

압축력 및 토크가 회전축의 횡진동 특성에 미치는 영향

홍 장 표* · 한 동 철**

(Effect of Compressive Force and Torque on Lateral Vibration Characteristics of Rotor System)

(Jang-Pyo Hong, Dong-Chul Han)

1. 서론

에너지의 발생 및 변환에 사용되는 터빈 및 압축기 등의 터보 기계류의 현재 발전추세는 운전속도의 고속화를 통하여 기계의 소형화 및 고성능화를 추구하고 있다. 회전기계의 고속화에는 무엇보다도 회전축의 진동문제가 따르게 된다. 이의 해결을 통하여 피로파괴의 위험을 피할 수 있음은 물론 터보 기계의 효율 향상과 조용한 운전에 기여할 수 있는 것이다.

일반적으로 회전축의 횡진동 해석에 있어 축 방향 하중 또는 토크가 전혀 작용하지 않는 공회전 상태(무부하 하중시)의 해석에 그치고 있다. 그러나, 대부분의 기계는 그 기능을 수행할 때(부하 하중 작용시) 그 양의 다소에는 차이가 있지만 축 방향 하중 또는 토크를 받고 회전하게 된다. 예를 들어, 드릴 회전축이나 공작기계 회전축, 선박의 추진축, 압축기, 터빈등은 강한 축 방향 하중과 토크를 받는 경우이다.

보통 축 방향 하중의 변동은 축 방향 진동으로, 토크의 변동은 비틀림 진동으로 고려되어야 하나, 축 방향 하중 또는 토크의 변동이 없고 일정하게 작용할 때에는 축 방향 진동 또는 비틀림 진동으로 고려될 수 없다. 또한, 횡진동에 비하여 축 방향 진동 또는 비틀림 진동에 의한 고유진동수는 상당히 높은 회전수에서 나타나므로 특수한 경우를 제외하고는 대부분 가장 낮은 주파수 특성을 가지고 있는 횡진동 해석만으로 회전축 진동의 문제점이 해결되고 있다.

그러나 대부분의 선행 연구들은 축 방향 하중 또는 토크를 고려함에 있어 실질적으로 과도하게 큰 값을 대입하여 고유진동수의 변화와 안정성에 미치는 경향만을 파악하였을 뿐, 그의 구체적인 저동을 확인하지 못하였고, 일반적인 형상을 갖는 회전축 진동해석에서는 토크만을 고려하여 수식화 또는 자유진동 해석을 행한 것이다.

이에 본 연구에서는 일반적인 형상을 갖는 회전축에서 축 방향 하중과 토크를 각각 또는 동시에 고려할 수 있는 전달 행렬을 수식화하였고, 이에 의한 진동 특성을 해석하기 위하여 강제진동 해석 및 자유진동 해석을 수행하였으며, 해석결과에 대한 신빙성을 얻기 위하여 과도진동 해석 및 이산화 FFT를 통하여 검산기능을 추가하였다. 그리고 전달 행렬법에 새로운 고유치 수치해법과 수치 적분법의 적용을 통하여 수렴성과 안정성을 개선하였다.

2. 회전축-베어링 계의 모델링

2.1. 진동계 및 좌표계

연구 대상인 회전축-베어링 시스템의 진동계는 축 방향으로 단면이 일정하지 않은 원통형 단면을 갖는 축으로 구성되어 있으며, 그 위에 원관형의 임펠러 또는 치차등의 기계요소가 장착된 상태에서 여러개의 미끄럼 및 구름베어링에 의해 지지되어 회전하고 있다. 이러한 회전축에는 주로 불평형에 의한 원심력 가진 및 회전체의 경사로 인하여 발생하는 휨모멘트 가진이 작용하며 부가적으로 임펠러에 작용하는 열유체력에 의해 축 방향 하중 및 토크가 작용할 수 있다. 또한, 회전속도의 가속 및 감속에 의한 가진력과 가진 모멘트의 변화, 회전체의 자이로 스코우프 효과에 의한 모멘트의 변화 그리고 베어링의 상호 연성된 강성 및 감쇠에 의한 복합적인 반력이 작용한다. 그 외에도 시일 및 커플링 부위에서의 마찰력등이 작용하며 이러한 외력과 평형을 이루는 반력이 회전축을 지지하는 베어링 부위에 작용하게 된다.

Fig.1 에는 이러한 일반적인 형상을 갖는 회전축-베어링계의 횡진동 해석을 위한 이상화된 모델이 도시되어 있다.

