

적용 경계요소법을 이용한 2차원 정자장 해석

고 창 섭 전 기 역 한 송 업 정 현 교*
서울대학교 공과대학 전기공학과 *강원대 전기공학과

2-D Magnetostatic Field Analysis Using Adaptive Boundary Element Method

Chang-Seop Koh Ki-Eock Jeon Song-Yop Hahn Hyun-Kyo Jung*
Dept. of Electrical Engineering, Seoul National University
*Dept. of Electrical Engineering, KangWon National University

Abstract

Adaptive mesh refinement scheme is incorporated with the Boundary Element Method (BEM) in order to get accurate solution with relatively fewer unknowns for the case of magnetostatic field analysis and a new and simple posteriori local error estimation method is presented. The local error is defined as integration over the element of the difference between solutions acquired using second order and first order interpolation function and is used as the criterion for mesh refinement at given grid. Case study for two dimensional problems with singular point reveals that meshes are concentrated on the neighbor of singular point and the error is decreased gradually and the solutions calculated on the domain are converged to the analytic solution as the number of unknowns increases. The adaptive mesh gives much better rate of convergence in global errors than the uniform mesh.

1. 序論

電氣工學의 諸般問題에 電磁場 解析을 위하여 有限 要素法이 導入된 이래, 각종 電氣器機들의 特性을 解析 하고, 設計하는데 커다란 發展이 있었다. 특히 近來에 들어서는 自動要素分割 (Automatic Mesh generation) 과 適應要素分割 (Adaptive Mesh generation) 에 대한 研究가 成功的으로 進行되어 [8, 9, 10] 實際의 工學問題 解析에 適用하기가 매우 容易해졌다. 그러나 有限要素法은 開領域 모델 解析時와 같이 解析領域과 境界條件의 人爲的인 設定이 必要한 경우, 解의 正確度에 관한 問題가 發生한다. 한편, 境界要素法은 解析領域의

境界面을 離散化하기 때문에 要素分割이 比較的 容易하고, 解析領域의 人爲的인 設定으로 인한 誤差를 隨伴하지 않으며 解析에 필요한 未知 變數를 줄일 수 있어 最近들어 境界要素法에 대한 研究가 널리 進行中이다 [5, 6, 7].

境界要素法이 갖는 短點으로는, 最終的으로 얻어지는 시스템 行列 方程式의 係數行列이 非對稱 (Non-Symmetric) 이며, 거의 완전 行列 (Full Matrix) 이기 때문에 行列方程式을 푸는데 많은 努力이 들고 係數行列의 組立時 數值積分過程에서 比較的 많은 時間이 걸린다는 것이다. 이러한 問題點은 要素數가 增加함에 따라 더욱 심각해진다[7]. 따라서, 境界要素法이 實際의 工學問題에 쉽게 適用되기 위하여는 要素의 數를 效率的으로 削減하여 行列方程式의 係數行列의 次數를 낮추는 동시에 解의 精度를 높여야 한다.

본 論文에서는 이러한 問題點을 해결하기 위하여 適應 境界要素法 (Adaptive Boundary Element Method)[1, 2, 4]을 提示하였다. 適應境界要素法의 適用過程은 그림 1에 나타난 바와같이 시스템 行列方程式의 組立 및 解析, 각 要素別 部分誤差(Local Error)의 推定, 그리고 要素 再分割 過程으로 構成된다. 이때, 最適 要素網의 형성 및 適應境界要素法 전체의 效率에 가장 큰 影響을 주는 過程은 要素別 部分誤差의 推定過程이다. 이에 대한 論文이 이미 수 편 發表되어 있으나[1, 2, 3, 4], 이들 方法에서는 推定誤差를 計算하는데 時間이 많이 걸리고 解析領域이 單一 媒質로 構成되어 있는 경우만을 다루었기 때문에 實際의 工學모델을 解析하는데 適用하기는 不適合하다. 본 論文에서는 推定誤差 計算時間이 짧고 解析領域이 多媒質로 構成된 경우에도 適用될 수 있는 새로운 誤差 推定法을 提示하고 몇가지 모델에 適用하여 그 妥當性을 檢討하였다.

