

탄소섬유로 강화된 플라스틱 적층 평판의 동특성에 관한 연구

◦ 김 찬목, * 이 호성 **

(A study on the Dynamic Characteristics of Carbon Fibre-Reinforced Plastics Plates)

(Chan-Mook Kim, Ho-Sung Lee)

1 서 론

평판은 자동차, 선박, 비행기, 우주선등 많은 구조물등에서 사용되고 있다. 복합재료에는 샌드위치 구조와 섬유가있는 두가지로 분류되는데 모두다 평판형의 구조물에서 많이 사용된다. 그 이유는 추가적인 하중을 더하지 않더라도 구조물의 강도를 증가시킬수 있기 때문이다.

복합재료를 가지고 평판을 최적설계 하기 위해서, 구조 설계자들은 적층된 복합재료의 강성등의 정확한 수치적 결과를 얻기 위해서 더욱 유용하고 실제적인 방법을 요구하고 있다.

본 연구에서는 유한요소법을 사용하여 이방성으로 적층된 평판의 고유모드를 예측하고, 이론적인 예측의 정확성을 연구하기위해 사변 단순지지의 다양한 각도로 적층된 정사각형 CFRP평판의 8번째 진동모드까지 실험적인 결과와 비교하였다.

이 연구에서 사용된 모든 평판은 중앙면에 대칭이며, 이것은 Bending-stretching Coupling 을 제거 하기 위해서이다. 그러나 만일 비대칭적으로 적층된 평판이라면 이 효과를 포함한 해석이 되어야 할 것이다.

2. 이 론 해 석

해석을 위해서는 먼저 세가지 가정이 필요하다. 첫째는, 적층평판은 중앙면에 대칭으로 적층되었고, 둘째, 적층판의 두께가 판의 다른 치수에 비해 얇으며, 셋째, 적층판의 변형도는 두께에 대한 좌표 Z에 대해서 선형적이다.

2.1 어떤 임의 층의 구성 관계식

얇고, 탄성적이며, 이질의 성분으로된 두께가 h인 평판에서, X,Y,Z축의 직교 좌표계 상에서 평판의 중간면을 Z=0 으로 잡는다. 이때, 변위의 요소는 Fig.1 에서와 같이

$$\begin{aligned} u(X, Y, Z, t) &= u_0(X, Y, t) + Z\phi_x(X, Y, t) \\ v(X, Y, Z, t) &= v_0(X, Y, t) + Z\phi_y(X, Y, t) \\ w(X, Y, Z, t) &= w_0(X, Y, t) \end{aligned} \quad \text{-----(1)}$$

* 국민대학교 기계설계학과 교수

** 국민대학교 기계설계학과 대학원생

u, v, w : X, Y, Z 방향에서의 변위.
 u_0, v_0, w_0 : 판의 중앙면에서의 변위.
 Φ_x, Φ_y : 전단 회전각 (Shear Rotations).

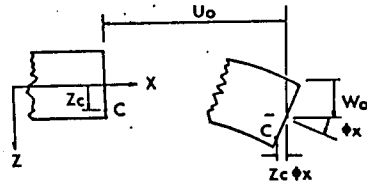


Fig.1 Geometry of deformation in the X-Z plane

선형 탄성계에서 변형도 - 변위의 관계식은

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial U_0}{\partial X} + Z \frac{\partial \Phi_x}{\partial X} \\
 \epsilon_y &= \frac{\partial V_0}{\partial Y} + Z \frac{\partial \Phi_y}{\partial Y} \\
 \epsilon_z &= 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U_0}{\partial Y} + \frac{\partial V_0}{\partial X} + Z \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial Y} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial X} \right)$$

$$\gamma_{xz} = \Phi_x + \frac{\partial W_0}{\partial Y}$$

$$\gamma_{yz} = \Phi_y + \frac{\partial W_0}{\partial X}$$

이때 어떤 임의 층의 구성 관계식은 일반적인 Hooke의 법칙에서 평면 응력에 대한 응력 - 변형률 관계는

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{vmatrix}$$

섬유의 방향으로 계산된 변형도(ϵ_i)를 평판의 주좌표축 X, Y방향의 변형도(ϵ)으로 변환시키는 행렬 [T]는

$$[T] = \begin{vmatrix} M^2 & N^2 & MN \\ N^2 & M^2 & -MN \\ -2MN & 2MN & M^2 - N^2 \end{vmatrix} \tag{5}$$

여기서 $M = \cos\theta$, $N = \sin\theta$

이때 각 θ 는 X축의 양의 방향과 섬유가 이루는 각도이다.

$$\{\sigma_i\} = [Q_{ij}] \{\epsilon_j\} \tag{6}$$

$$\{\epsilon_i\} = [T] \{\epsilon\} \tag{7}$$

2.2 적층 복합 평판의 변형도 Energy.