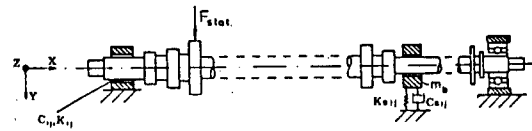


Fig.1 Dynamic system of rotor and bearings

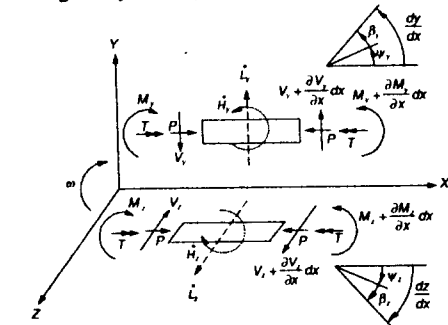


Fig.2 Coordinate system and free body diagram of beam segment

* : 서울대 정밀기계설계 공동연구소
 ** : 서울대 기계설계학과

Fig.2에는 이를 위한 좌표계와 분할된 요소에 작용하는 외력 및 그에 의한 변형을 각 평면에서의 자유물체도(free body diagram)로 나타나 있다.

2.2. 보 요소의 평형 방정식

앞의 Fig.2에 나타난 회전축의 보요소 및 회전체 요소에 대한 거동을 나타내는 식은 X-Y 평면에서 다음과 같이 기술할 수 있다.

평형 방정식(eq. of equilibrium)은

$$\frac{\dot{L}_y}{\partial x} = \bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial V_y}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\dot{H}_y}{\partial x} = J_y \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} - \bar{J}_p \omega \frac{\partial \psi_y}{\partial t} - \frac{1}{2} J_p \dot{\omega} \psi_y = \frac{\partial M_y}{\partial x} + P \frac{\partial y}{\partial x} + V_y \quad (2)$$

이 된다.

그리고, 힘과 변형과의 관계(material law)는

$$M_y = M_{by} + M_{bTy} = EI_y \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + T \psi_y \quad (3)$$

$$\beta_y = \frac{V_y}{\phi} + \frac{P}{\phi} \frac{\partial y}{\partial x} \quad (4)$$

이 된다. 여기서 $\phi = k \cdot G \cdot A$ 이다.

또한 변형과 기하학적 적합조건(geometrical relation)은

$$\frac{dy}{dx} = \psi_y + \beta_y \quad (5)$$

이 된다.

한편, X-Y평면과 X-Z평면과의 공간 좌표계상의 상대적인 위치로 인하여 X-Z평면에서는 X-Y평면에비하여 회전속도 ω , 회전가속도 $\dot{\omega}$, 와 토크 T 의 부호가 서로 반대로 표시된다.

2.3 수치해를 위한 회전축계의 모델링

회전축 진동의 수치해를 위하여 축을 단면이 일정한 짧은 원통형 단면을 갖는 절단요소로 나눈다. 회전축에 부착된 회전체의 경우에는 회전축의 직경을 통가 축지름으로 대체시킬 수 있다. 축의 절단요소에는 힘 강성 특성만 있고, 절점에는 전변 절단요소의 질량 및 관성 절반과 다음 절단요소의 질량 및 관성 모멘트 절반이 집중질량과 관성 모멘트를 이루어 동적 특성을 구성한다고 가정한다.

장 전달 행렬은 절단 요소의 힘 강성 특성만을 나타낸다. 그리고 절단요소의 힘 강성은 축 방향 하중, 토크 및 전단변형에 의하여 변화되는 점을 고려하였다.

실제에 있어 일반적으로 많이 사용되는 원통형 단면을 갖는 축에 적용하면 복소 표기법(complex notation)을 이용하여 다음과 같이 간단한 형태의 기초식을 구성할 수 있다.

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y+iz \\ \psi_y+i\psi_z \\ M_y+iM_z \\ V_y+iV_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & H & 0 & H \cdot F \\ 0 & i \cdot T \cdot R & R & 0 \\ 0 & -H \cdot P & 0 & -H \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y+iz \\ \psi_y+i\psi_z \\ M_y+iM_z \\ V_y+iV_z \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서 $H=1/(1-P/\phi)$, $F=1/\phi$, $R=1/I_y=1/I_z$, $i=\sqrt{-1}$ 이다.