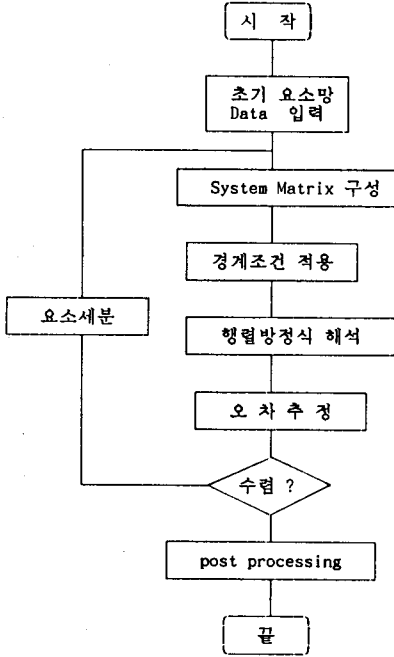


그림 1. 경계요소법의 적용과정.
Fig. 1. Flow Chart of Adaptive B.E.M.

2. 경계요소 定式化

靜磁場 問題 解析時 그림 2와 같이 주어지는 解析 모델에 대하여 媒質이 線形, 等方性이고 解析變數가 磁氣 벡터 포텐셜(Magnetic Vector Potential) \vec{A} 이면 支配方程式과 境界條件은 다음과 같이 주어진다 [11].

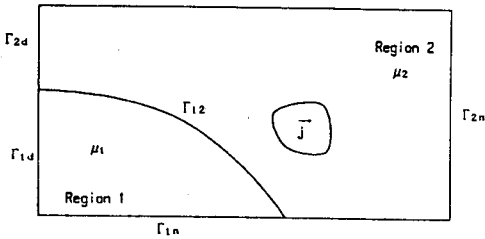


그림 2. 정자장 해석 모델.
Fig. 2. Magnetostatic Model.

$$\frac{1}{\mu_1} \nabla^2 A_1(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in R_1 \quad (1-a)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \nabla^2 A_2(\vec{r}) = -\vec{j}, \quad \vec{r} \in R_2 \quad (1-b)$$

$$A_1(\vec{r}) = C_1, \quad \vec{r} \in \Gamma_{1d} \quad (2-a)$$

$$A_2(\vec{r}) = C_2, \quad \vec{r} \in \Gamma_{2d} \quad (2-b)$$

$$\frac{\partial A_1(\vec{r})}{\partial n} = \frac{\partial A_2(\vec{r})}{\partial n} = 0, \quad \vec{r} \in \Gamma_{1n} \cup \Gamma_{2n} \quad (2-c)$$

$$H_{1t}(\vec{r}) = H_{2t}(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \Gamma_{12} \quad (2-d)$$

$$B_{1n}(\vec{r}) = B_{2n}(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \Gamma_{12} \quad (2-e)$$

여기서, $A_1(\vec{r}) = A_{1z}(\vec{r})$; A_1 의 Z-成分
 μ_1, μ_2 : 領域 1, 2의 透磁率 [H/m]
 \vec{j} : 電流密度 [A/m²]
 \vec{n} : 單位 外向 法線 벡터
 $\frac{\partial A_i}{\partial n}$: 포텐셜의 法線 微分值
 H_{1t} : 磁界의 세기의 接線 成分
 B_{1n} : 磁束 密度의 法線 成分

媒質의 境界面에서 \vec{H} 와 \vec{B} 의 連續 條件인 式 (2-d), (2-e)는 벡터 포텐셜 $A_1(\vec{r})$ 로 나타내면

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1(\vec{r})}{\partial n} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2(\vec{r})}{\partial n}, \quad \vec{r} \in \Gamma_{12} \quad (3-a)$$

$$A_1(\vec{r}) = A_2(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \Gamma_{12} \quad (3-b)$$

이 된다. Green의 定理를 利用하여 境界積分方程式 (Boundary Integral Equation)을 誘導하고 式 (3)을 代入하면 各 領域의 境界에 대하여[5],

1) $\vec{r} \in \Gamma_1$ 일때

$$C_1(\vec{r})A(\vec{r}) + \int_{\Gamma_1} \left[A(\vec{r}') \frac{\partial G'(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} - G'(\vec{r}, \vec{r}') q(\vec{r}') \right] d\Gamma + \int_{\Gamma_{12}} \left[A(\vec{r}') \frac{\partial G'(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} + \frac{1}{\mu} G'(\vec{r}, \vec{r}') q(\vec{r}') \right] d\Gamma = 0 \quad (4-a)$$

