(z) = \frac{C(z)}{U(z)} = \frac{b_{n-1}Z^{n-1}+b_{n-2}Z^{n-2}+\cdots+b_1Z+b_0}{Z^n+a_{n-1}Z^{n-1}+\cdots+a_1Z+a_0} \tag{9}$$

여기서 C(z)과 U(z)는 입출력데이타 시이퀀스의 z-transform 이다.

식(9)를 차등 방정식으로 기술하면

$$C(k+n) = \sum_{i=0}^{n-1} a_iC(k+i) + \sum_{i=0}^{n-1} b_iU(k+i) \tag{10}$$

이때 초기조건은 C(0) = 0 이다.

C(k)와 U(k)는 근사치로 표현된다. 이것에 블럭펄스 함수를 적용하면

$$C(k) = [\ C_0,\ C_1,\ \cdots\cdots,\ C_{N-1}\ ]\ \Phi(k) \cong C^T\Phi(k) \tag{11}$$

$$U(k) = [\ U_0,\ U_1,\ \cdots\cdots,\ U_{N-1}\ ]\ \Phi(k) \cong U^T\Phi(k) \tag{12}$$

식(11)과 (12)를 식(10)에 대입하고 식(5)에 적용하면

$$C^TT^n\Phi(k) = \sum_{i=0}^{n-1} a_iC^TT^i\Phi(k) + \sum_{i=0}^{n-1} b_iU^TT^i\Phi(k) \tag{13}$$

이 된다.

블럭펄스 함수는 선형독립이므로, $\Phi(k)$의 계수들의 표현은

$$C^TT^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_iC^TT^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_iU^TT^i \tag{14}$$

이 된다.

a_i와 b_i의 값은 주어지며, 이것은 N차 선형 대수 방정식이며 블럭펄스 함수 계수 C의 계산에 사용된다.

축소된 모델의 변환함수가 m차라고 가정할때 , m < n

$$H^+(z) = \frac{C^+(z)}{U(z)} = \frac{b_{m-1}^+Z^{m-1}+b_{m-2}^+Z^{m-2}+\cdots+b_1^+Z+b_0^+}{Z^m+a_{m-1}^+Z^{m-1}+\cdots+a_1^+Z+a_0^+} \tag{15}$$

여기서 $C^+(z)$는 축소된 모델의 출력 시이퀀스 $C^+(k)$ 의 z-transform 이다.

식(15)의 차분 방정식은 다음과 같다.

$$C^+(k+n) = -\sum_{i=0}^{m-1} a_i^+C^+(k+i) + \sum_{i=0}^{m-1} b_i^+U^+(k+i) \tag{16}$$

초기조건은 $C^+(0) = 0$ 이다.

$C^+(k)$의 블럭펄스 전개식은

$$C^+(k) = [\ C_0^+, C_1^+,\ \cdots, C_{N-1}^+\ ]\Phi(k) \cong C^{+T}\Phi(k) \tag{17}$$

여기서 계수 C_i^+는 식(4)에서와 같은 방법으로 계산할 수 있다. 식(5),(12)와 식(17)를 식(16)에 대입하면

$$C^{+T}T^m = -\sum_{i=0}^{m-1} a_i^+C^{+T}T^i + \sum_{i=0}^{m-1} b_i^+U^TT^i \tag{18}$$

이 되며 결국 식(18)의 C^+를 C로 대체할수 있다.

$$C^T T^m = -\sum_{i=0}^{m-1} a_i^+ C^T T^i + \sum_{i=0}^{m-1} b_i^+ U^T T^i \quad (19)$$

C는 식(14)에서 계산되며 U는 주어진 값이므로 식(19)는 축소된 모델의 a_i^+와 b_i^+의 파라메타 추정에 이용된다.

식(19)의 간결한 형태는

$$(T^m)^T C = QP \quad (20)$$

여기서

$$P = [-a_0^+, -a_1^+, \cdots, -a_{m-1}^+, b_0^+, b_1^+, \cdots, b_{m-1}^+]^T \quad (21)$$

$$Q = [\ C, T^T C, \cdots, (T^{m-1})^T C, U, T^T U, \cdots, (T^{m-1})^T U] \quad (22)$$

이다.

따라서 다음의 평가함수

$$J = [(T^m)^T C - QP]^T [(T^m)^T C - QP\ ] \quad (23)$$

를 최소화하는 벡터 P를 구해야 한다.

P의 최소자승오차는

$$P = (Q^T Q)^{-1} Q^T (T^m)^T C \quad (24)$$

가 되고 P가 구해지면 축소모델의 전달함수가 구해진다.

V. 적용예

다음과 같은 8차 Z-변환 함수를 고려해보면

$$\begin{aligned} H(z) = (&0.42z^7 + 0.279z^6 - 0.0525z^5 + 0.038z^4 \\ &- 0.129z^3 - 0.0655z^2 + 0.011z - 0.0015) \\ &/ (z^8 - 0.42z^7 - 0.279z^6 + 0.0525z^5 - 0.038z^4 \\ &+ 0.129z^3 + 0.0655z^2 - 0.011z + 0.0015) \quad (25) \end{aligned}$$

입력 데이타 시이퀀스를 $U(k) = 1$ 로 선택하면 출력 데이타 시이퀀스는 C(k)의 블럭펄스 벡터는 식(25)의 파라메타 a_i, b_i를 이용하여 식(14)로 부터 얻어진다.

N = 32 에 대한 식(24)로 계산된 2차계 모델은

$$H^*(z) = (0.42z - 0.29147) / (z^2 - 1.53421z + 0.67593) \quad (26)$$

이 된다.

VI. 결론

본 논문에서는 블럭펄스 함수를 사용하여 z-전달함수로 표현되는 선형 디지탈 시스템의 모델축소방법을 제시하였다. 이 방법은 축소된 모델이 원래 시스템의 동적 특성을 만족하며 고차계의 모델을 축소할 때 계산을 간단히 할수 있다. 또한 축소된 모델은 원래 시스템과 같은 zero 초기응답을 갖는다. 따라서 고차계의 시스템을 해석, 설계할 때 매우 유용하게 이용될수 있을 것이라 사료된다.

앞으로의 연구과제로는 본 논문에서는 단일입출력(SISO) 시스템을 다루었으나 다입출력(MIMO) 시스템으로의 확장이 요구된다.

REFERENCE

1. 안두수, 채영무, 이재춘,"월쉬 함수에 의한 모델 간단화" , 성균관대학교 논문집 과학기술편, 제37권 No.2, 1986.
2. Y. Shamash , "Linear system reduction using Pade approximations to allow retention of diminants mode " , Int.J.Control, Vol 21, pp 257-272, 1975.
3. Y.P. Shih, W.T. Wu, " Simplification of z-transfer functions by continued fractions ",Int.J.Control,Vol. 17, No.5, pp 1089-1094, 1973.
4. Naresh K.Shinha, " Minimal realization of transfer function matrices : A comparative study of different method ", Int.J.Control,Vol 22,No.5,pp 627-639, 1975.
5. I.R.Horng, J.H.Chou, T.W.Yang, " Model reduction of digital systems using discrete walsh series ", IEEE. Trans., Vol AC-31, No.10, pp 962-964, 1986.
6. W.L. Chen, C.S. Hsu, " Convergence of the Block pulse series solution of a linear time-varying system " , Int.J.Syst SCI., No.1.15, No.4, pp 351-360, 1984.