첫 방정식의 해는 Cayley-Hamilton 이론을 적용하면 얻을 수 있으며, 이로부터 얻어지는 장 전달 행렬은 다음과 같은 형태로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} y+iz \\ \psi_y+i\psi_z \\ M_y+iM_z \\ V_y+iV_z \end{bmatrix}_{j+1}^L = \begin{bmatrix} 1 & f_1 & f_2 & f_3 \\ 0 & f_4 & f_5 & f_6 \\ 0 & f_7 & f_8 & f_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y+iz \\ \psi_y+i\psi_z \\ M_y+iM_z \\ V_y+iV_z \end{bmatrix}_j \quad (7)$$

여기서 $f_k = f_k^o + i f_k^i$ ($k = 1, 2, \dots, 9$) 이고, Y 방향과 Z 방향이 서로 연성시키는 요소인 토크가 작용하지 않을 경우 f_k 는 영(zero)이 된다.

한편, 절점에는 절점의 원편 상태량에 전단력과 휨 모멘트를 변화시키는 추가요소가 작용하여 절점의 오른쪽 상태량을 구성하며, 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_y^R &= M_y^L + \sum M_y \\ M_z^R &= M_z^L + \sum M_z \\ V_y^R &= V_y^L + \sum F_y \\ V_z^R &= V_z^L + \sum F_z \end{aligned} \quad (8)$$

절점에서의 휨 모멘트에 변화를 일으키는 것으로는 각 운동량(angular momentum)의 시간 변화율에 의한 자이로 스코우프 효과로 인한 것과 외부 가진 모멘트에 의한 것이 있으며, 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \sum M_y \\ \sum M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_T \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} - J_p \omega \frac{\partial \psi_z}{\partial t} - \frac{1}{2} J_p \dot{\omega} \psi_z \\ J_T \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} + J_p \omega \frac{\partial \psi_y}{\partial t} + \frac{1}{2} J_p \dot{\omega} \psi_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M_{\sigma y} \\ -M_{\sigma z} \end{bmatrix} \quad (9)$$

절점에서의 전단력에 변화를 일으키는 것으로는 선 운동량(linear momentum)의 시간 변화율에 의한 운동력으로 인한 것과 강성 및 감쇠특성을 갖는 베어링 및 베어링 외적 요소에 의한 반력 그리고 외부 가진력에 의한 것이 있으며, 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \sum F_y \\ \sum F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{by} \\ F_{bz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{Ry} \\ F_{Rz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_{\sigma y} \\ -F_{\sigma z} \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서 F_{by} 및 F_{bz} 는 베어링 반력, F_{Ry} 및 F_{Rz} 는 베어링 이외의 강성 및 감쇠특성에 의한 반력, $F_{\sigma y}$ 및 $F_{\sigma z}$ 는 가진력, $M_{\sigma y}$ 및 $M_{\sigma z}$ 는 가진 모멘트이다.

3. 진동해석

3.1. 전달행렬

상태량 y, ψ_y, M_y, V_y 및 z, ψ_z, M_z, V_z 은 시간의 함수이므로 앞에서 유도된 식들을 강제진동 및 자유진동 해석에 적용하기 위하여 다음과 같이 시간 변분(time variation)을 한다.

각 절점에서의 상태량은 다음과 같이 다시 변형시킬 수 있다.

$$r = r(x,t) = \text{Re}[(r^o + i r^i) e^{\lambda t}] \quad (11)$$

시간에 따른 발산 여부와 변화 주기를 나타내는 값은 자유진동 해석을 할때 $\lambda = -u + iv$ 로, 강제진동 해석을 할때 $\lambda = i\omega_s$ 로 치환하여 사용하면, λ 라는 단일화된 변수로서 식(12)과 같이 시간 변분된 상태량들을 정리할 수 있다.

$$\bar{r} = r^o + i r^i \quad (12)$$

따라서, 장 전달 행렬에서는 절단요소의 원편 상태량과 오른쪽 상태량을 시간변분 시키면 피므로 식(7)와 유사한 다음의 형태로 표시된다.

$$\begin{bmatrix} \bar{y}+i\bar{z} \\ \bar{\psi}_y+i\bar{\psi}_z \\ \bar{M}_y+i\bar{M}_z \\ \bar{V}_y+i\bar{V}_z \end{bmatrix}_{j+1}^L = \begin{bmatrix} 1 & f_1 & f_2 & f_3 \\ 0 & f_4 & f_5 & f_6 \\ 0 & f_7 & f_8 & f_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}+i\bar{z} \\ \bar{\psi}_y+i\bar{\psi}_z \\ \bar{M}_y+i\bar{M}_z \\ \bar{V}_y+i\bar{V}_z \end{bmatrix}_j \quad (13)$$

