

영구자석전동기의 코깅토크저감을 위한  
민감도에 의한 형상최적화

박일한, 이범택, 한송엽  
서울대학교 전기공학과

Shape Optimization for Reduction of Cogging Torque  
in Permanent Magnet Motor by Sensitivity Analysis

Park Il-han, Lee Beom-taek, Hahn Song-yop  
Seoul National University

Abstract - In this paper, in order to reduce the cogging torque in a permanent motor, a method to optimize the shape of permanent magnet and iron pole is presented. Because the cogging torque comes from the irregular system energy variation according to the rotor position, system energy variation is taken as object function and the object function is minimized to optimize the shape. The positions of permanent magnet surface and iron pole surface are chosen as design parameters and sensitivity of object function with respect to design parameter is calculated. The shape is changed according to sensitivity. Sensitivity can be generated by methods that exploit the FEM formulation. A numerical example shows that about 90% of the original cogging torque is reduced.

1. 서론

전자소자 (electromagnetic device) 의 응용이 광범해짐에 따라 소형화, 경량화, 고성능화, 고효율화 등을 위한 최적설계의 필요성은 증대하고 있다. 하지만 현재까지는 전자소자의 설계시 주로 퍼미언스법 또는 실험식을 이용하여 기본적인 설계를 한 후 유한요소법 등 각종 해석법을 통하여 성능을 평가하고 이것이 설계사양에 미치지 못하면 경험에 의한 시행착오를 거쳐 설계를 변경하여 왔다. 이와같은 설계과정은 서로 복잡한 관계를 갖는 설계변수(parameter) 들을 시행착오적인 방법으로 결정하는 것이기 때문에 그 과정이 체계적이지 못하여 많은 시간을 요할 뿐 아니라 설계목적에 만족하는 최적의 설계변수를 찾는 것 자체가 불확실하게 되는 문제점이 있다. 따라서 본 연구에서는 설계치의 변화가 동작특성에 어떤 영향을 미치는지에 대한 정보 즉 설계민감도를 기존의 유한요소법을 이용하여 도출하고(1)~(4) 일어진 설계민감도를 최적화 알고리즘에 도입하여 개선된 설계변수를 반복적으로 찾아낸다. 영구자석전동기에서의 코깅토크는 영구자석과 철자극 (iron pole) 의 상대적 위치에 따른 시스템에너지 변동에서 발생한다고 볼 수 있기 때문에 영구자석이나 철자극의 형상을 적당히 변형시키면 시스템에너지의 변

동을 감소시킬 수 있고 그에 따라 코깅토크도 감소된다는데 착안하였다. 따라서 목적함수를 시스템에너지의 변동으로 하고 이를 최소화하도록 민감도를 이용한 최적화 과정을 수행한다. 이러한 영구자석전동기의 형상최적화 과정은 그림 1의 흐름도에서 볼 수 있다.

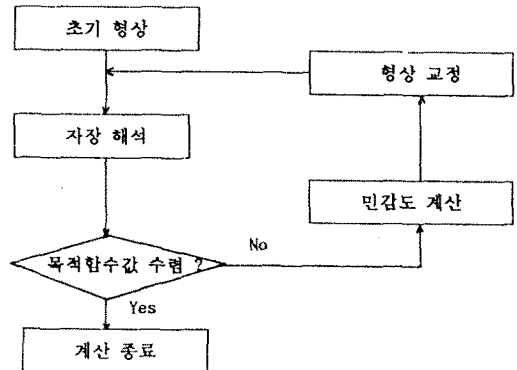


그림 1. 형상최적화의 흐름도

2. 영구자석전동기의 코깅토크저감 문제

영구자석전동기에서의 코깅토크는 주토크 (main torque)에 있어서 토크진동을 발생하기 때문에 기계적 진동의 원인이 되고 정속도 운전의 방해가 되며 영구자석전동기의 대형화에 있어서 장애가 된다. 그런데, 영구자석전동기에서 코깅토크는 회전자 변위에 대한 전동기내의 자기에너지 변화로 나타낼 수 있다. 즉, 자기에너지가 회전자의 위치에 관계없이 일정하면 코깅토크는 소멸하게 된다. 따라서 목적함수를 다음과 같이 정의한다.