우선, 적층 복합 평판에서 각 층에 대한 변형도 에너지는

$$U_k = 1/2 \int_{V_k} (\epsilon_i)^T \{\sigma_i\} dV_k \quad \text{-----}(8)$$

V_k : 각 층의 체적

U_k : K번째 층의 변형도 에너지

식 (6), (7)을 식 (8)에 대입하면 X, Y좌표계에서 변형도 에너지는

$$U_k = 1/2 \int_{V_k} (\epsilon)^T [\bar{Q}_{ij}] (\epsilon) dV_k \quad \text{-----}(9)$$

$$[\bar{Q}_{ij}] = [T]^T [Q_{ij}] [T]$$

그러므로 전체 변형도 에너지 U는

$$U = \sum_{k=1}^L U_k \quad \text{-----}(10)$$

L : 적층된 층의 수

$$U = 1/2 \int_V (\epsilon)^T [D] (\epsilon) dV \quad \text{-----}(11)$$

[D] : 각 요소의 평균 탄성 행렬

두께를 통한 변형도의 변화가 선형 직접 변형도(a linear direct strain)라 가정하자.
여기서 사용되는 변형도 벡터는

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \kappa_1 Z \\ \epsilon_y &= \kappa_2 Z \\ \gamma_{xy} &= \kappa_6 Z \end{aligned} \quad \text{-----}(12)$$

여기서 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_6$ 는 판의 곡률이다.

식 (12)를 식 (9)(11)에 대입하고, 식(9)(11)을 식(10)에 대입하면

$$D_{ij} = 1/3 \sum_{k=1}^L Q_{ij}^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad \text{-----}(13)$$

$$i, j = 1, 2, 6$$

h_k, h_{k-1} : k번째 층의 상층면과 하층면의 좌표

식(11)은 Zienkiewicz 에 의해서 FEM 기법으로 묘사 되었으며, 그 식은 다음과 같은 표준식으로 나타낸다.

$$U = 1/2 \{\delta\}^T [K] \{\delta\} \quad \text{-----}(14)$$

{ δ } : 변위 행렬

[K] : 강성 행렬

마찬가지로 Kinetic Energy 는

$$T = 1/2 \omega^2 \{\delta\} [M] \{\delta\} \quad \text{-----}(15)$$

ω : 원 고유 진동수 (rad/sec)

[M] : 질량 행렬

2.3 자유진동에서의 고유진동수 방정식

자유진동에서, Lagrange Equation 을 한번 변분하면 아래와 같은 식이 얻어지며, 이것은 Eigen value 문제의 표준형이다.

$$([K] - \omega^2 [M]) \{ \delta \} = \{ 0 \} \quad (16)$$

$$\{ \delta \} = \{ \dots, u_{01}, v_{01}, w_{01}, \Phi_{x1}, \Phi_{y1}, \dots \}$$

$$([I] - \omega^2 [K]^{-1} [M]) \{ \delta \} = \{ 0 \} \quad (17)$$

여기서, $\lambda = \omega^2$ 이라 놓으면

$$[I] - \lambda [B] = 0 \quad (18)$$

$$[B] : [K]^{-1} [M]$$

$$[I] : \text{단위 행렬}$$

$$[B]^{-1} - \lambda [I] = 0$$

$$\det | A - \lambda I | = 0 \quad (19)$$

$$A = [B]^{-1}$$

3. 실험

3.1 실험 장치 및 방법

본 논문의 실험을 위해 사용된 시편은 Table 1 과 같은 물성치를 갖는 Graphite/Epoxy 재료로 된 대칭적층 복합판이다.

먼저 시편의 제작에 있어 Graphite/Epoxy 를 프리프레그(Prepreg) 상태에서 원하는 크기와 각도로 자르고 75°C 로 예열시킨 Hot Press에 이 형계를 바꾼후 시편을 설치하여 40 Kgf/Cm² 의 압력을 주고 온도를 90°C 로 높여 16분동안 가열한다. 그다음 다시 120°C 의 온도와 80 Kgf/Cm²의 압력으로 30분간 가열한후 다시 140°C 의 온도로 60분간 가열하여 curing 한다.

