

비선형 궤환 선형화를 사용한 자기부상 열차의 제어기 개발

서진현

서울대학교 공과대학 전기공학과

오진주 화

Controller Development for an EMS Using Nonlinear Feedback Linearization

Jin Heon Seo

Dept. of Electrical Eng. Seoul National University

Ju-Wha Jin

Abstract

A nonlinear feedback linearizing control method for a EMS(Electro Magnetic Suspension) system is proposed. After linearizing the system using the exact linearizing method, conventional linear system control theory has been applied. Computer simulations are carried out in order to compare the performance of the proposed controller with that of the existing controller designed by using Taylor series expansion around nominal points.

1. 서론

단일 자석을 가진 자기부상모델은 비선형 시스템이므로 그 선형화 기법이 제어기의 형태를 좌우한다. 비선형 시스템을 선형화하는 기법으로는 동작점에서 테일러(Taylor)급수로 전개하여 2차이상의 항들을 모두 무시함으로써 선형시스템으로 근사화 시키는 방법이 일반적으로 쓰이고 있다. 그러나 동작점에서 멀리 벗어날 때는 이 방법을 사용할 수 없다는 단점을 가진다. 그 밖의 방법으로는 최근에 제안되어서 선형화기법의 하나로 큰 주류를 이루고 있는 비선형 궤환을 사용하여 비선형 시스템을 선형화시키는 방법이 있다. 이 방법은 근사화방법이 아니므로 특별한 제약조건이 없는 한 모든 영역에서 선형화가 유효하다고 볼 수 있다. 따라서 일단 비선형 궤환에 의해 선형화된 모델은 설혹 동작점에서 크게 벗어나더라도 기존의 선형시스템 제어이론을 쓰는데 별 무리가 없게 되므로 매우 강력한 선형화 기법중의 하나로 간주된다. 이와같은 비선형 궤환을 통한 선형화 기법의 응용에는 참고문헌 [9],[10]에서 찾아 볼 수 있다.

기존의 자기부상시스템을 위한 제어기는 테일러(Taylor)전개를 통하여 선형화된 모델을 사용한 PID제어기였다. 본 논문에서는 비선형 궤환을 사용하여 선형화시킨 모델에 대한 상태궤환제어기(state feedback controller)의 구성에 관해 연구하였다. 이를 위하여 먼저 한 개의 자석을 가진 열차의 수학적 모델링을 소개하였다. 그 에대한 비선형 궤환 입력을 구한 후 선형화된 모델에 대해서 상태궤환제어기를 구성하였다. 또한 이와같이 구성된 제어기와 기존의 선형근사화방식을 사용하여 설계된 제어기를 시뮬레이션을 통하여 상호비교를 하였다.

2. 단일 자석의 자기부상 시스템의 모델링^[1]

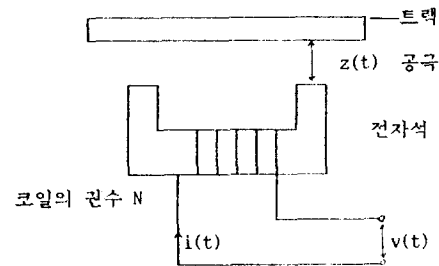


그림 2.1 열차의 자석과 트랙의 구성

Fig. 2.1 Electromagnet - Track configuration

열차와 트랙의 구성도를 간략히 그림 2.1과 같이 나타낼 수 있다.^[1] 참고 문헌 [1]에서 유도된 이 모델에 대한 상태방정식은 식(2.1)과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{z} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ k_F[i/z]^2 + G \\ [k_z(z, i)/k_i(z)] \times z - [R/k_i(z)] \times i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/k_i(z) \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \\ 0 \end{bmatrix} f_d \quad (2.1)$$

여기서

$$k_i(z) := \mu_0 N^2 A / 2z(t)$$

$$k_z(z, i) := \mu_0 N^2 A i(t) / 2z(t)^2$$

$i(t)$: 전자석에 흐르는 전류

N : 전자석의 권수 A : 전자석의 극면적

R : 전자석 코일의 저항

m : 전자석의 질량 f_d : 외부 교란

μ_0 : 투자율

G : 중력 가속도

식(2.1)는 $\dot{x} = f(x) + g(x)v$ 의 비선형 상태방정식의 형태를 이룬다.

