

# 가변 구조 제어(VSS)를 적용한 도립진자 제어기의 실현

윤 관 수

허 욱 일

인하대학교 공과대학 전기공학과

## Realization of a VSS control for Inverted Pendelum

Kwan-Soo Yun

Uk-Youl Huh

Dept. of Electrical Eng., Inha Univ.

### ABSTRACT

In this paper, an Inverted Pendelum is made and its state equation is formulated. Inverted Pendelum position and stabilization control is performed by variable structure system.

Because conventional linear controller has difficulty in controlling inverted pendelum by precise method, VSS controller is chosen as a model to stabilize the Pendelum at the unstable equilibrium point.

In the experiment, the controller is implemented with the PC and it can stabilize the Inverted Pendelum.

### 1. 서론

진자(Pendulum)에는 안정 평형점과 불안정 평형점의 두가지 평형점이 있다. 도립진자의 안정화 제어란 진자가 원래의 도립된 위치 즉 불안정 평형점에 강제로 계속 머물도록 제어하는 것이다. 도립진자는 불안정한 기계장치의 가장 대표적인 예로서 로케트의 발사하는데 있어 발사대를 안정화시키기 위한 장치로 연구되어 오다가 로봇의 팔과 상사인 형태로 생각되어짐에 따라 많은 연구가 이루어졌다.

Schefer 와 Cannon(1966)은 뱅-뱅 형태의 제어를 사용하여 도립상태에있는 뱅딩 빔(bending beam)을 안정화 하기 위해 제어계를 설계하였다. 그후 Furuta는 처음에는 1차 도립진자를 뱅-뱅 제어(1) 2차 도립진자를 비선형 관측자를 사용하여 최적 레귤레이터 제어를(2) 하였고 3차 도립진자는 후자의 제어방법을 이용하여 제어를(3) 하였다.

이 논문에서는 로봇과 직 교류 서어보 전동기 제어 분야에서 많이 이용되고 있는 가변 구조 제어(Variable Structure System, VSS)를 도입하였다. 가변구조제어는 슬라이딩 모드 제어 시스템(Sliding Mode Control System) 이라고도 불리며 뱅-뱅 모드에서 발전된 제어이론으로 소련에서 1950년경 처음 시작하여, Emelyanov, Itkis(4) 그리고 Utkin(5)(6) 등 소련의 학자에 의해 연구되어 오다가 근래에 들어 서방에 소개되었는데 시스템의 구조를 미리정한 알고리즘 또는 구조적인 법칙에 따라 변경시켜 스위칭 라인을 강제로 바꾸므로

1. 응답이 빠르고 오버 슈팅이 없다.
2. 정상상태 오차가 없다.
3. 어떤 환경에서도 불변인 궤적(trajjectory)을 유지하고 마지막으로 슬라이딩 운동(Sliding Motion)에 의한 파라미터 변동이나 외란이 있는 궤환계의 안정도에 대한 강한 강인성(Robustness)을 갖는다.
4. 파라미터의 정확한 값을 알지 않아도 된다.
5. 파라미터 변동이나 외란에 매우 둔감하다.

본 논문에서는 도립진자의 수학적인 모델링을 구성하여 운동방정식을 세웠고 실제 도립진자를 설계 제작하였으며 가변 구조 제어를 적용시켜 도립진자의 안정화 제어를 하였다.

### 2. 도립진자의 운동방정식

진자계에 있어서 대차와 진자는 마찰이 거의 없는 것으로 가정하여 운동방정식을 세웠다.

#### 2.1 대차의 운동방정식

대차에 대한 운동방정식은 그림-1로부터 다음과 같이 정의할 수 있다.

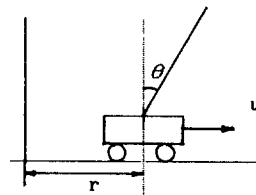


그림 1. 대차부

$$M \cdot \frac{d^2}{dt^2} r = u - h \quad (2-1)$$

여기서 변수는 아래와 같다.

- M : 대차의 질량 (kg)
- r : 대차의 변위 (m)
- u : 모터의 입력 전압
- H : 진자에 의해 대차에 가해지는 힘의 수평성분

#### 2.2 진자의 운동방정식

진자의 운동방정식은 그림-2에 의해 구성될 수 있다. 진자의 관성 모멘트는 수직력과 수평력으로 나누어 해석한다.