실험과 해석에 사용되는 경계조건은 4번 단순지지이며, 이 조건을 만족시키기 위해 상자 형태의 틀안에 상하의 지지면을 약 15° 의 날을 세워 복합적층평판을 지지하므로써 경계조건을 만족 시켰다. 그리고 외부의 기진력으로 인한 오차를 줄이기 위해 지지 장치에 방진고무를 깔고 실험 하였다. 실험장치는 Fig.2 와 같은 실험장치를 사용하여 복합적층평판의 고유진동수를 규명 하였다. 실험시 불완전한 가진에 의한 오차를 최소화 하기 위하여 충분한 average 를 취하였으며 이렇게 입력된 신호들은 FFT를 거쳐 X-Y Recorder에 기록 되었다.

3.2 실험 결과 및 고찰

실험은 유한요소법에서 얻은 고유진동수의 분포에 따라 상한주파수를 5kHz 로 취하여 Impulse 가진에 의한 고유진동수를 구하여 검증 하였다. Table 3 에서 Table 5 까지는 각 시편에 대한 수치해와 실험값의 고유진동수이다. Table 7 은 모드별 시편의 고유진동수를 비교 하였다. 이상의 결과가 보여주는 것처럼 오차는 저차 모드에서 최고 13 % 이나, 고차모드에서는

Table 1 Material properties
(Graphite/Epoxy)

E ₁ (GPa)	130.0
E ₂ (GPa)	10.0
G ₁₂ (GPa)	4.85
ν ₁₂	0.31
ν ₂₁	0.024

Table 2 Geometry of specimens

a/b (mm/mm)	200/200
Thickness (mm)	0.9

Specimen	Stacking sequence
1	[0/±30/ 90] _n
2	[0/±45/ 90] _n
3	[0/±60/ 90] _n

잘 일치하고 있다. 그러나, 본 이론의 해석에 있어서 복합적층평판의 감쇠를 고려하지 않은 비감쇠 진동으로 가정하고 해석 하였기 때문에 감쇠에 의한 영향으로 수치해의 값이 실험값 보다 약간 크게 나올것으로 예상 하였으나 Table 3 부터 Table 5 까지 에서 보듯이, 시편1($\theta = \pm 30^\circ$)의 경우 1차 모드와 2차 모드에서, 시편2($\theta = \pm 45^\circ$)의 경우 1차와 2차, 3차 모드에서, 시편3($\theta = \pm 60^\circ$)의 경우 1차, 2차, 4차, 5차 모드에서 실험값이 이론값 보다 약간 큰 값을 보여주고 있는데, 이것은 저차 모드에서는 굽힘 강성 만이 아닌 다른 강성들도 영향을 주고 있다는 것을 알수 있다. 또한 고차 모드에서 보다는 저차 모드에서 큰 오차를 나타내고 있는데 저차 모드에서는 고차 모드에서 보다 큰 진폭으로 진동하기 때문인 것으로 생각된다.

Table 7 의 1차 모드와 3차 모드에서 보편 적층각이 45° 일때 가장 높은 진동수를 보여 주고 있으므로 이때의 강성이 가장 큰 것을 알수 있으며 그 이외의 모드에서는 적층각이 60° 일때 가장 큰 진동수를 보여 이때의 강성이 가장 큰것을 알 수 있었다.

Table 6 은 대칭 적층 평판의 굽힘강성을 적층 각도에 따라 표시하고 있다. Table 6 과 Table 7 을 비교해 보면 1차 모드와 3차 모드에서는 적층각 θ 가 45° 일때 가장 큰 고유 진동수 값을 보였는데 이는 D_{12} 와 D_{66} 값에 영향을 받고 있음을 알수 있고, 그 이외의 모드에서는 D_{22} 와 D_{26} 의 값에 영향을 받고 있음을 알수있다.

수치해와 실험값의 비교에서 오차는 복합 적층 평판의 감쇠 효과와 적층 평판 사이의 접촉 불량, 실험시 시편의 불완전한 지지로 인한 완전치 못한 경계조건, 해석 상 고려되지 않은 다른 요소에 의한 것으로 생각 된다.

