

SAL-CAL에 의한 연속 선형계에서의 파라메타 추정에 관한 연구

안두수*, 이해기*, 유상진*, 김민형*

* 성균관 대학교 전기공학과

A study on the parameter identification of continuous linear systems via Sal-Cal functions

Doo-Soo Ahn*, Hae-Ki Lee*, Sang-Jin You*, Min-Hyung Kim*

* Dept. of Electrical Eng. Sung Kyun Kwan Univ.

Abstract

This paper presents a method for identification of a continuous time linear system parameters. We take the plant driven by periodically exciting input. To express the integral functions in terms of measured periodic output data, we use the Walsh function based on cal-sal functions. The linear algebraic equations for parameter identification is obtained. The present method is simple and computationally advantageous.

1. 서론

제어계의 설계, 상태추정 및 해석 등에 직교함수가 널리 이용되고 있는데, 그 주된 이유는 미분방정식으로 표현된 시스템의 정보를 직교 함수의 특성을 이용함으로써 선형 대수 연립 방정식에 의해 얻을 수 있기 때문이다. 본 연구에서는 선형계의 파라메타 추정을 위한 월쉬(walsh) 함수 응용 방법에 관해 연구한다. 시스템의 파라메타는 끊임없이 교변하는 입, 출력의 관계로부터 추정해내는 것이 바람직하다. 월쉬함수는 정현, 여현 대칭의 cal-sal 함수로 분리된다. 이러한 cal-sal 관계를 이용하면 기존의 월쉬함수 이용방법 보다 효율적으로 정확하게 추정할 수 있게 된다.

본 연구에서 계의 파라메타 추정에 월쉬 함수를 도입하게 된 이유는 다음과 같다.

- 1) 실시간 처리가 가능하다.[7]
- 2) 푸우리에 급수를 이용한 고속연산에 의한 방법보다는 월쉬함수를 이용한 고속연산이 더 빠르다.[8]
- 3) 월쉬함수는 다른 직교함수들과는 달리 ± 1 만을 취하는 구형파이므로 곱셈연산을 할 필요가 없다.[9]

4) 편미분 방정식으로 표현된 파라메타 추정의 문제를 월쉬 연산 행렬에 의해서 선형대수 연립 방정식으로 취급할 수 있다.[10]

2. sal, cal 함수에 의한 선형계의 파라메타 추정

다음과 같이 n 차 미분방정식으로 표현되는 선형계를 고려한다.

$$\frac{d^ny(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} = b_m \frac{d^mu(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t) \quad (1)$$

위 식을 $x=t/T$ 로 스케일링 하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{d^ny(x)}{dx^n} + a_{n-1}T \frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_1T^n y(x) = b_mT^{n-m} \frac{d^mu(x)}{dx^m} + \dots + b_0T^n u(x) \quad (2)$$

$u(x), y(x)$ 는 플랜트의 입출력이고, $a_k (k=0, \dots, n-1), b_j (j=0, \dots, m)$ 는 결정해야 할 파라메타들이다.

식 (2)와 같은 미분방정식으로 부터 파라메타를 구하는 것 보다는 식 (2)의 양변에 연속적인 적분을 취하여 얻어지는 적분 방정식으로 부터 파라메타를 추정하는 것이 바람직하다. 식(2)의 양변에 n 번 적분을 취하면 다음과 같다.

$$y(x) + \alpha_1 y'(x) + \dots + \alpha_n y^n(x) = \beta_1 u^{n-m}(x) + \dots + \beta_{m+1} u^0(x) \quad (3)$$

여기서

$$\frac{dy^{k+1}(x)}{dx} = y^k(x) \quad (4)$$

$$\alpha_k = a_{n-k}T^k$$

$$\beta_j = b_{m+1-j}T^{-m+j-1}$$

첨자 k 는 k 번의 연속적인 적분을 나타낸다.