$$F = \sum_{i=1}^{nr} [W_i - W_0]^2 \quad (1)$$

여기서

nr : 시스템에너지가 계산되는 총 회전자 위치수

W<sub>i</sub> : 회전자의 i번째 위치에서의 시스템에너지

W<sub>0</sub> : nr번의 회전자 위치에서 시스템에너지의 평균값

이 목적함수의 민감도는 다음과 같다.

$$\frac{dF}{dp_j} = 2 \sum_{i=1}^{nr} [W_i - W_0] \frac{dW_i}{dp_j} \quad j = 1, 2, \dots, np \quad (2)$$

윗 식 (2)의 우변의 시스템에너지에 대한 설계변수의 미분은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dW_i}{dp_j} = \frac{\partial W_i}{\partial p_j} + \frac{\partial W_i}{\partial A} \cdot \frac{\partial A}{\partial p_j} \quad (3)$$

그런데 윗 식 우변의 둘째 항에서의 상태변수 A에 대한  $W_i$ 의 편미분은 영이다. 왜냐하면 이는 에너지범함수의 극치조건을 만족하기 때문이다. 따라서 여기서는 상태변수 즉, 자기벡터 포텐셜의 설계변수에 대한 미분을 간접적으로 계산하기 위한 보조변수식을 도입할 필요가 없다. 그러므로

$$\frac{dW_i}{dp_j} = \frac{\partial W_i}{\partial p_j} \quad (4)$$

먼저 철과 공기에서의 에너지밀도를 다음과 같이 놓는다.

$$U_m = \frac{1}{2} \nu B^2 \quad (5)$$

그리고 영구자석에서의 에너지밀도를 식 (6)과 그림 2로써 모델링한다.

$$U_m = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2 + C \\ = \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right)^2 + C \quad (6)$$

여기서 C : 초기자화 에너지 밀도 5)

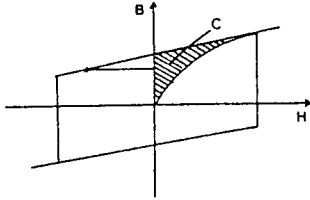


그림 2. B-H curve의 모델링

따라서 i번째 회전자 위치에서 시스템에너지는 다음과 같다.

$$W_i = \int_{R_1} U_m dx dy + \int_{R_2} U_m dx dy \\ = \int_{R_1} \left[ \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right)^2 + C \right] dx dy + \frac{1}{2} \int_{R_2} \nu B^2 dx dy \quad (7)$$

여기서  $R_1$ 은 영구자석 영역,  $R_2$ 는 철과 공기 영역이다.

윗 식을 극좌표계에서 요소에 대한 적분으로 표현하면 다음과 같다.

$$W_i = \sum_e \left[ \int_{R_1} \left[ \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right)^2 + C \right] |G|^* dudv + \frac{1}{2} \int_{R_2} \nu B^2 |G|^* dudv \right] \quad (8)$$

여기서  $|G|^*$ 은 한 요소의 Jacobian이다.

윗 식 (8)을 설계변수에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{dW_i}{dp_j} = \sum_e \left[ \int_{R_1} \left[ \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial p_j} |G|^* + \left[ \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right)^2 + C \right] \frac{\partial |G|^*}{\partial p_j} \right] dudv + \int_{R_2} \left[ \nu B \cdot \frac{\partial B}{\partial p_j} |G|^* + \frac{1}{2} \nu B^2 \frac{\partial |G|^*}{\partial p_j} \right] dudv \right] \quad (9)$$

윗 식(9)에서 설계변수에 대한 자속밀도의 편미분이 포함된

항들은 설계변수가 변함에 따라 요소내의 에너지밀도 변화에 의하여 기여하는 것들이고, 설계변수에 대한 Jacobian의 편미분이 포함된 항들은 설계변수의 변화에 따른 요소의 형상 변화에 의하여 에너지변화에 기여하는 항들이다. 그리고 식 (9)를 식 (2)에 대입하면 민감도가 구해진다.

이와같이 얻어진 민감도는 최적화 알고리즘에 도입되어 최적의 설계변수를 찾게된다. 최적화알고리즘으로 각 반복 계산에서 최대경사 (steepest descent)를 탐색방향 (search direction)으로 택하였기 때문에 앞에서 얻어진 민감도를 그대로 사용한다. 그리고 각 반복계산마다 진행거리 (step size)는 시스템에너지를 설계변수에 대하여 선형화함으로써 최적의 진행거리를 구한다.