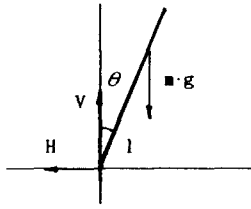


그림 2. 진자부

$$J \cdot \ddot{\theta} = V \cdot l \cdot \sin\theta - H \cdot l \cdot \cos\theta \quad (2-2)$$

$$M \cdot \frac{d^2}{dt^2}(r + l \cdot \sin\theta) = H \quad (2-3)$$

$$M \cdot \frac{d^2}{dt^2}(l \cdot \cos\theta) = V - m \cdot g \quad (2-4)$$

여기서 변수는 다음과 같이 정의한다.

- J : 진자의 무게 중심이 갖는 회전관성
- $\theta$  : 진자의 연직선에 대한 각도
- V : 진자에 의해 진자에 가해지는 힘의 수직성분
- l : 축에서 진자의 무게 중심까지의 거리
- H : 대차에 의해 진자에 가해지는 힘의 수직성분
- m : 진자의 질량
- g : 중력 가속도

### 3. 진자의 상태방정식

수직의 불안정 평형점에서 진자의 미소 구간에서의 진자의 운동으로 제한하면 테일러 시리즈로 전개하여 선형화 한다. (2-1), (2-2), (2-3), (2-4)식을 정리하면 아래 (3-1), (3-2), (3-3)식은 진자의 운동방정식에서 구할수있다.

$$J \cdot \ddot{\theta} = V \cdot l \cdot \theta - H \cdot l \cdot \theta \quad (3-1)$$

$$m \cdot \ddot{r} + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} = H \quad (3-2)$$

$$V = m \cdot g \quad (3-3)$$

(3-4)식은 대차의 운동방정식을 선형화 한 것이다.

$$M \cdot \ddot{r} = u - h \quad (3-4)$$

J는 독립진자의 중심질량에 대한 관성 모멘트이고여기서 J는 다음과같다.

$$J = \frac{m \cdot l^2}{3} \quad (3-5)$$

윗식을 정리하면 다음과 같다.

$$m \cdot l \cdot \ddot{\theta} + (M + m) \cdot \left(-\frac{4}{3} \cdot l \cdot \ddot{\theta} + g \cdot l\right) = u$$

$$\left\{m \cdot l - \frac{4}{3} \cdot l \cdot (M + m)\right\} \cdot \ddot{\theta} + (M + m) \cdot g \cdot l = u \quad (3-6)$$

(3-6)식 에서  $K_1, K_2$ 로 대체하면

$$K_1 = m \cdot l - \frac{4}{3} \cdot l \cdot (M + m) \quad (3-7)$$

$$K_2 = (M + m) \cdot g \quad (3-8)$$

여기서 (3-6)다시쓰면

$$K_1 \cdot \ddot{\theta} + K_2 = u \quad (3-9)$$

### 4. 가변 구조계의 구성

시스템의 전달함수는 다음과 같다.

$$g(s) = \frac{1}{K_1 \cdot S^2 + K_2} \quad (4-1)$$

여기서  $x_1 = a \cdot \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$  라 놓으면 시스템의 상태방정식은

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = u/K_1 - K_2/(a \cdot K_1) \cdot x_1 \end{cases} \quad (4-2)$$

스위칭 라인은  $\sigma = x_1 + c \cdot x_2$  이고  $c = 0.1$   $a = 40$  라고 놓자.

슬라이딩 모드가 일어나려면

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma \cdot \dot{\sigma} < 0 \text{ 를 만족해야한다.}$$

제어 입력  $u = -\psi_1 \cdot x_1 - \psi_2 \cdot x_2$  이다.

여기서 스위칭 박스  $\psi_1, \psi_2$ 는

$$\psi_1 = \begin{cases} \alpha_1 = -5 \\ \beta_1 = 5 \end{cases} \quad \psi_2 = \begin{cases} \alpha_2 = -5 \\ \beta_2 = 5 \end{cases} \quad \text{이다.} \quad (4-3)$$

파라미터 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M &= 0.3097 \quad [\text{Kg}] \\ m &= 0.0479 \quad [\text{Kg}] \\ l &= 0.336 \quad [\text{m}] \\ g &= 9.8 \quad [\text{m/sec}^2] \end{aligned}$$

계산하면  $K_1 = -0.46$ ,  $K_2 = 3.50$  이다.

가변구조 제어 블록 선도는 그림 3과 같다.