또한, 시간에 따라 변화하는 요소로 구성되어 있는 장 전달 행렬은 식(8) 으로부터 시간 변분하면 다음과같이 표현된다.

$$\begin{aligned}\bar{M}_y^R &= \bar{M}_y^L + \sum \bar{M}_y \\ \bar{M}_z^R &= \bar{M}_z^L + \sum \bar{M}_z \\ \bar{V}_y^R &= \bar{V}_y^L + \sum \bar{F}_y \\ \bar{V}_z^R &= \bar{V}_z^L + \sum \bar{F}_z\end{aligned}\quad (14)$$

식(14)중에서 절점점에 추가할 힘 모멘트 및 전단력은 식(9) 및 식(10)으로부터 시간변분하여 얻을 수 있다.

3.2. 수치 해석

3.2.1. 강제 진동 해석

전달 행렬을 이용한 해석에서는 절단요소에 대한 장 전달 행렬과 절점에 대한 점 전달 행렬을 연계함으로써 얻을 수 있으며, 회전축의 시작점(Index A)과 끝점(Index B)의 관계를 나타내는 최종적인 행렬식(T_{sum})을 얻게 된다.

$$\bar{F}_E = T_{sum} \bar{F}_A + \bar{Q}_E \quad (15)$$

더 구체적으로 서술하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \bar{W} \\ \bar{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}_{sum} \begin{bmatrix} \bar{W} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} \bar{Q} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_E \quad (16)$$

여기서 \bar{W} 는 $[\bar{y}, \bar{z}, \bar{\psi}_y, \bar{\psi}_z]^T$, \bar{Q} 는 $[\bar{M}_y, \bar{M}_z, \bar{V}_y, \bar{V}_z]^T$ 이다.

위 행렬식의 해를 얻기 위하여 경계조건의 설정이 필요하다. 흔히 취급하는 축의 양쪽단이 자유단인 경우에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$\bar{M}_{yE} = \bar{M}_{zE} = \bar{V}_{yE} = \bar{V}_{zE} = \bar{M}_{yA} = \bar{M}_{zA} = \bar{V}_{yA} = \bar{V}_{zA} = 0 \quad (17)$$

이 경계조건은 식(16)에 대입하면 더 작은 방정식군으로 나뉘어지게 된다.

$$\text{즉 } \begin{bmatrix} \bar{W} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_E = [T_{21}]_{sum} \begin{bmatrix} \bar{W} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} \bar{Q} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_E \quad (18)$$

$$[\bar{Q}]_E = [T_{21}]_{sum} [\bar{W}]_A + [\bar{Q}]_E \quad (19)$$

강제 진동 해석을 위하여서는 주어진 회전속도에서의 외부 가진항을 고려한 해를 구하여야 한다. 우선 식 (19)에서 선형방정식을 풀어 회전축 시작부분의 상태 벡터 ($\bar{y}, \bar{z}, \bar{\psi}_y, \bar{\psi}_z$)를 알아낸다. 다음 식(20)을 이용하여 임의의 j 번째 절점에 대한 상태 벡터를 계산할 수 있다.

$$[\bar{W}]_j = [T_{11}]_j [\bar{W}]_A + [\bar{Q}]_j \quad (20)$$

한편, 강제 진동에 의한 정상상태 (steady state)의 해석에서 회전축의 중심이 그리는 원형 또는 타원형 궤도는 복소수의 축차점으로 나타나며, 베어링에 대한 반력 $\bar{F}_{by}, \bar{F}_{bz}$ 는 베어링 지지부의 변위로부터 얻을 수 있다.

3.2.2. 자유 진동 해석

자유 진동 해석에 의한 고유치 해석은 식(19)에서 외부의 가진항을 제외시킨 경우의 행렬식이 Non-trivial해를 가질 조건 즉, $\text{Det} [T_{21}]_{sum} = 0$ 을 찾는 것이다.

전달 행렬법을 이용한 고유치 수치해석에서는 $[T_{21}]_{sum}$ 의 판별식(determinant), F가 구하려는 복소 고유치의 다항식(polynomial)으로 간주될 수 있으므로 이를 고차 방정식의 해법을 적용하여 풀 수 있다.

본 연구에서는 Hansen-Patrick 방법¹⁵⁾을 사용하여 해석 대상에 따라 수렴이 안되거나, 발산 요인이 발생하였을 때 다른 수치해법으로 바꾸어 선택할 수 있도록 함으로써 수치해석상의 어려움을 극복하였다.