2) $\vec{r} \in \Gamma_2$ 일때

$$C_2(\vec{r})A(\vec{r}) + \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_{12}} \left[A(\vec{r}') \frac{\partial G'(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} - G'(\vec{r}, \vec{r}') q(\vec{r}') \right] d\Gamma = \mu_2 \int_{R_s} \vec{j} \cdot \vec{G}'(\vec{r}, \vec{r}') dR \quad (4-b)$$

3) $\vec{r} \in \Gamma_{12}$ 일때

$$C_1(\vec{r})A(\vec{r}) + \int_{\Gamma_1} \left[A(\vec{r}') \frac{\partial G'(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} - G'(\vec{r}, \vec{r}') q(\vec{r}') \right] d\Gamma + \int_{\Gamma_{12}} \left[A(\vec{r}') \frac{\partial G'(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} + \frac{1}{\mu} G'(\vec{r}, \vec{r}') q(\vec{r}') \right] d\Gamma = 0 \quad (4-a)$$

$$C_2(\vec{r})A(\vec{r}) + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_{12}} \left[A(\vec{r}') \frac{\partial G'(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} - G'(\vec{r}, \vec{r}') q(\vec{r}') \right] d\Gamma = \mu_2 \int_{R_s} \vec{j} \cdot \vec{G}'(\vec{r}, \vec{r}') dR \quad (4-b)$$

가 얻어지며 여기서

$$G'(\vec{r}, \vec{r}') = -\ln |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (5-a)$$

$$\frac{\partial G'(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \quad (5-b)$$

이고, $\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, \vec{r} 및 \vec{r}' 는 각각 觀測點과 磁界源이 存在 하는 點이며

$\vec{q}(\vec{r}) = \frac{\partial A(\vec{r})}{\partial n}$, $\Gamma_i = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{id}$ 이고 R_s 는 電流領域 이다. 式(4)의 $C_i(\vec{r})$ 은 點 \vec{r} 에서의 内部角에 의해 결정 되는 常數이다[7].

式(4)를 그림 3에서와 같이 포텐셜 A에 대하여는 2次 補間函數를, 포텐셜의 法線 微分値 q에 대하여는 2개의 要素를 취하고 常數函數를 사용하여 離散化하고 각 要素의 중심에서 離散化한 式이 성립한다고 하면, $[A][x] = [B]$ 형태의 行列方程式을 얻게 되며 [5, 12], 境界條件 (2-a), (2-b), (2-c)式을 代入하면 最終的인 行列方程式을 얻게 된다. 이때 式(4-b)의 電流를 포함하는 項은 電流 領域을 三角形 小領域으로 分割하고, 각 要素에서 J_s 가 一定한것으로 보아 離散化한다 [5]. 行列方程式의 解法으로는 가우스 消去法을 使用한다.

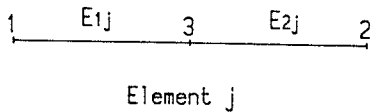


그림 3. 요소와 절점.
Fig. 3. Element and Nodes.

3. 誤差推定

領域내의 任意的 點에서 벡터 포텐셜 A는 境界에서의 A 및 q의 境界積分으로 얻어지므로, 境界에서의 A 및 q를 精確하게 계산하는 것이 중요하다. 따라서 要素細分을 위한 誤差는 解析變數 A 및 q의 誤差로서 構成되고 Error Norm을 다음과 같이 定意한다.

$$e = \left\{ \sum_{i=1}^N e_i \right\}^{1/2} \quad (7-a)$$

$$e_i = e_{i1} + e_{i2} \quad (7-b)$$

$$e_{i1} = \int \Delta A^2 d\Gamma \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (7-c)$$

$$e_{i2} = \int \Delta q^2 d\Gamma \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (7-d)$$

$$\Delta A = |A_{cal} - A_{exc}| \quad (8-a)$$

$$\Delta q = |q_{cal} - q_{exc}| \quad (8-b)$$

여기서, N은 전체 要素數이고 A_{cal} , q_{cal} 은 A 및 q의 境界要素法에 의하여 計算된 값이고, A_{exc} , q_{exc} 는 嚴密解이다. 式(7)의 e_i 는 각要素마다 計算하여 要素細分時 細分度의 指標가 되도록 한다. 式(7)과 (8)의 A_{exc} , 와 q_{exc} 는 實際問題 解析에서는 알 수 없으므로 각각 推定值 A_{est} , q_{est} 를 使用하게 되며, 이들은 다음과 같이 推定한다.