3. 제어기의 구성

3.1 평형점에서의 선형근사화 모델

3.1.1 선형 근사화모델

기존의 제어기에서 사용되고 있는 이 방법은 평형점 (i_0, z_0) 에서 테일러(Taylor)급수 전개를 통하여 선형 근사화 모델을 얻는다. 상태 방정식은 식 (3.1)로 표현된다. [11], [2]

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{z}(t) \\ \Delta \dot{z}(t) \\ \Delta \dot{i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_z/m & 0 & -k_i/m \\ 0 & k_z/k_i & -R/L_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z(t) \\ \Delta \dot{z}(t) \\ \Delta i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/m \\ 1/L_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v(t) \\ f_d(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \Delta z(t) &= z(t) - z_0 \\ \Delta i(t) &= i(t) - i_0 \end{aligned}$$

$$k_i = \partial F(i, z) / \partial i \Big|_{(i_0, z_0)}$$

$$k_z = \partial F(i, z) / \partial z \Big|_{(i_0, z_0)}$$

$$L_0 = \mu_0 N^2 A / 2z_0$$

3.1.2 폐루프 시스템 (Closed Loop System) [3], [4], [5]

식 (3.1)에 대해서 PID 제어기를 구성하여본다. 먼저 외 부교란(External Disturbance) $f_d(t)$ 는 없는 것으로 가정한다. (실제로 이 부분은 열차의 질량 m 의 변화라고 생각할 수 있다.) $\Delta z, \Delta \dot{z}, \Delta \ddot{z}$ 를 궤환시켜 표현하면 식(3.2)가 된다.

$$\dot{x} = A_1 x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_p & K_v & K_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta \dot{z} \\ \Delta \ddot{z} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

☞

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta \dot{z} \\ \Delta i \end{bmatrix}$$

$$\Delta \ddot{z} \approx -[k_i/m]\Delta i + [k_z/m]\Delta z$$

선형 근사화를 통해 얻어진 제어기를 실제 시스템에 적용하였을 때 시스템의 구성을 블록 선도로 표현하면 그림 3.1과 같다.

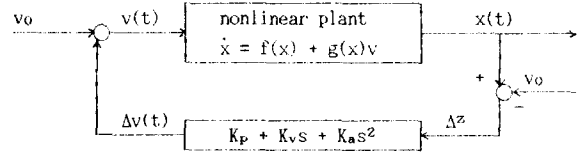


그림 3.1 선형근사화기법을 이용한 제어기의 블록선도

Fig. 3.1 Block Diagram of Controller with Linear Approximation Method

3.2 비선형 궤환 선형화를 이용한 제어기의 구성

3.2.1 비선형 궤환 선형화 [6], [7]

비선형 궤환을 통한 비선형 시스템의 선형화를 다루기 위해 다음의 정의를 필요로 한다.

정의 1

벡터장 f 와 g 의 Lie Bracket $(f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$ 은 식 (3.3)으로 정의된다.

$$[f, g] := \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} \text{는 } n \times n \text{ 자코비안 행렬 (Jacobian Matrix)}$$

□

이 정의를 회귀적(recursive)으로 다시 써보면 다음과 같이 표현된다.

$$\text{adr}^k(g) := [f, \text{adr}^{k-1}(g)], \text{adr}^0 := g$$

정의 2

다음과 같은 SISO 비선형 시스템이 주어졌었다.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

☞ $f(x), g(x) : \mathbb{R}^n$ 상의 무한히 미분가능한 벡터필드 (smooth vector field)

$$f(0) = 0, u \in \mathbb{R}$$

아래의 조건들을 만족하는 \mathbb{R}^n 상의 영역 U 가 존재하면 궤환 선형화가 가능하다고 말한다.