판별식 탐색법에 의한 복소근의 해법은 n 번째 추적에서 구한 복소근으로부터 (n+1)번째의 새로운 복소근의 추적을

위하여서는 어떤 복소 증분치를 합하여 새로운 복소근으로 선택하여야 하는 것이 판건이 된다.

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + h \quad (21)$$

Hansen-Patrick 방법에 의한 증분치 h는 식 (22)과 식 (23)에서 표기된 바와 같이 a 값의 선택에 따라 증분치 h가 변화한다.

$$h = - \frac{(a+1)F}{aF' \pm [(F')^2 - (a+1)FF'']^{0.5}} \quad (22)$$

또한, 첫 식을 다른 형태로 표기하면 다음과 같다.

$$h = \frac{aF' \pm [(F')^2 - (a+1)FF'']^{0.5}}{(a-1)(F')^2 + FF''} \quad (23)$$

첫식에서 a 값의 선택에 따라 잘 알려진 반복 수렴법이 되며, a=1 일때 Euler 방법(Müller 방법), a=1/(n-1) 일때 Laguerre 방법, a=0 일때 Ostrowski square root iteration 방법, a=∞ 일때 Newton 방법, a=-1 일때 Halley 방법이 된다.

3.3.3. 과도 진동 및 이산화 FFT 해석

회전축 진동의 일반적인 해는 강제진동 해석에 의한 특수해와 자유진동 해석에 의한 일반해의 합으로 나타나며, 과도 응답 해석으로 강제진동과 자유진동의 해석 결과를 확인할 수 있다.

과도진동 해석을 위한 장 전달 행렬은 시간 변분되기 이전의 상태량들로 구성되어 있는 식 (7)로 표현된다.

Implicit 적분방법을 이용하면 전변 시간단계에서 구한 모든 정보로부터 다음 시간 단계의 속도 및 가속도 성분을 추정하는 판제식을 식(24)와 같은 형태로 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{W}_{n+1} &= A_n W_{n+1} + B_n \\ \dot{W}_{n+1} &= C_n W_{n+1} + D_n\end{aligned} \quad (24)$$

여기서 B_n, D_n 은 전변 시간 단계에서의 변위, 변위 속도, 변위 가속도 그리고 전변 시간 단계에서의 변위각, 변위각 속도, 변위각 가속도로부터 구하고 A_n, C_n 은 적분 시간간격 Δt 의 함수이다.

구체적으로 ρ-family 방법¹⁶⁾에 대하여 식 (24)의 형태로 변형하면 계수 A_n, B_n, C_n, D_n 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{\Delta t^2}{(1+\rho)(1+\rho^2)} \\ B_{kn} &= - \left[\frac{(1+\rho)(1+\rho^2)}{\Delta t^2} W_{kn} + \frac{(1+\rho)(1+\rho^2)}{\Delta t} \dot{W}_{kn} \right. \\ &\quad \left. + (\rho^3 + \rho - 1) \ddot{W}_{kn} \right] \\ C_n &= \frac{2}{\Delta t}\end{aligned} \quad (25)$$

$D_{kn} = - \left[\frac{2}{\Delta t} W_{kn} + \dot{W}_{kn} + \frac{\rho-1}{\rho+1} \Delta t \ddot{W}_{kn} \right]$
여기서 k=1이면 $W_{1n} = y_n$, k=2이면 $W_{2n} = z_n$, k=3이면 $W_{3n} = \psi_{yn}$, k=4이면 $W_{4n} = \psi_{zn}$ 이다.

전달행렬을 이용한 과도진동 해석의 순서는 다음과 같다.

우선 처음 단계의 시간에서 각 절점의 변위 및 변위각에 대한 속도, 가속도를 가정한다. 전변 단계의 시간에서 각 절점의 변위 및 변위각 그리고 이에 대한 속도, 가속도를 식(24)과 식(25)를 이용하여 다음 단계에서의 시간에서 각 절점의 변위 및 변위각에 대한 속도, 가속도를 얻은 다음, 식(7)과 식(8)을 연계하여 전체적인 전달행렬을 풀어 다음 단계의 시간에서 각 절점의 변위 및 변위각을 구할 수 있다. 이와같은 과정을 반복함으로써 각 절점에서 각각의 순간에 대한 회전축 중심의 궤적을 구할 수 있다.