우선 벡터 포텐셜 A에 대하여는 그림3과 같이 要素내에 3개의 節點 (1, 3, 2)을 갖는 2次 補間函數를 써서 구한 解와, 2개의 節點 (1, 2)만을 갖는 1次 補間函數를 써서 구한 解를 比較하면 前者의 解가 精確하다. 따라서, 前者의 解를 A 및 q의 推定值로 하고 後者의 解를 A 및 q의 計算된 값이라고 한다. 그러나 이들 두가지 경우를 각각 풀어서 解를 比較하는 것은 計算時間 및 컴퓨터 記憶容量이 늘어나 非能率的이며, 더우기 節點 1, 2에만 局限하면 1次 및 2次 補間函數를 써서 구한 解가 거의 비슷하므로 [8], 2次 補間函數를 써서 얻은 결과중 節點 1, 2에서의 값만을 택하고 1次 函數로 補間한 結果로 計算된 값 A_{cal} , q_{cal} 를 대신하였다. 要素内에서의 A_{cal} , A_{est} 는 그림 4 a)에 각각 點線과 實線으로 나타나 있으며 式(7-b), (8-a)를 이용하여 誤差를 計算하였다. 포텐셜의 法線微分値 q에 대하여는 그림 3의 要素 j를 E_{1j} , E_{2j} 의 2개의 小要素로 나누고 각 要素에 대하여 常數값으로 近似化 하여구한 解 $q(E_{1j})$, $q(E_{2j})$ 를 q_{est} 로 하고 $q(E_{1j})$ 와 $q(E_{2j})$ 의 平均值를 q_{cal} 로 하고 (그림 4-b) 式(7-c), (8-b)를 이용하여 誤差를 計算하였다.

要素細分은 誤差의 정도에 따라 1 ~ 4개의 要素로 細分 하였으며, 이때 細分 方法으로는 二分法 (Bi-section Method)[8, 10]을 使用하였다.

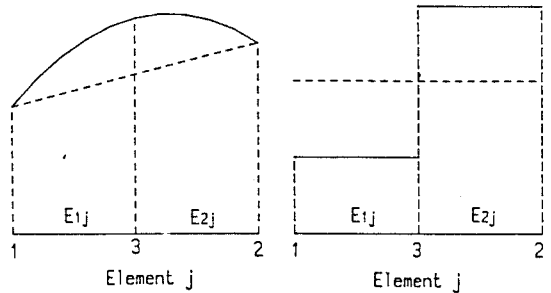


그림 4. A 및 q의 계산치 및 추정치.
Fig. 4. Calculated and estimated value of A and q.

4. 事例研究

본 알고리즘을 解析的인 解가 存在하고, 解析領域内에 特異點이 存在하여 要素分割이 힘든 경우에 適用하여 보았다. 適用모델의 解析領域은 그림 5와 같으며 支配方程式과 境界條件은 式(9)로 주어지며 領域内에서의 解析解는 式(9-b)가 된다.

$$\nabla^2 A(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in \Omega \quad (9-a)$$

$$A(\vec{r}) = A(r, 0) = r^{1/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \vec{r} \in \partial\Omega \quad (9-b)$$

$$\frac{\partial A(\vec{r})}{\partial n} = 0, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_1 \quad (9-c)$$

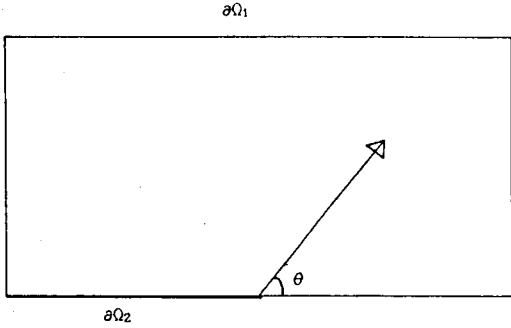


그림 5. 해석적인 해를 갖는 적용 모델.
Fig. 5. Model with Analytic solutions.

初期要素網과 計算된 磁束分布, 그리고 本 論文에서 提示한 適應境界要素法을 適用하여 發生된 要素網과 磁束分布를 그림 6에 나타내었다. 그림 6-a)에 나타나 있듯이 初期要素網은 포텐셜 A에 대하여는 11개의 2次要素, 포텐셜의 法線微分値 q에 대하여는 22개의 常數要素로 構成되어 있으며, 6-b)에서 보면 예상대로 特異點 附近에서 要素細分이 많이 進行되며 이에따라 磁束이 매끈해짐을 알 수 있다. 그림 6-c)는 領域內에서 磁束分布를 그리는 爲한 要素網이다.