① 원점을 포함한다.

② diffeomorphism $T : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 가 존재한다.

③ 상태변수를 좌표변환 $y := T(x)$ 를 통해 y 로 변환시켰을 때

$$\dot{y} = Ay + bv$$

☞

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix}$$

가 되도록 하는 비선형 궤환

$$u := \alpha(x) + \beta(x)v, \quad \beta(x) (\neq 0) \in U$$

가 존재한다. \square

정의 2를 만족하는 T와 비선형 궤환 입력 u를 구하기 위해, 먼저 식(3.4.b)를 만족하는 T₁을 찾은 후 식(3.4.c)에 의해 회귀적으로 T_n을 구한다. 그 후 식(3.4.a)에 의해 u를 구할 수 있다.

$$u := \frac{1}{\langle dT_n, g \rangle} (v - \langle dT_n, f \rangle) \quad (3.4.a)$$

$$\Leftrightarrow \langle dT_1, \text{adr}^k(g) \rangle = 0; \quad k = 0, 1, \dots, n-2$$

$$\langle dT_1, \text{adr}^{n-1}(g) \rangle \neq 0 \quad (3.4.b)$$

SISO의 비선형 시스템을 비선형 궤환을 사용하여 선형화하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

정리 [8]

다음의 비선형 시스템은 비선형 궤환을 통한 선형화가 가능하다.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$\Leftrightarrow f(x)$ 와 $g(x)$ 는 무한히 미분가능한 벡터 필드 (smooth vector fields)이다.

\Rightarrow 다음의 두 조건을 만족하는 Rⁿ에서 원점을 포함하는 영역 U가 존재한다.

1. 벡터필드 $\{g, \text{adr}(g), \dots, \text{adr}^{n-1}(g)\}$ 가 영역 U에서 선형독립이다.

2. 집합 $F := \{g, \text{adr}(g), \dots, \text{adr}^{n-2}(g)\}$ 가 영역 U에서 involutive하다. 즉, 집합 F의 임의의 두 벡터의 Lie Bracket은 집합 F 각 벡터의 선형조합으로 나타낼 수 있다.

3.2.2 자기 부상시스템의 비선형 궤환을 사용한 선형화

먼저 정리에 의해 비선형 궤환 선형화가 가능함을 보이고 궤환 입력을 구해내도록 한다. 식(2.1)의 상태방정식에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 다음과 같이 놓는다.

$$f(x) := \begin{bmatrix} x_2 \\ -k_F x_1^{-2} x_3^2 + G \\ x_1^{-1} x_2 x_3 - k_0 x_1 x_3 \end{bmatrix} \quad g(x) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 x_1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\text{adr}^0(g) = g$$

$$\text{adr}^1(g) = (\partial g / \partial x) f - (\partial f / \partial x) g$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2k_F k_1 x_1^{-1} x_3 \\ k_0 k_1 x_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adr}^2(g) = [f, \text{adr}^1(g)]$$

$$= \begin{bmatrix} -2k_F k_1 x_1^{-1} x_3 \\ 0 \\ k_0 k_1 x_1 x_2 - 2k_F k_1 x_1^{-2} x_3^2 + k_0^2 k_1 x_1^3 \end{bmatrix}$$

$\{g, \text{adr}^1(g), \text{adr}^2(g)\}$ 는 x_1 이 0가 아닌 영역 $U(\subset \mathbb{R}^3)$ 에서 선형 독립인 집합이다.

다음으로 $\{g, \text{adr}^1(g)\}$ 가 위의 영역 U에서 involutive함을 보이도록 한다.

$$[g, \text{adr}^1(g)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 2k_F k_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

involutive의 정의에 의해서 아래의 식을 만족하는 α_1, α_2 가 존재하면 g 와 $\text{adr}^1(g)$ 가 involutive하다.

$$\alpha_1 g + \alpha_2 \text{adr}^1(g) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2k_F k_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

이를 만족하는 α_1, α_2 를 구하면 다음과 같다.

$$\alpha_1 = x_1^2 x_3^{-1} k_0 k_1 \quad \alpha_2 = k_1 x_1 x_3^{-1}$$

따라서 g 와 $\text{adr}^1(g)$ 는 영역 U에서 involutive하다.