본 연구에서는 고변하는 입출력의 관계로부터 파라메타를 추정한다. 편의상 고변하는 입력을 기함수라고 한다면 $u(x) = u(x+\sigma)$ 로 표현할 수 있으며 주기 조건은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y^k(0) = -y^k(\sigma) \quad (5)$$

여기서 $\sigma = T/2$

y^j 와 u^k 의 스칼라 곱은 다음과 같이 정의된다.

$$(y^j, u^k) = \int_0^1 y^j(x) u^k(x) dx \quad (6)$$

식 (3)에서 파라메타는 선형이고, 추정점 x_j 의 선택에 따라 파라메타의 평가에 영향을 미칠 수 있으나 이런 추정점을 선택하는데 있어서 어떤 간단한 대칭성이 나타나지 않으므로 식 (6)을 이용하여 적분 방정식의 계수가 스칼라곱을 갖는 방정식으로 바꾸면 다음과 같이 된다.

$$(y, v^j) + \alpha_1 (y^1, v^j) + \dots + \alpha_n (y^n, v^j) \\ = \beta_1 (u^{n-m}, v^j) + \dots + \beta_1 (u^{n-m}, v^j) + \dots + \beta_{m+1} (u^n, v^j) \quad (7)$$

위 식에서 $v^j = y^j$, 혹은 $v^j = u^j$ 로 한다면 독립적인 추정방정식을 구할 수 있다. 또한 식 (5)로부터 다음의 관계를 알 수 있다.

$$(y^k, y^{k+j}) = \begin{cases} 0 & j : \text{홀수} \\ (-1)^k (y, y^{2k+j}) & j : \text{짝수} \end{cases} \quad (8)$$

식 (5)와 같은 주기 조건을 갖는 $y(x)$ 의 푸우리에-월쉬 급수는 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$y(x) = y_a^T S(x) + y_c^T C(x) \quad (9)$$

여기에서

$$S^T(x) = (S_1(x), S_3(x), S_5(x), \dots) \\ C^T(x) = (C_1(x), C_3(x), C_5(x), \dots) \quad (10)$$

는 식(5)를 만족하는 직교성을 갖는 기저함수인 푸우리에-월쉬 함수로 구성된 벡터이다.

푸우리에-월쉬 계수 벡터는

$$y_a = 2 \int_0^\sigma S(x) y(x) dx \\ y_c = 2 \int_0^\sigma C(x) y(x) dx \quad (11)$$

와 같으며 푸우리에 경우에 기저함수는 다음과 같다.

$$S_k(x) = \sqrt{2} \sin 2kx \\ C_k(x) = \sqrt{2} \cos 2kx \quad (12)$$

여기에서 입력을 기함수로 하였을 때 짝수 고조파는 제거되므로 $k=1, 3, 5, \dots$ 에 대해서만 고려하면 된다.

sal, cal함수의 차수는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{sal}(k, x) = \text{sal}(2^n, x) \text{cal}(k', x) \\ \text{cal}(k, x) = \text{sal}(2^n, x) \text{sal}(k', x) \\ \text{sal}(2^n, x) = r_{n+1}(x) \quad (13) \\ k = 2^n - k', 0 \leq k' < 2^n - 1 \quad (14)$$

식 (13)에서 $r_{n+1}(x)$ 는 월쉬함수 $\Psi(x)$ 를 발생시키는데 이용될 수 있는 Rademacher함수이다.

예를 들어 sal-cal 함수에서 사이클스 5일때 sal함수에 대응되는 월쉬 함수는 $\Psi_{13}(x) = \text{sal}(5, x)$ 이다.

$$\text{sal}(5, x) = \text{sal}(2^3, x) \text{cal}(3, x) \\ = \text{sal}(2^3, x) \text{sal}(2^2, x) \text{sal}(2^0, x) \\ = r_4(x) r_3(x) r_1(x) \\ = \Psi_{13}(x)$$

적분함수의 월쉬계수는 다음과 같이 주어진다.

$$y_w^k = 2 \int_0^\sigma w(x) y^k(x) dx \quad (15)$$

sal-cal 계수의 경우에는 $w=S, w=C$ 이다.