위와같은 과정을 거쳐 얻은 회전속의 중심 궤적이 가진 주파수와 같은 주기의 회전궤도를 갖는지 여부와 불균일한 궤도를 가질때 어떤 고유진동 모우드가 겹쳐서 그러한 궤도를 갖는지를 알고자 할 때에는 수치적분으로 구한 축중심의 회전 궤도를 주파수 영역으로 변환 시켜서 보기 위하여서는 이산화 FFT 처리가 필요하게 되며, 이는 Cooley-Tukey FFT 알고리즘을 사용하면 빠른 연산속도로 계산될 수 있다.[7]

4. 적용예

계산 모델로서 Fig.3에 나타나 있는 원심 송풍기는 총무게 118 kg, 총길이 1024 mm이며, 두개의 4-활면 저어널 베어링으로 지지되어 있다.

이 원심 송풍기의 베어링 부위가 강제진동 되었다고 가정하였을때 1차 고유진동수는 509.00 [rad/sec] 이다.

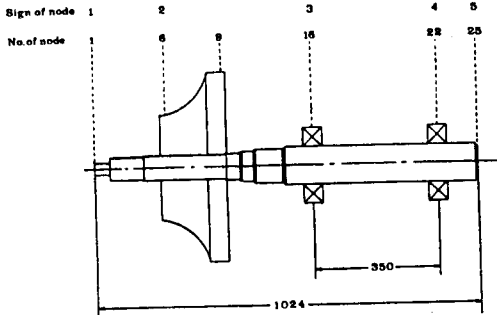


Fig.3 Rotor assembly of the centrifugal fan

원심 송풍기 임펠러의 불평형 가짐에 의한 회전축계의 강제진동 해석을 수행한 결과는 Fig.4에 나타나 있다. 장반경의 진폭은 회전 각속도 $\omega_2 = 331.64$ rad/sec 에서 최대치를, 그리고 단반경의 진폭은 회전 각속도 $\omega_1 = 165.3$ rad/sec 에서 최대치를 갖는 것으로 계산 되었다.

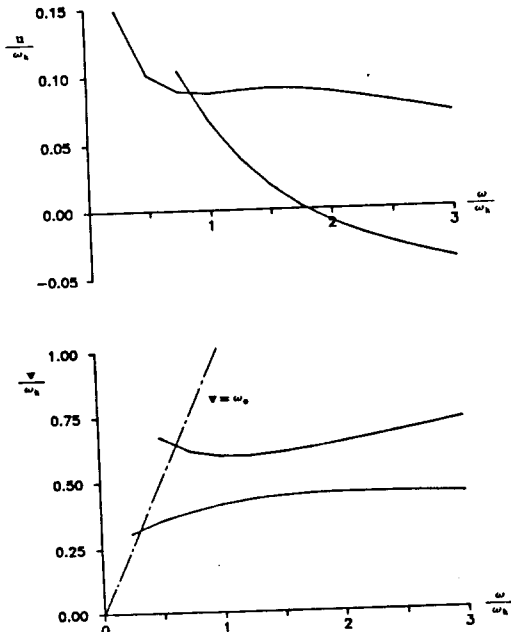


Fig. 5 System damping and damped natural frequency of the centrifugal fan

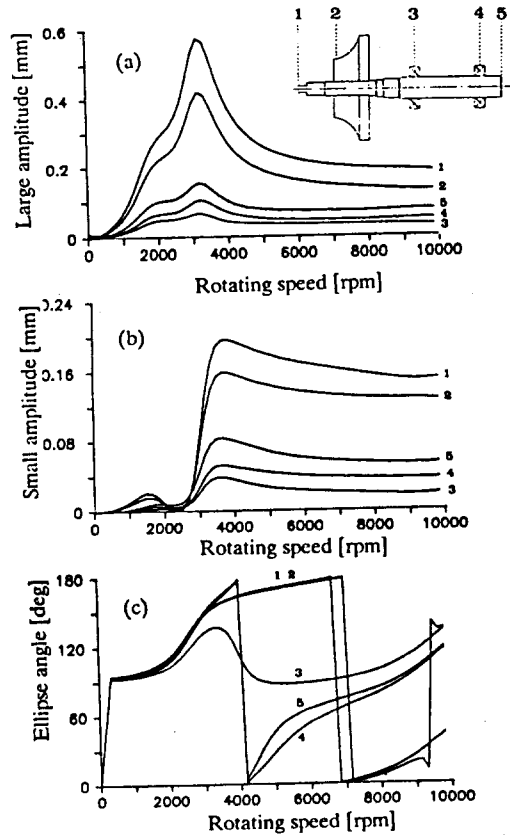


Fig. 4 Forced vibration : orbit analysis

- (a) large amplitude vs. rotating speed
- (b) small amplitude vs. rotating speed
- (c) ellipse angle vs. rotating speed