$\{g, \text{adr}^1(g), \text{adr}^2(g)\}$ 가 선형독립하고 $\{g, \text{adr}^1(g)\}$ 가 involutive함을 만족하는 영역 U가 존재하는 것을 보였으므로 다음은 비선형 궤환 입력 v를 구한다. 식(3.4.b), 식(3.4.c)를 만족하는 상태변수의 좌표변환 T를 식(3.6)로 잡을 때 궤환입력 v는 식(3.7)과 같다.

$$\begin{aligned} y_1 &:= x_1 \\ y_2 &:= x_2 \\ y_3 &:= -k_F(x_3/x_1)^2 + 9.8 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} v &:= \frac{1}{\langle dT_3, g \rangle} (u - \langle dT_3, f \rangle) \\ &= \frac{u - 2k_F k_0 x_1^{-1} x_3^2}{-2k_F k_1 x_1^{-1} x_3} := N^{-1}(x)u + N^{-1}(x)M(x) \end{aligned} \quad (3.7)$$

식(3.6)의 좌표변환과 식(3.7)의 궤환입력을 통해 얻어지는 선형화된 시스템은 식(3.8)과 같다.

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

여기서, 시스템의 출력 $y_1(=z(t))$ 와 입력 u 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\ddot{y}_1 = u$$

3.2.3 페루프 시스템

식(3.8)에서 정의된 새로운 상태변수를 궤환하여 페루프 시스템을 구성하면 다음과 같다.

$$\text{상태 궤환 : } u = r - K_P y_1 - K_V y_2 - K_A y_3$$

y_3 는 식 (3.6)에서 x_1, x_3 를 통해 계산할 수 있다.

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K_P & -K_V & -K_A \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (3.9)$$

이 시스템이 안정하기 위해서는 식(3.10)의 조건이 필요하다.

$$K_P > 0, K_A > 0, K_V > K_P/K_A \quad (3.10)$$

식(3.9)는 비선형성이 완전히 제거되었다는 가정하에서 나온 상태방정식이다. 실제 시스템에 적용된 상태방정식은 식(3.11)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_F(x_3/x_1)^2 + g \\ \dot{x}_3 &= \frac{x_2 x_1^2}{x_1} - \frac{r x_1^2 - K_P x_1^3 - K_V x_1^2 x_2 + K_A k_F x_3^2 - K_A g x_1^2}{2k_F x_3} \end{aligned} \quad (3.11)$$

비선형 궤환을 통해 얻어진 제어기를 실제 시스템에 적용하였을 때 시스템의 구성을 블록 선도로 표현하면 그림 3.2와 같다.

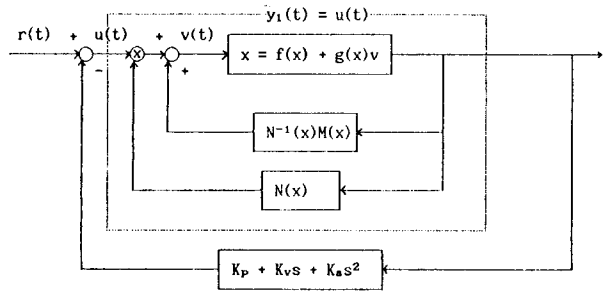


그림 3.2 비선형 궤환 선형화기법을 이용한 제어기의 블록선도

Fig. 3.2 Block Diagram of Controller with Feedback Linearizing Method

4. 컴퓨터 시뮬레이션

이론의 타당과 선제에 의한 운동 분석화 모델제거의 타당성을 확인하기 위하여 비선형 궤환을 이용한 상태 궤환 제어기(Linear Controller)의 비교를 행하였다. 시뮬레이션에 사용된 데이터값들은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} k_1 &= 40 \text{ [N/A]} & k_2 &= 50 \cdot 10^{-3} \text{ [N/m]} & k_3 &= 0.1 \cdot 10^{-3} \\ c_0 &= 1.5 \text{ [mm]} & l_0 &= 1 \text{ [A]} & E_0 &= 12 \text{ [V]} \\ l_0 &= 50 \cdot 10^{-3} \text{ [m]} & l_0 &= 7 \cdot 10^{-3} & m &= 4.39 \text{ [kg]} \end{aligned}$$