식(15)를 k 번 적분하고 주기 조건을 이용한다면 출력값에 의한 $y^k(x)$ 의 월쉬 계수값이 다음과 같이 얻어진다.

$$y_w^k = 2(-1)^k \int_0^\sigma w^k(x) y(x) dx \quad (16)$$

푸우리에 함수의 경우에서의 sine, cosine 함수의 적분이 역시 cosine, sine함수로 나타나듯이 sal, cal함수의 적분 역시 sal-cal 함수로 다음과 같이 표현된다.

$$S^T(x) = A_n C(x) \\ C^T(x) = A_n S(x) \quad (17)$$

식 (9)에 의해 $y^n(x) = (y_a^n)^T S(x) + (y_c^n)^T C(x)$

$$y^{n+1}(x) = (y_a^{n+1})^T S(x) + (y_c^{n+1})^T C(x) \\ = \int y^n(x) dx \\ = (y_a^n)^T S^T(x) + (y_c^n)^T C^T(x) \quad (18)$$

식 (17), (18)을 이용하면

$$(y_a^{n+1})^T = (y_c^n)^T A_n \quad \text{즉, } y_a^{n+1} = A_n^T y_c^n \\ (y_c^{n+1})^T = (y_a^n)^T A_n \quad \text{즉, } y_c^{n+1} = A_n^T y_a^n \quad (19)$$

식(19)를 반복해서 이용하면 $y(x)$ 의 월쉬계수로 적분함수

의 월쉬계수를 표현 할 수 있다. 행렬 A_c 와 A_s 는 식(20), (21)의 sal-cal 함수에 대한 적분 공식에 의해 정의될 수 있다.

$$\int_0^x \text{sal}(k, \tau) d\tau = \sigma^{n+2} \left[\text{sal}(2^n - k, x) - \sum_{j=1}^{\infty} \sigma^j \text{sal}(2^{n+j} - k, x) \right] \quad (20)$$

$$\int_0^x \text{cal}(k, \tau) d\tau = \sigma^{n+2} \left[\text{cal}(2^n - k, x) - \sum_{j=1}^{\infty} \sigma^j \text{cal}(2^{n+j} - k, x) \right] \quad (21)$$

$k > 0$ 에서 식(20)와 (21)에 의해 정의된 적분함수는 주기조건을 만족하고 $\text{cal}^1(k, x)$ 와 $\text{sal}^1(k, x)$ 로 표현된다. $\text{cal}(0, x) = 1$ 이므로 식(13), (14)에 의해 $k=1$ 이면 $n=0$ 이므로 식(21)에 각각을 대입하여 정리하면 $\text{sal}^1(k, x)$ 는 식 (22)로 정의된다.

$$\text{sal}^1(1, x) = \int_0^x \text{sal}(1, \tau) d\tau - \sigma^2 \quad (22)$$

$$\text{결국 } \int_0^x \text{sal}(1, \tau) d\tau = \text{sal}^1(1, x) + \sigma^2 = A_c(1, 1) \text{cal}(1, x) + \sigma^2$$

식 (17)에 의해 $A_c(1, 1) = -\sigma^3$ 임을 알 수 있다.