정규탐색방향 (normalized search direction) [S]는 다음과 같다.

$$[S] = \frac{dF}{d[p]} / \left\| \frac{dF}{d[p]} \right\| \quad (10)$$

$$\text{여기서} \quad \left\| \frac{dF}{d[p]} \right\| = \left[ \sum_{i=1}^{np} \left( \frac{dF}{dp_i} \right)^2 \right]^{1/2}$$

그리고 진행거리는 다음의 과정으로 구한다.

$$\Delta W_i = \frac{dW_i}{d[p]} \cdot l [S] \\ = k_i l \quad (11)$$

여기서

$$k_i = \frac{dW_i}{d[p]} \cdot [S] \\ = 2 \left\| \frac{dF}{d[p]} \right\|^{-1} \frac{dW_i}{d[p]} \cdot \sum_{j=1}^{np} [W_j - W_0] \frac{dW_j}{d[p]}$$

즉 [S] 방향으로 1 만큼 이동했을 때 목적함수는 다음과 같이 1의 2차함수로 표현된다.

$$F_l = \sum_{j=1}^{np} [W_j + k_i l - W_0]^2 \quad (12)$$

따라서 윗식이 최소가 되는 최적의 진행거리  $l_{op}$ 를 다음 식에서 얻을 수 있다.

$$\frac{dF_l}{dl} = 0 \quad (13)$$

$$l_{op} = \left[ \sum_{i=1}^{nr} k_i (W_i - W_0) \right] / \left[ \sum_{i=1}^{nr} k_i^2 \right] \quad (14)$$

### 3. 적용 사례

해석모델은 그림 3과 같은 2개의 영구자석과 3개의 철자극이 있는 직류전동기를 택하였다. 설계변수는 철자극 표면과 영구자석 표면의 각각 10개와 13개 절점위치의 반경이다. 요소는 삼각형이고 형상함수는 2차함수이며 미지수의 수는 약 1700개로 하였다. 그리고 시스템에너지가 계산되는 회전자 위치의 총 수는 7개로 회전자가 5° 씩 돌며 계산된다. 이는 시스템에너지가 60° 마다 같은 모양으로 반복되고 60° 내에서도 대칭이기 때문에 30° 내에서의 계산으로 충분하다. 설계변수의 구속조건으로서 철자극 표면은 반경이 줄어드는 방향으로만 변형되고 영구자석 표면에서는 반경이 늘어나는 방향으로만 변형된다. 즉 그림 3에서 철자극과 영구자석이 짝이는 방향으로만 변형된다. 최적화하기 전 그림 3의 초기

설계에서의 회전자 위치에 대한 시스템에너지 변화와 그때의 코깅토포크의 변화는 그림 4과 그림 5에서 볼 수 있다. 그리고 코깅토포크의 계산은 가상변위법 (virtual work method) 을 이용하였다. 6)