시뮬레이션의 주된 관점의 목적 경우에도 시스템의 안정해결이 되고 있었다. 본 논문과 이전을 궤환 제어기에서는 같은 결과를 얻어내는 궤환이동값을 식하여 진동의 없도록 하였다.

그림 4.1은 열차의 초기 속도가 0.2 mm/s 일 때 6mm 일때의 시뮬레이션 결과이다. 좌측의 비선형 제어기방법의 제어기이고 우측의 좌측의 제어기이다. 좌측의 제어기는 초기 속도가 동작점으로부터 너무 멀리 벗어난 관계로 불안정해짐을 알 수 있다. 비선형 궤환을 사용한 제어기는 좌측의 동작점이라는 것이 없으므로 시뮬레이션 결과가 보여준대로 어떠한 초기 속도에서도 잘 동작한다.

그림 4.2는 열차의 질량이 4.39 kg에서 6.43 kg으로 변했을 경우 제어기의 강인성을 본 것이다. 평형기를 다루는 열차의 질량은 4.39 kg이지만 승객이 타는 등의 이유로 인하여 질량이 변화하는 것은 반드시 고려되어야 할 점으로 하겠다. 여기에도 비선형 제어기방법의 제어기 (a)는 잘 동작하는데 반하여 종래의 제어기 (b)는 동작점으로 수렴하지 않을 뿐 아니라 미세한 진동을 계속하고 있음을 알 수 있다.

그림 4.3은 레일에 0.2초와 0.24초 사이에 0.5 mm의 돌출된 부위가 감지되는 경우이다. 이 경우에도 종래의 제어기 (b)는 동작점으로 수렴하지 않는 데 비해 비선형기법을 사용한 제어기 (b)는 수렴속도만 변할 뿐 안정화 되어있음을 보여준다.

마지막으로 그림 4.4는 두 제어기 모두 안정한 경우에 제어입력의 크기를 비교한 것이다. 여기에서는 두 제어기 모두 적당한 범위의 입력값을 갖는다.

5. 결론

본 논문은 비선형 시스템인 자기부상시스템을 선형화하는데 있어서 기존의 방식과는 다른 비선형 궤환을 써서 선형 근사화가 아닌 완벽한 선형시스템으로 변환시키는 이론과 기법을 제시하였다. 4절에서의 시뮬레이션 결과에서 알 수 있듯이 비선형 궤환을 이용한 제어기가 기존의 제어기보다 훨씬 강인성을 지닌다.

식(3.13)에서 x_1 과 x_3 가 0이면 안된다는 제약조건으로 인하여 응답곡선의 성능(performance)을 개선하는데 제약을 받는다. 이런 제약 조건은 비단 비선형 궤환 제어기만의 문제점이 아니며 종래의 선형 근사화를 통한 제어기에서 더욱 심각하다 할 수 있다. 비선형 궤환 제어기법을 통한 선형화는 완전한 선형화라는 잇점으로 인해 다양한 선형 시스템을 적용할 수 있으므로 그 해결의 폭은 상당히 넓다고 하겠다. 또한 본 자기부상시스템에는 영향을 주지는 않지만 비선형 궤환에 의한 선형화에 있어서 디지털 제어기로 구현할 경우 큰 문제점이 되고있는 유효자리숫자에 의한 단절 오차(truncation error)의 보상을 위한 보상회로의 연구 또한 필요하리라 생각된다.