Fig.5에는 자유진동 해석으로부터 회전속도에 따라 구한 여러개의 고유치 중 가장 낮은 고유치 두개를 회전 각속도에 대비하여 나타내었다. 시스템 감쇠 능력 $-u/\omega_k$ 가 양수에서 음수로 바뀌는 회전속도는 대략 $\omega/\omega_k = 1.9$ 이다. 이 회전 속도 이상에서는 시스템 감쇠능력이 부(-)가 되어 불안정한 진동상태를 야기시킨다고 판단되므로 이것이 안정 한계속도이다.

자유진동 해석 결과 안정 한계 속도비가 $\omega/\omega_k = 1.9$ 이므로 안정 한계속도는 대략 9250rpm이다. 따라서 회전 속도가 각각 9200 rpm과 9300rpm일 경우의 과도진동 해석을 수행하여 얻은 첫번째 베어링 내의 진동궤적을 Fig.6에 그려 나타내었다.

회전속도가 9200rpm의 경우에 그림을 살펴보면 회전속의 3회전에 대한 진동궤적이 대략 하나의 전체 진동 궤적을 그리면서 위상이 계속해서 위상이 조금씩 변화하지만 전체적인

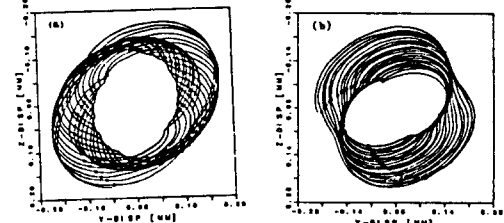


Fig. 6 Transient response orbit in the first bearing of the centrifugal fan at (a) 9200 rpm, (b) 9300 rpm

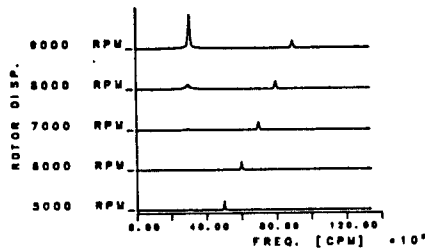


Fig. 7 FFT analysis at 5000, 6000, 7000, 8000 and 9000 rpm

진동 제척의 크기는 시간이 지남에 따라 일정한 범위내에 존재하여 계가 아직 안정상태에 있음을 보여줌을 알 수 있다. 그에 반해 회전속도 9300rpm의 경우에는 회전속 3회전에 대한 진동제척이 전체 한 회전의 진동제척을 그리면서 그 크기가 시간이 지남에 따라 발산하는 모습을 보여 계가 불안정함을 알 수 있다.

Fig.7에는 5000 rpm - 9000 rpm 회전수에서 과도진동 해석을 수행하고 첫번째 베어링 부위에서 진동 제척을 얻은 후 그에 대한 이산화 FFT해석을 수행한 결과가 그려 나타나 있다. 처음에 나타난 피크가 계의 고유진동수를 나타내고 있으며, 이것은 Fig.7에서 보는 바와 같이 자유진동 해석에서 얻어진 두번째 고유진동수 $v=0.6716 \times \omega_k$ 즉 3270rpm이다. 두번째의 피크는 강제진동에 의한 진폭으로서 과도진동 해석에서 나타난 진동제척의 크기이다.

원심 송풍기의 운전에 있어서 원심송풍기의 임펠러에 작용하는 압축력을 $P = 600 \text{ N}$ 으로 하고 토크를 $T = 2000 \text{ Nm}$ 로 설정하여 강제진동 해석을 수행한 결과 공진속도를 약간 저감시키는 것 외에 전체적인 진폭크기에 별 영향이 없었다. 또한 자유진동 해석을 수행한 결과 가장 낮은 1차 고유치는 약간 높아지며 계의 불안정성을 야기하는 2차 고유치는 낮아져 공진속도와 안정 한계속도가 약 200 rpm 정도 낮아짐을 알 수 있었다.