Y : 요오크  
M : 영구자석  
P : 철자극  
N : 설계변수로 지정된 절점

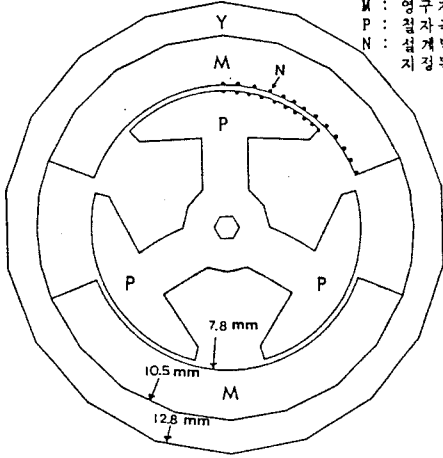


그림 3 영구자석 전동기의 초기설계모델

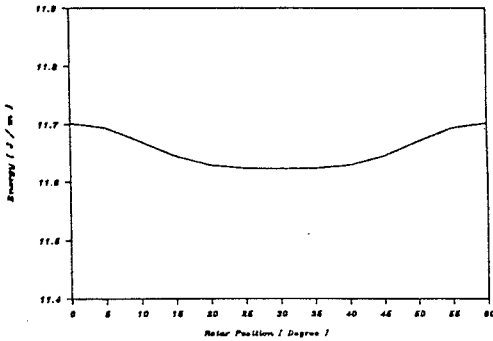


그림 4 초기설계시 시스템에너지 변화

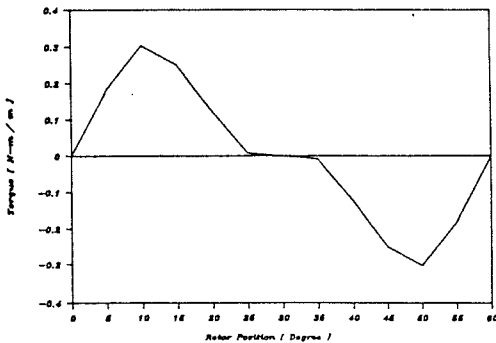


그림 5 초기설계시 코깅토포크 변화

첫째, 철자극 표면만 변형될 경우 한 철자극 표면의 반쪽에 10개의 절점위치에 대한 반경의 값을 설계변수로 하였고 이 설계변수는 절점의 반경이 초기설계치의 반경보다 적어야 한다는 구속조건을 주었다. 최적화과정에서 15번의 반복계산에서 철자극의 모양이 수렴하였는데 그림 6과 같이 변형된다. 그리고 이때의 시스템에너지와 코깅토포크는 그림 7 및 그림 8과 같다. 최대 코깅토포크값은 초기설계치의 약 반으로 감소한 것을 볼 수 있다.

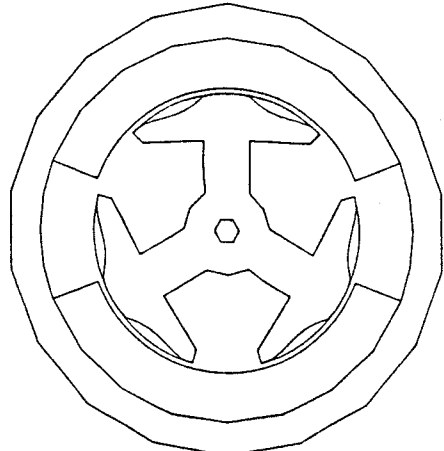


그림 6 철 자극의 변형된 모양

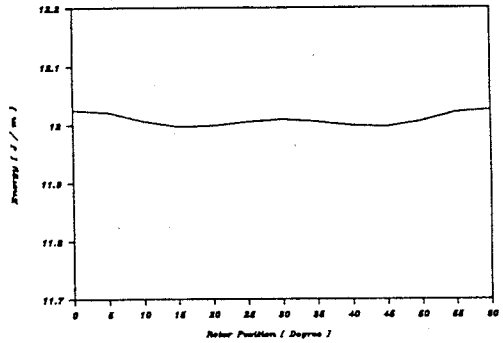


그림 7 시스템에너지 변화

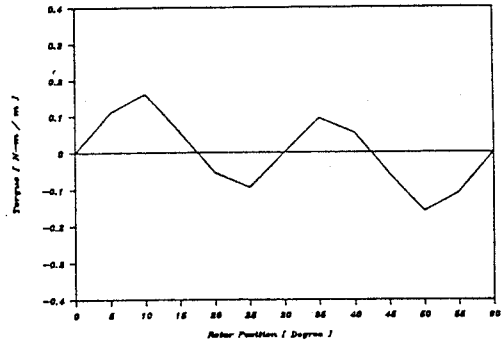


그림 8 코깅토포크 변화

둘째, 영구자석 표면만 변형될 경우 한 영구자석 표면의 반쪽에 13개의 절점에 대한 반경의 값을 설계변수로 하였고 절점의 반경이 초기설계치의 반경보다 커야한다는 구속조건을 주었다. 15번 반복계산한 후 영구자석표면의 모양이 수렴하였는데 그림 9와 같이 변형된다. 그림 10는 반복계산 수에 따른 시스템에너지의 변화를 나타내는데, 반복계산 수의 증가에 따라 시스템에너지가 상당히 평탄해지는 것을 볼 수 있다. 그리고 이 때 코깅토포크의 반복계산 수에 따른 변화는 그림 11에서 볼 수 있는데 반복계산 수의 증가에 따라 최대 코깅토포크는 감소하고 고조파성분만 남게 됨을 볼 수 있다. 15번의 반복계산 후에 최대 코깅토포크는 초기설계치의 약 10%정도가 되었다.