그림 7은 適應要素分割한 경우와 均等要素分割한 경우의 推定誤差曲線을 나타낸것으로서, 오차 $\|e\|$ 가 節點數가 增加함에 따라 減少하는 過程을 보여준다. 여기서 推定誤差는

$$\|e\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[(A_{cal} - A_{ost})_i^2 + (q_{cal} - q_{ost})_i^2 \right]}$$

을 말하며 N은 전체 要素數이다. 그림에서 均等要素分割한 경우보다 適應要素分割한 경우가 誤差減少率이 顯著하게 큼을 알 수 있다. 그림 8은 그림 6-c)의 節點들에서 計算된 벡터 포텐셜 값이 解析解에 収斂하는 過程을 適應要素分割한 경우와 均等要素分割한 경우에 대하여 比較한 것으로 誤差는

$$\|e\| = \sqrt{\sum_{j=1}^N (A_c - A_o)_j^2}$$

여기서, A_c : 境界要素法으로 計算된 解

A_o : 解析解

N_i : 全體 節點數

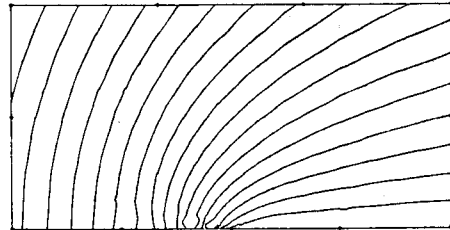
이며, 適應要素分割을 이용하면 比較的 적은 數의 未知數에서 精確한 解를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

그림 9는 本 알고리즘을 均等磁場內에 四角形 鐵 ($\mu_r = 500$)이 놓인 모델에 適用한 경우로서 모델의 對稱性을 利用하여 第 1 象限에 該當하는 領域만을 解析한 경우이다. 豫測되는 바와같이 鐵의 모서리 部分에 磁束이 集中되었고 그 部分의 要素가 細分됨을 알 수 있으며, 모서리 部分을 30배 확대한 그림을 그림9의 내부에 나타내었다. 또한, 鐵의 윗면은 磁束의 變化가 심한 部分으로 要素가 細分됨을 알 수 있다.

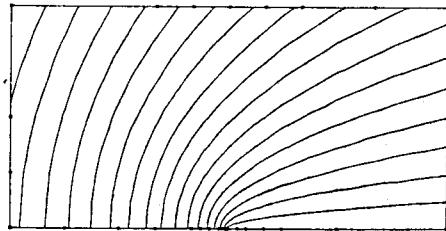
結論

本 研究에서는 適應境界要素法을 使用하여 2次元 靜磁場 問題를 解析하는 경우를 다루었으며, 이때 必要한 새로운 部分誤差 推定法을 提示하였다.

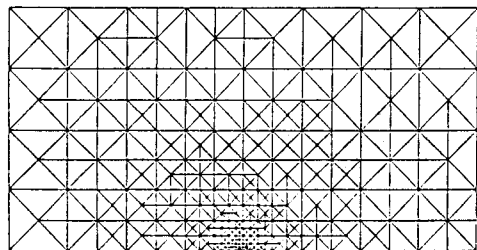
本 알고리즘을 몇가지 모델에 適用하여 本 結果 本 論文에서 提示한 適應要素分割法이 要素를 均等하게 分割하는 경우보다 같은 節點數에서 解의 正確度에 있어 精確한 有利함을 알았다. 또한 提示한 部分誤差 推定法의 妥當性도 立證하였다.



a) 초기요소망 (Unknowns = 44)



b) 최종결과 (Unknowns = 136)



c) 자속분포를 그리는 爲한 要素網

그림 6. 적용 요소분할 과정 및 자속분포.

Fig. 6. Adaptive mesh generation procedure and calculated flux lines.