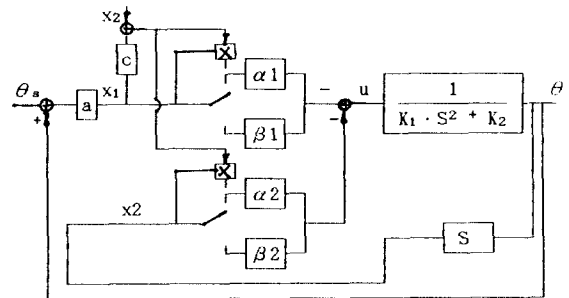


그림 3. 블록 선도

### 5. 독립진자계의 구성

#### 5.1 시스템 하드웨어

제어용 컴퓨터로는 IBM-PC(AT)를 사용하였고 대차는 10회전, 진자는 1회전의 포텐션미터를 사용하여 위치를 계측하였다. 모타 드라이버는 파워 FET를 사용하여 1 KHz의 펄스폭 변조(Pulse Width Modulation) 드라이버로 구성되어 있고 8비트 D/A 값에 의해 제어된다. 입력된 센서의 아나로그값은 12 비트 A/D 컨버터에 의해 컴퓨터로 들어온다. DC모터는 12V이고 감속기어를 사용하여 최대 286 rpm으로 회전한다.

대차에는 이동시 끝단에서의 안전을 위하여 리미트 센서를 부착하였다.

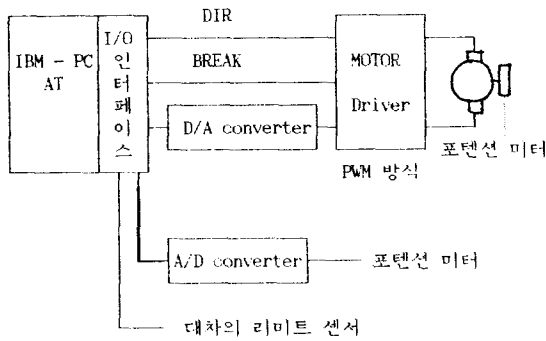


그림 4. 시스템 하드웨어

### 5.2 시스템 기계장치의 구성

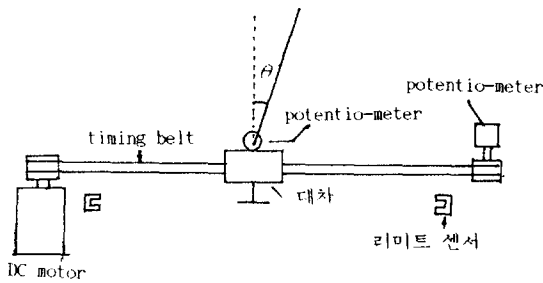


그림 5. 기계장치

대차는 슬라이딩 베어링을 사용하여 이동시 대차의 마찰이 거의 없고 타이밍 벨트를 사용하여 움직이게 하였다. 진자는 포텐션 미터측에 직접 접촉하여 마찰이 거의 없다.

### 6. 모의실험 결과

모의실험은 상태방정식 (4-2)식을 사용하여 실시하였다. 초기오차  $\theta = 1$ 로 넣었을 때에 시뮬레이션 결과  $x_1$ 과  $x_2$ 의 응답은 0으로 수렴하는 것을 그림 6에서 볼 수 있다. 이때 VSS 콘트롤러에 의해 결정된 제어입력  $u$ 는 스위칭이 발생하면서 0으로 수렴하는 것을 그림 7에 나타낸다.

이때 초기치 오차를 여러가지 바꾸어 넣었을 때의  $x_1$ 과  $x_2$ 로 표시하는 페이스 프레인(Phase Plane) 응답은 그림 8에서 볼 수 있다.