반복해서 A_c 와 A_s 에 대해서 구한 값을 식(23)에 나타내었다.

$$A_s = -A_c^T = \sigma^3 \begin{bmatrix} 1 & -\sigma & 0 & -\sigma^2 & 0 & 0 & 0 & -\sigma^3 & 0 & \dots \\ \sigma & 0 & -\sigma^2 & 0 & 0 & 0 & -\sigma^3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sigma^2 & 0 & 0 & 0 & -\sigma^3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sigma^2 & 0 & 0 & 0 & -\sigma^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sigma & 0 & \sigma^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sigma^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sigma^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (23)$$

8항 전개시의 월쉬함수 적분 연산행렬은 식 (24)와 같다.

$$P(8 \times 8) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/2 & -1/4 & -1/8 & 0 & -1/16 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/4 & 0 & 0 & -1/8 & 0 & -1/16 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/16 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/16 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1/16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1/16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1/16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (24)$$

식 (18), (19), (22), (23)의 관계로부터 식(7)에서 파라메타를 추정할 수 있고 sal-cal 함수의 적분연산행렬 A_s , A_c 와 8항 전개시의 월쉬 함수의 적분연산행렬을 비교하여 보면 sal-cal함수의 경우 똑같은 항을 전개하였을 때, 월쉬함수의 경우보다 낮은 차원의 적분연산행렬로 파라메타의 값을 추정할 수 있다는 것을 알 수 있다.

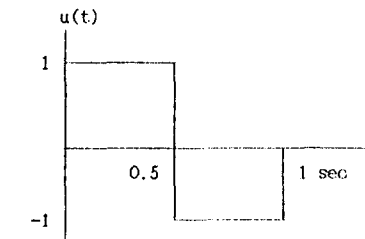
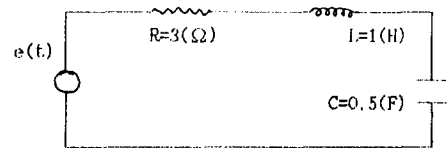
3. 결론

적분함수를 이용한 연속적인 선형계에서의 파라메타 추정에 대한 방법이 개발되어 왔다. 교변하는 입력을 신호와 이 신호의 출력과의 관계로부터 파라메타를 추정한다면 이 파라메타는 임의의 임, 출력 신호에도 적합한 파라메타가 될 것이다.

주우리에 급수에서 sine 함수와 cosine 함수와의 관계처럼 월쉬함수도 정현대칭, 어현대칭인 sal, cal함수로 구별 할 수 있으며, 또한 sine과 cosine 관계와 마찬가지로 sal과 cal의 관계를 언어낼 수 있다. 적고 함수를 이용해서 파라메타의 추정을 할 때, 적분 연산행렬이 필요한데, 만일 2차계에서 8항 전개시 월쉬 급수 접근을 이용한다면 8x8인 적분연산행렬이 필요하지만 sal, cal 함수를 이용한다면, 2x2인 sal의 적분 연산행렬과 2x2인 cal의 적분 연산행렬이 필요하게 될 것이다. 또한 sal, cal함수의 적분 연산 행렬의 차수가 보다 간단해진다는 관계로부터 계산상의 시간 절약 및 하드웨어구성의 용이한 잇점으로 실시간 추정이 가능하리라 생각한다.

4. 적용 예

다음과 같은 R, L, C 회로의 경우를 고려해 보자.



일반적인 미분 방정식의 표현으로 나타내면 다음과 같다.

$$L \frac{dy(t)}{dt^2} + R \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{C} y(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (25)$$

식 (25)를 적분한 일반식은

$$y(t) + a_1 y'(t) + a_2 y^2(t) = b_1 u'(t) \quad (26)$$

와 같으며 식 (9), (17), (23)을 이용하면

$$\begin{aligned} & \mathbf{y}_s^T \mathbf{S}(x) + \mathbf{y}_c^T \mathbf{C}(x) + \mathbf{a}_1 \{ \mathbf{y}_s^T \mathbf{A}_c \mathbf{C}(x) + \mathbf{y}_c^T \mathbf{A}_s \mathbf{S}(x) \} \\ & \quad + \mathbf{a}_2 \{ \mathbf{y}_s^T \mathbf{A}_c \mathbf{A}_s \mathbf{S}(x) + \mathbf{y}_c^T \mathbf{A}_s \mathbf{A}_c \mathbf{C}(x) \} \\ = & \mathbf{b}_1 \{ \mathbf{u}_s^T \mathbf{A}_c \mathbf{C}(x) + \mathbf{u}_c^T \mathbf{A}_s \mathbf{S}(x) \} + \mathbf{b}_2 \{ \mathbf{u}_s^T \mathbf{A}_c \mathbf{A}_s \mathbf{S}(x) \\ & \quad + \mathbf{u}_c^T \mathbf{A}_s \mathbf{A}_c \mathbf{C}(x) \} \quad (27) \end{aligned}$$