4. 결 론

Graphite/Epoxy 로 된 정사각형의 대칭 적층 평판용 4면 단순 지지의 경계조건 에서 유한 요소법 (Finite Element Method)과 실험적 결과에 따라 고유 진동수를 비교해 봄으로써 적층 복합 평판의 구조물에서는 저차모드일수록 고유진동수가 낮아지므로 Z축에 수직으로 작용하는 전단변형의 효과를 고려하는 것이 타당함을 알았다. 또한 1차모드와 3차모드에서는 굽힘강성 매트릭스중에서도

Table 3 Natural frequencies for lamination angle $\theta = \pm 30^\circ$
(Unit: Hz)

MODE	수치해	실험값	오차 (%)
1	417.2	475.0	13.8
2	969.7	1075.0	10.8
3	1781.5	1687.5	5.3
4	1889.2	1825.0	3.4
5	2264.3	2200.0	2.8
6	2425.7	2412.5	0.5
7	2614.2	2775.0	6.2
8	3049.8	3012.5	1.2

Table 4 Natural frequencies for lamination angle $\theta = \pm 45^\circ$
(Unit: Hz)

MODE	수치해	실험값	오차 (%)
1	428.6	475.0	10.8
2	1132.8	1137.5	0.4
3	1794.9	1825.0	1.7
4	2178.2	2112.5	3.0
5	2494.7	2487.5	0.3
6	2819.3	2812.5	0.2
7	3053.5	3050.0	0.1
8	3485.8	3475.0	0.3

D_{12} 와 D_{66} 의 영향이 지배적임을 확인하였다. 적층복합평판의 동특성에 관한 해석에 있어, 추후에도 감쇠에 의한 영향과 Z축에 수직으로 작용하는 전단변형에 의한 영향을 고려한 해석이 계속 연구되어야 할 것이다.

참고 문헌

1. Ashton, J.E., and Waddoups, M.E., "Analysis of Anisotropic Plates", J. Composite Materials, Vol. 3, pp148, 1969.
2. Cawley, p., and Adams, R.D., "The Predicted and Experimental Natural Modes of Free-Free CFRP Plates", J. Composite Materials, Vol. 12 p. 336, 1978.
3. Rudolph Szilard, "Theory and Analysis of Plates Classical and Numerical Methods", p219-225, 1974.
4. Robrt. M. Jones, "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill
5. Stephen. W. Tsai, "Composite Design, 4th edition", p17-68, 1988
6. O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method.", p226-267, 1977.

Table 7 Comparison of freq. at each Mode-Angle (Unit: Hz)

angle mode	$\pm 30^\circ$	$\pm 45^\circ$	$\pm 60^\circ$
1	417.2	428.6	415.0
2	969.7	1132.8	1274.4
3	1781.5	1794.0	1698.5
4	1889.2	2178.2	2412.1
5	2264.3	2494.7	2642.2
6	2425.7	2819.3	3307.6

Table 5 Natural Frequencies for lamination angle $\theta = \pm 60^\circ$ (Unit: Hz)

MODE	수치 해	실험값	오차 (%)
1	415.0	425.0	2.4
2	1274.4	1275.0	0.05
3	1698.5	1687.5	0.65
4	2412.1	2412.5	0.01
5	2642.2	2675.0	1.24
6	3307.6	3300.0	0.23
7	3494.9	3487.5	0.21
8	3871.8	3850.0	0.56

Table 6 Bending stiffness D_{ij} for lamination angle θ in a Graphite/Epoxy composite.

D_{ij} (N-m)	D_{11}	D_{12}	D_{16}	D_{22}	D_{26}	D_{66}
0°	7.842	0.190	0.0	0.727	0.0	0.295
$\pm 30^\circ$	6.561	0.724	0.440	0.839	0.158	0.829
$\pm 45^\circ$	5.838	0.902	0.344	1.507	0.344	1.007
$\pm 60^\circ$	5.070	0.724	0.158	2.431	0.440	0.829
90°	4.858	0.190	0.0	3.710	0.0	0.295

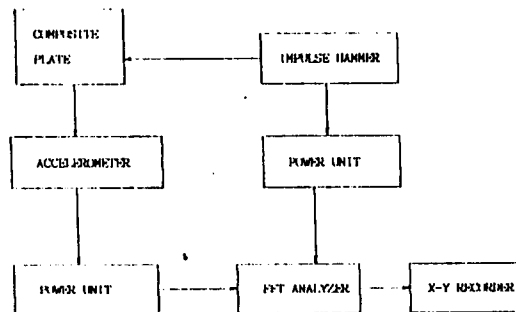


Fig. 2 Block diagram of measuring system