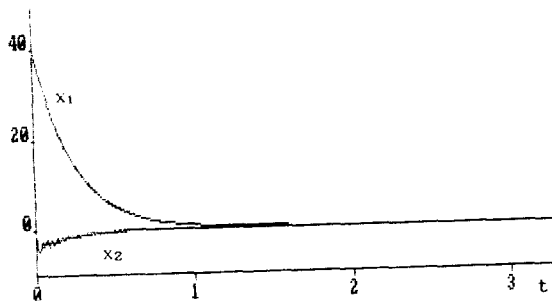


그림 6.  $x_1$ 과  $x_2$ 의 응답

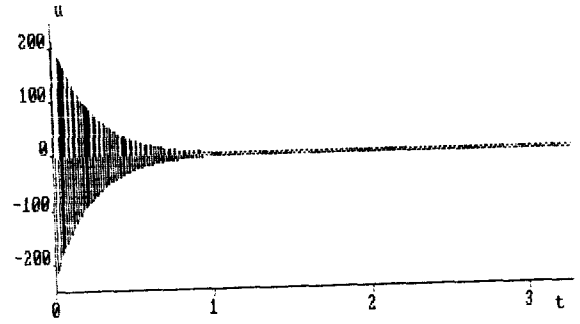


그림 7. 제어입력  $u$ 의 응답

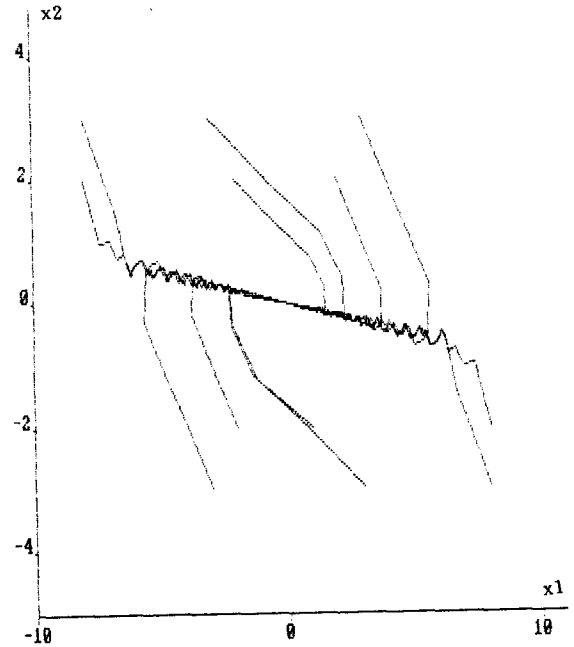


그림 8.  $x_1$ 과  $x_2$ 의 페이스 프레인

### 7. 실험결과

실험은 다음의 절차에 의해 이루어졌고, 진자의 속도는 경과시간 동안 움직인 각도에 의해 계산하였다. 제어 프로그램은 C언어를 사용하여 프로그래밍을 하였다.

제어 프로그램 절차는 그림 9와 같은 절차로 구성되어 있다.

실제 도입진자를 실험한 결과 진자의 각도 변위는 정상상태에 빨리 도달하였으나 모터의 특성상 정역회전이 완전하지 못하고 기아박스에서 발생하는 백래쉬 같은 기계적 오차와 A/D를 통한 각도의 측정 오차로 오우버슈우트가 발생하고 정상 상태에서 떨리는 현상은 스위칭 모드에서의 채터링에 의한 것임을 알았다.

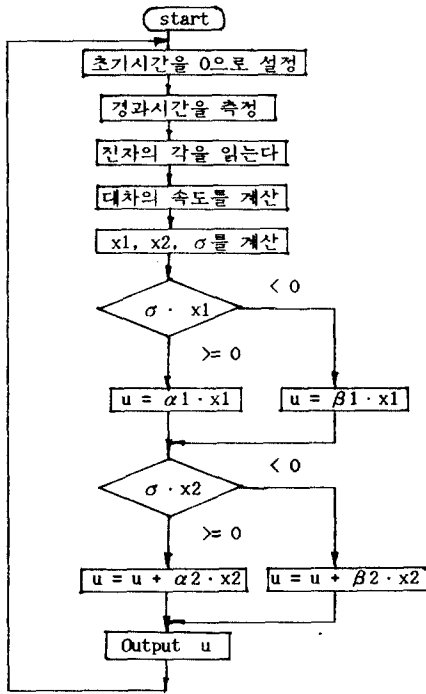


그림 9. 흐름도

진자의 실험 결과 각도의 움직임 궤적은 그림 10과 같다.

실험에서 진자는 사진 1의 위치에서 시작하여 프로그램 실행결과 사진 2를 거쳐 사진 3에서 도립의 안정된 상태에 이른다.

### 8. 결론

도립 진자를 안정화 제어를 하는 데는 도립진자의 파라미터 변동이나 외란의 영향이 크므로 슬라이딩 모드상에서 강인한 제어기로서 가변 구조 제어가 적합하다. 실험적으로 가변 구조 방식을 이용하여 비교적 정상상태의 안정성을 확인할 수 있었다. 앞으로 개선할 점은 각도에 대한 센서 측정오차를 줄이고 도립 상태에서의 체터링 현상을 없애기 위한 연구가 필요하다.