이와 같은 현상은 과도진동 해석을 수행한 결과로도 확인될 수 있었다. Fig.8의 왼쪽에는 압축력과 토크를 고려한 과도진동 해석의 결과로 나타난 첫번째 베어링 내의 저어널의 진동제척을 안정 한계속도 이전의 속도인 8800 rpm에서 그려 나타난 것인데 그 형상은 압축력과 토크를 고려하지 않은 경우의 9000 rpm에서의 안정된 제척과 거의 같음을 알 수 있다.

이상의 결과로서 저어널 베어링에 지지된 회전축 계에 있어서 압축력과 토크 중에서 특히 토크의 고려는 안정 한계속도를 낮추는 역할을 한다는 것으로 판단된다.

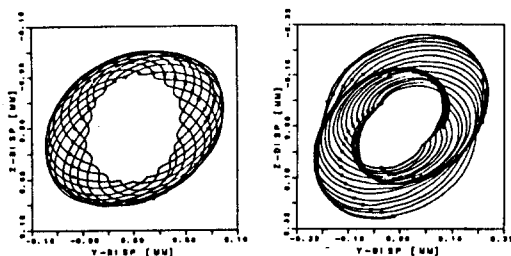


Fig. 8 Transient response orbit in the first bearing of the centrifugal fan at (a) 8800 rpm (b) 9000 rpm when axial force $P = 600 \text{ [N]}$ and Torque $T = 2000 \text{ [Nm]}$

5. 결론

본 연구를 통하여 일반적인 형상을 갖는 회전축의 휨 진동 해석 프로그램을 개발하였고, 부수적인 인자로 강성 및 감쇠특성, 전단변형 및 회전 관성 모멘트, 자이로 스코우프 효과, 등기 및 비등기 가진 그리고 회전속도의 가속 및 감속효과를 고려하였으며, 특히 축 방향 하중 및 토크를 고려하였다.

축 방향 하중과 토크에 의한 영향을 고려하기 위하여 Cayley-Hamilton 이론을 사용하여 기존의 전달 행렬을 재구성하였다.

자유진동 해석을 위한 고유치해석으로 Hansen-Patrick 방법을 사용하였으며, 이는 수렴성과 안정성이 좋아 근을 찾는 데 평균 5-6회 정도로 수렴이 되었다. 그리고 과도진동 해석을 위한 수치적분시 ρ -family 방법을 사용하였으며, 이는 수렴성과 안정성이 좋아 평균 2바퀴의 적분으로 제자리를 찾아갔으며 기존에 흔히 쓰이는 Newmark β 방법 보다 좋은 결과를 얻을 수 있었다. 과도진동 해석을 통하여 얻은 회전축의 진동 제척을 이산화 FFT 처리를 하여 강제 진동에 섞여서 나타날 수 있는 자유진동의 주파수를 알아낼 수 있게 하여 프로그램의 검산 기능을 추가하였다.

축 방향 하중과 토크에 의한 영향을 저어널 베어링으로 지지된 실제 산업용 기계에서 발생할 수 있는 현실적인 수치로 가정하고 그 영향을 계산하였는데 송풍기 모델에서는 안정 한계속도가 200 rpm 정도 낮아짐을 알 수 있었다. 이는 실제 산업용 기계에서 가능한 값만을 적용하였을 때의 경우이며, 비정상적으로 강한 압축력과 토크가 작용할 경우에는 회전축의 고유 진동수가 감소하고, 안정 한계속도가 낮아지는 경향이 있었다.

참고 문헌

1. 홍장표, 1990, "축 방향 하중과 토크를 고려한 회전축의 휨진동 해석", 서울대학교 박사학위논문
2. Yim, K.B., Noah, S.T. and Vance, J.M., 1986, "Effect of Tangential Torque on the Dynamics of Flexible Rotors", J. of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol.53., Sept., pp.711-718.
3. Pestel, E.C. and Leckie, F.A., 1963, "Matrix Methods in Elastomechanics", McGraw-Hill Book Company.
4. 한동철, 1985, "부수적인 영향을 고려한 일반적인 회전축의 휨진동에 관한연구", 대한기계학회 논문집, 제 9권, 제 1호, pp.81-90.
5. Hansen, E. and Patrick, M., 1977, "A Family of Root Finding Methods", Numer. Math. Vol.27, pp.257-269.
6. Buzzi, G. and Anderheggen, E., 1982, "The ρ -Family Algorithms for Time-Step Integration with Improved Numerical Dissipation", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, pp.537-550.
7. Cooley, J.W. and Turkey, J.W., 1965, "An Algorithm For Machine Calculation of Complex Fourier Series" Math. Computation, April, Vol. 19, pp.297-301.