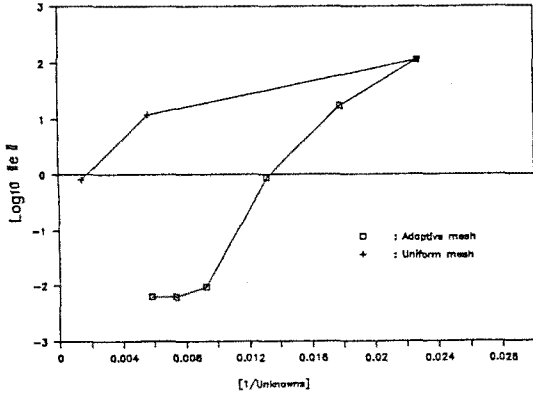


그림 7. 전체오차의 수렴비 특성.
Fig. 7. The rate of convergence of global error.

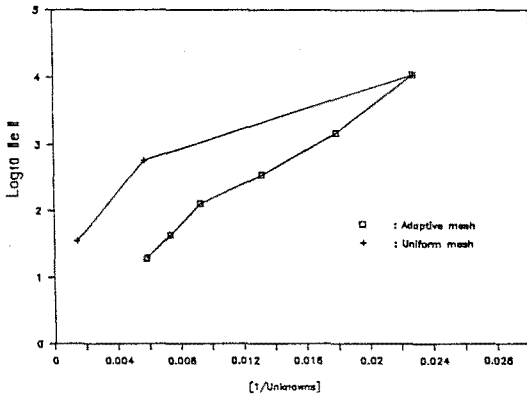


그림 8. 영역내에서 계산해의 수렴과정.
Fig. 8. Convergence of calculated solutions in region.

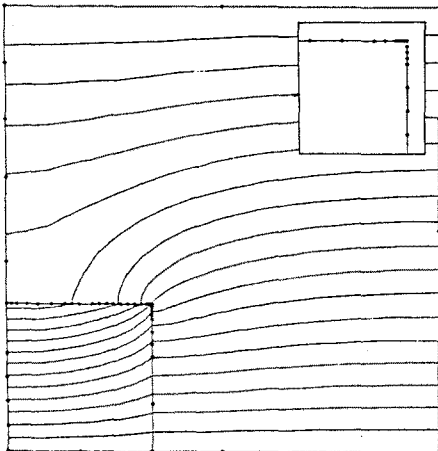


그림 9. 철이 있는 경우의 해석 모델.
Fig. 9. Model with iron in the uniform field.

參考文獻

[1] E. Alarcon, A. Pevter, "p-Adaptive Boundary Elements", Int. Journal for Numerical Method in Eng., Vol. 23, pp. 801-829, 1986.

[2] ERNST RANK, "Adaptive h-, p- and hp- Versions for Boundary Integral Element Method", Int. Journal for Numerical Method in Eng., Vol. 28, pp. 1335 - 1349, 1989.

[3] T. Takeda, T. Kuwahara, T. Miyata and M. Igarashi, "An Error Estimation of the Solution of Integral Equation Method", COMPUMAG, Tokyo, pp. 467-470, 1989.

[4] D.K. Park, S.Y. Lee, J.W. Ra, "Adaptive Mesh Refinement for Boundary Element Method and its Application to stripline Analysis", COMPUMAG, Tokyo, pp. 201-204, 1989.

[5] Brebbia C.A., The Boundary Element Method for Engineers, John Wiley & Sons Inc., New York, 1978.

[6] Brebbia C.A., Topics in Boundary Element Research, Vol. 6, Springer - Verlag, New York, 1989.

[7] Sompoth Peaiyound, Computational Aspects of the Boundary Element Method Applied to Two- and Three-Dimensional Magnetic Field Problems, PHD Dissertation, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, October 1987.

[8] 최 홍순, 적응요소분할을 위한 오차추정에 관한 연구, 석사학위논문, 서울대학교, 1986.

[9] J. Cendes, D.N. Sfanos, "Adaptive mesh refinement in the finite element computation of Magnetic field", IEEE. Trans. on Mag. Vol. MAG-21, No. 5, pp. 1811-1816 Sept. 1985.

[10] Song-yop Hahn, C. Calmeis, G. Meunier, J.L. Coulomb, "A posteriori Error Estimate for Adaptive Finite Element Mesh Generation", IEEE. Trans. on Mag. Vol. MAG-24, No. 1, pp. 315-317, 1988.

[11] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, 2'nd Edition, Korean Student Edition, 연합출판.

[12] 임 달호, 김 찬오, "FEM과 BEM의 혼합적용에 의한 정상자계의 해석에 관한 연구", 전기학회 논문지, Vol. 34, No. 7, 1985.