### 9. 참고 문헌

- 1) Shozo Mori, Hiroyoshi Nishimura and Katsuhisa Furuta, "Control of Unstable Mechanical System, Control of Pendulum," INT. J. CONTROL, Vol.23, No.5, 673 - 692, 1976.
- 2) Katsuhisa Furuta, Hiroyuki Kawaiwara and Kazuhiro Kosuge, "Digital Control of a Double Inverted Pendulum," INT. J. CONTROL, 1976, Vol.32, No.5, 907 - 924, 1980.
- 3) K. Furuta, t. Ochiai and N. Ono, "Attitude Control of a Triple Inverted Pendulum", INT, J. CONTROL, Vol.39, No.6, 1351 - 1365, 1984.
- 4) U. Itkis, Control of Variable Structure, John Wiley and Sons, 1976.
- 5) V. I. Utkin, "Variable Structure Systems With Sliding Modes," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC - 22, No.2, April 1977.
- 6) V. I. Utkin, "Variable Structure Systems: Present and Future," Automatic and Remote control, 44, 1105 - 1120, 1983.
- 7) Dc Motors, Speed Controls, Servo Systems, an Engineering Handbook Prepared by Electro-craft Corp, Third-Edition, Pergamon press, 1977.
- 8) N. N. Bengiamin, B. Kauffman, "Variable structure Position Control," IEEE Control System Magazine, 3 - 8, August, 1984.
- 9) 한문섭, 도립진자의 가변구조제어, 인하대 전기과 석사논문 1989.2
- 10) 장기동, 도립진자의 극배치 제어, 인하대 전기과 석사논문 1990.2

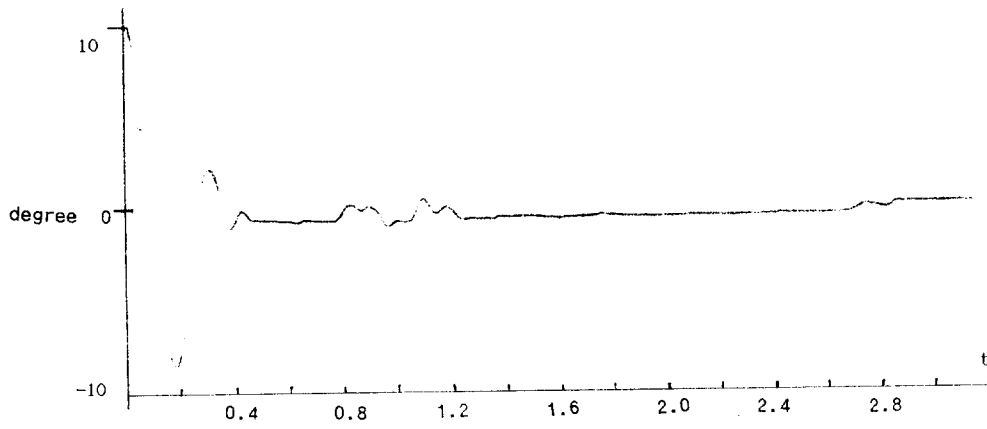


그림 10. 실험 결과 진자의 움직인 궤적

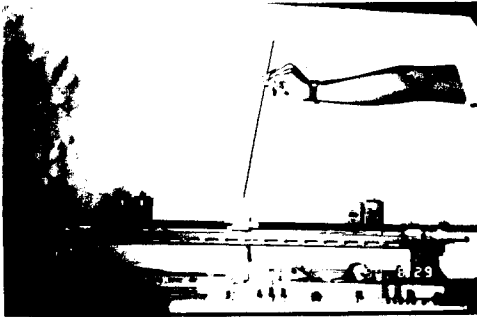


사진 1. 초기 시작

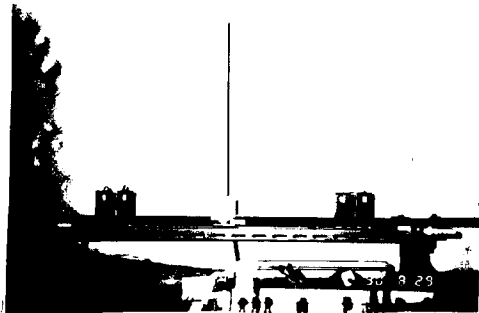


사진 2. 실행중

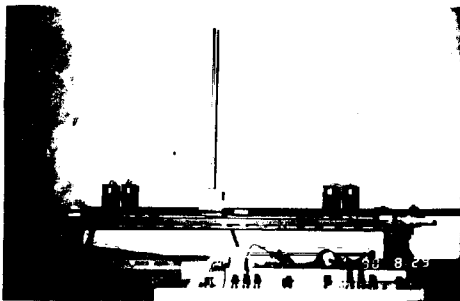


사진 3. 안정 상태