식(29)에 먼저 양변에 $\mathbf{S}(x)$ 와 $\mathbf{C}(x)$ 를 각각 곱하고 적분을 취하면 함수의 직교성에 의해 다음과 같이 간단화 된다.

$$\mathbf{y}_s^T + \mathbf{a}_1 \mathbf{y}_c^T \mathbf{A}_s + \mathbf{a}_2 \mathbf{y}_s^T \mathbf{A}_c \mathbf{A}_s = \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_c^T \mathbf{A}_s \quad (28)$$

$$\mathbf{y}_c^T + \mathbf{a}_1 \mathbf{y}_s^T \mathbf{A}_c + \mathbf{a}_2 \mathbf{y}_c^T \mathbf{A}_s \mathbf{A}_c = \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_s^T \mathbf{A}_c \quad (29)$$

식 (28), (29)에서 월쉬 함수의 전개항 수에 따라서 각각 $(n/4)$ 만큼의 방정식이 생기므로 이를 이용하여 파라메타 \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{b}_1 를 구할 수 있게 된다.

Reference

1. E.V.Bohn, "Implementation of optimum estimation algorithms on high-performance microprocess." IEEE Trans. Ind. Electron. Contr. Instrum., vol. IECI-25, pp.334-339, Nov.1978.
2. C.F.Chen and C.H.Hsiao, "Time Domain synthesis via Walsh functions." Proc.Inst.Elect.Eng., Vol. 122, pp 565-570. 1975
3. G.P.Rao and L.Sivakuma, "System identification via walsh functions." Proc.Inst.Elect.Eng., Vol. 122, pp 1160-1161. 1975
4. S.G.Tzafestas and N.Chrysocholds, "Time varying

reactivity reconstruction via Walsh Functions."

IEEE Trans. Automat. Contr., 1.AC-22, pp.886-888. 1977

5. V.R.Karanam, P.A.Frick, and R.R.Mohler, "Bilinear system identification by Walsh funtions." IEEE Trans. Automat. Contr. vol. AC-23, pp.709-713. 1978
6. W.L.Chen and Y.P.Shih, "Shift Walsh matrix and delay differential equations." IEEE Trans. Auto mat. Contr. vol. AC-23, pp.1023-1028. 1978
7. J.K.Tugnait, "Identification and model approxi- mation for continuous time system on finite pa- rameter set", IEEE Trans. AC-25, 1202-1206, 1980
8. B.K.Durgen, "A microprocess implemented Fast W- alsh Transform", IEEE Trans. PIC. APPL. MI. CPR. , 395-, 1980
9. K.R.Palanisamy, V.P.Arunacharam, " Analysis of vibrating systems via single term Walsh series approach", Int. J. Syst.Sci.-18,1457-, 1987
10. L.Ljung, "Analysis of a general recursive pre- diction error identification algorithm", Auto matica-17, 89-99, 1981
11. C.F.Chen and C.H.Hsiao, "Walsh series analysis in optimal control", Int.J.Control, 1975, Vol. 21. No.6, 881-897. 1974
12. E.V.Bohn, "Measurement of continuous time lin- ear system parameters via Walsh functions", IEE E.IECI-29, 38, 1982
13. E.V.Bohn, "Estimation of continuous time linear system parameters from periodic data", Automa- tica-18, 27-, 1982