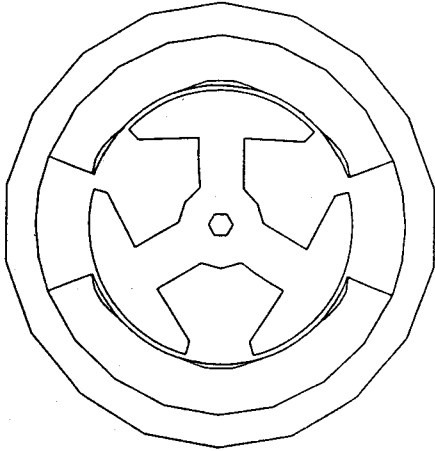


그림 9 영구자석의 변형된 모양

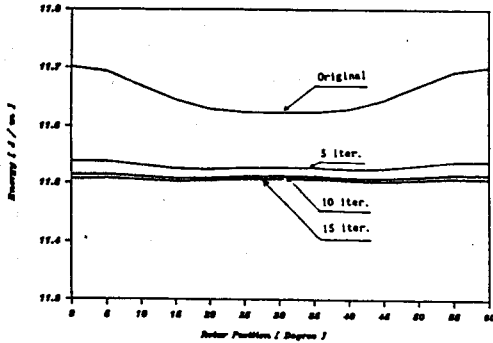


그림 10 반복계산에 따른 시스템에너지의 변화

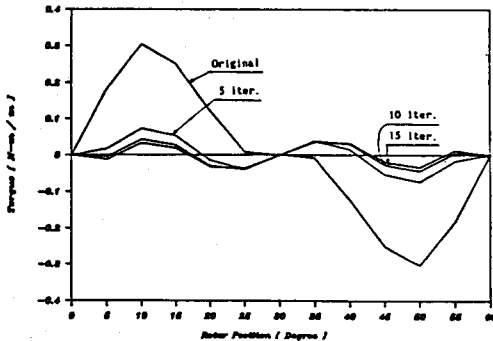


그림 11 반복계산에 따른 코깅토크의 변화

셋째, 철자극 표면과 영구자석 표면이 동시에 변형될 경우 앞의 두 경우의 각 설계변수를 동시에 설계변수로 하여 최적 형상을 계산하여 보았다. 그 결과는 그림 9와 대동소이하게 나타났는데 이것은 영구자석축이 민감도가 높기 때문에 철자극은 거의 변형되지 않음을 뜻한다. 따라서 코깅토크도 그림 11과 비슷한 결과를 얻었다.

#### 4. 결론

본 적용 예에서는 영구자석 전동기의 코깅토크 저감을 위한 영구자석 또는 철자극의 형상을 민감도 계산과 여기서

구한 민감도계수 및 목적함수값을 최적화 알고리즘에 적용하여 최적화하는 기법을 다루었다. 영구자석 전동기의 코깅토크는 회전자 위치에 따른 전동기내의 자기에너지의 변화때문에 발생하므로 이 자기에너지를 목적함수로 정의하고 이 자기에너지가 회전자의 위치에 관계없이 일정하게 되는 영구자석 또는 철자극의 형상을 구하였다. 위의 결과로부터 민감도해석과 최적화 알고리즘을 이용하여 반복적으로 수행되는 최적설계기법의 유용성을 검증하였다.

#### 참고문헌

- 1) H.M. Adelman and R.T. Haftka, "Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems", AIAA Journal, Vol.24, No.5, MAY 1986
- 2) S.Gitisastro, J.L.Coulomb and J.C.Sabonnadiere, "Performance Derivative Calculations and Optimization", IEEE Trans. on Magnetics, Vol.25, No.4, July 1989
- 3) 박일한, "전자소자의 형상최적화를 위한 민감도해석", 공학박사학위논문, 서울대, 전기공학과, 1990
- 4) Il-han Park, Beom-taek Lee and Song-yop Hahn, " Pole Shape Optimization for Reduction of Cogging Torque by Sensitivity Analysis", COMPEL, Vol.9, No.5, 1990
- 5) B.D.Cullity, "Introduction to Magnetic Materials", Addison Wesley, pp.229 - 233, 1972
- 6) J.L.Coulomb, " A Methodology for the Determination of Global Electromechanical Quantities from a Finite Element Analysis and Its Application to the Evaluation of Magnetic Forces, Torques and Stiffness ", IEEE Trans. MAG-19, No.6, Nov. 1983