참고문헌

[1] P.K.Sinha, "Electromagnetic Suspension Dynamics & Control", Peter Peregrinus Ltd., 1987

- [2] T.Kailath, "Linear System", Prentice-Hall, Inc., 1980
- [3] B.V.Jayawant and P.K.Sinha, "Development of 1 - Ton Magnetically Suspended Vehicle Using Controlled D.C. Electromagnets", PROC. IEE, Vol. 123, No. 9, pp. 941 - 948, 1976
- [4] P.K.Sinha, "Magnetic Suspension for Low - Speed Vehicles", Trans. ASME. J. Dyna. Sys. Meas. & Cont., Vol. 100, pp 333 - 342
- [5] P.K.Sinha and B.V.Jayawant, "Analytical and Design Aspects of Magnetically Suspended Vehicles", Automatica Vol. 15, pp 539 - 552, 1979
- [6] M.W.Spong and M.Vidyasagar, "Robot Dynamics and Control", John Wiley & Sons, Inc. 1989
- [7] In-Joong Ha, A kemal Tugcu, and Nader M.Boustany, "Feed-back Linearizing Control of Vehicle Longitudinal Acceleration", IEEE Trans. A.C., Vol. 34, No. 7, 1989
- [8] Su, R., "On the Linear Equivalents of Nonlinear Systems, " System and Control Letters, Vol. 2, 1981
- [9] Marino, R.W., and Spong, M.W., "Nonlinear Control Techniques for Flexible Joint Manipulators: A single Link Case Study," Proc. 1986 IEEE Conference on Robotics and Automation, San Francisco, pp. 1030 - 1026, April 1986.
- [10] Spong, M.W., " Modeling and Control of Elastic Joint Robots," Trans. ASME, J of Dyn. Sys, Meas., and Cont., Vol. 109, pp. 310-319, Dec. 1987.

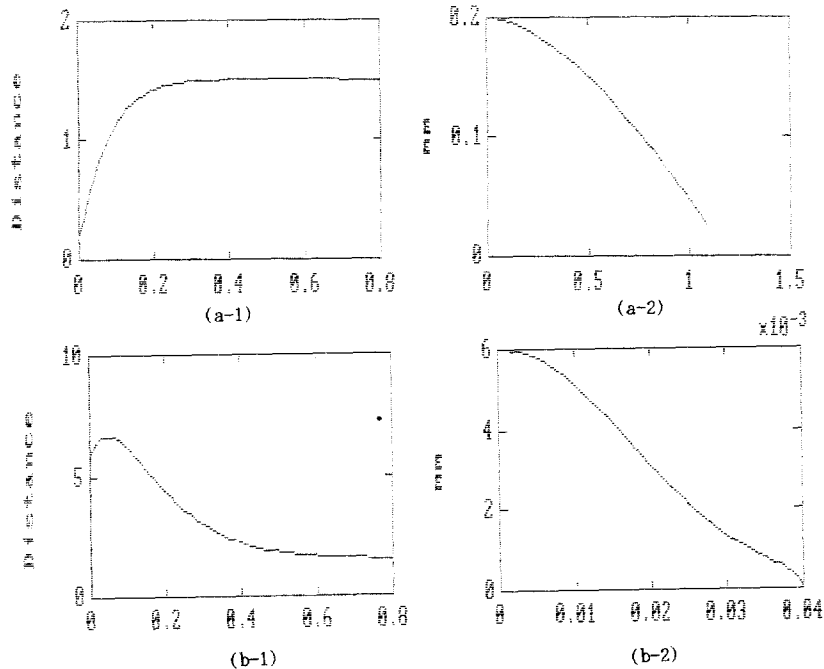


그림 4.1 다양한 초기 공극에서의 제어기 응답
Fig. 4.1 controller response at various initial airgap

(a) $Z(0) = 0.2$ mm

(b) $Z(0) = 6$ mm

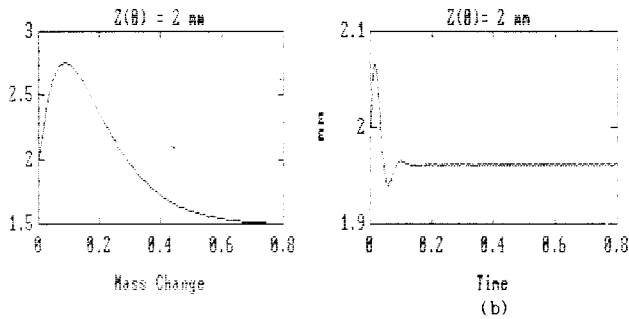


그림 4.2 열차의 무게가 변할 때의 제어기 응답
(a)비선형 궤환 제어기의 경우
(b)선형 근사화 제어기의 경우

Fig. 4.2 controller response when mass changes
(a)nonlinear feedback controller
(b)linear approximation controller

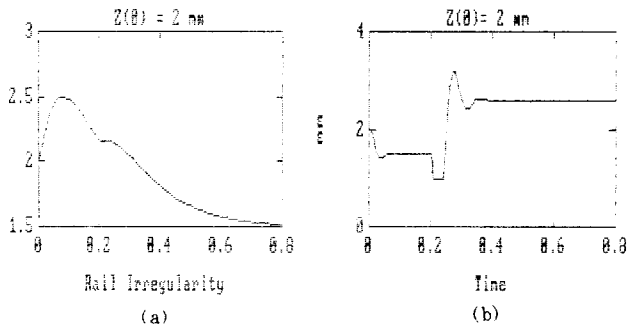
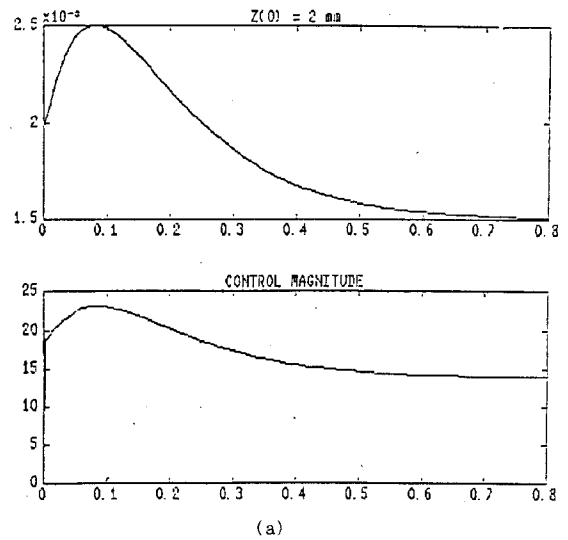


그림 4.3 레일에 요철이 있을 때의 제어기 응답
(a)비선형 궤환 제어기의 경우
(b)선형 근사화 제어기의 경우

Fig. 4.3 controller response when rail irregularity
(a)nonlinear feedback controller
(b)linear approximation controller

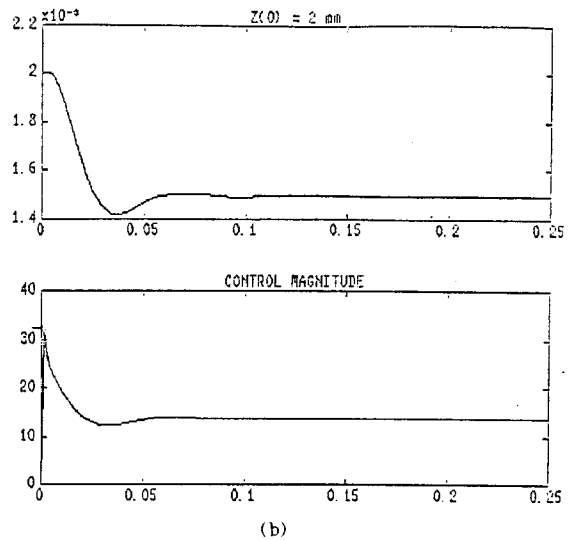


그림 4.4 제어 입력의 크기 비교
(a)비선형 궤환 제어기의 경우
(b)선형 근사화 제어기의 경우

Fig. 4.4 comparison of controller input magnitude
(a)nonlinear feedback controller
(b)linear approximation controller