

Absorbing Boundary Condition 을 이용한 전자파 수치해석

신 판 석

한국전기연구소

A Numerical Model of EM field calculation using Absorbing Boundary Conditions

Shin Pan Seok

Power Apparatus Lab., KERI

Abstract

The Engquist-Majdas second-order Absorbing Boundary Conditions (ABC) has been combined with the finite element formulation replacing the boundary integral equations in the hybrid finite-boundary element method (HEM). The method is applied to electromagnetic field radiation problems, especially to the microwave launcher, in order to verify the finite element formulation with the ABC's. The results with ABC are in good agreement with those of HEM. In order to see the applicability of the ABC, a simplified microwave oven utilizing ABC and an absorbing material are provided. The EM field distribution of the model is visualized. This method could be a useful analysis and design tool for EM field devices.

1. 서론

해석영역의 경계면으로부터 전자파의 반사를 최소화 하는데 사용되는 인공적인 경계로 알려진 Absorbing Boundary Conditions (ABC) 의 응용에 대해서 최근에 많은 연구가 진행되어 왔다 [1,2,3,4,5]. ABC 의 중요장점은 계산영역을 최소화 하는데 있다. 즉 계산의 효율을 높이고 미지수의 수를 줄이는 것이며 이러한 인공경계를 주로 응용하는 분야는 유체역학, 음파 및 탄성파, 극부적인 입기예보와 전자파의 전송과 산란 등이다 (6,7,8,9,10). 또한 ABC는 local 경계조건 이므로 유한요소법에 의한 방정식의 sparse matrix 구조가 그대로 유지되므로 일반적으로 사용되고 있는 해법을 그대로 사용할수가 있다.

1974년에 W.Smith [6]는 Dirichlet 와 Neumann 경계조건을 만족하는 해를 중첩함으로써 전파 전송문제에 경계로부터 반사를 제거시키는 방법을 제안하였으며, scalar 와 vector wave 방정식과 탄성파문제에 적용 하였다. 이 해법은 유한요소법이나 유한차분법에 쉽게 적용할 수 있으며 표면파를 포함한 일반적인 wave 문제 에도 적용할수 있다.

1977년에 B.Engquist 와 A.Majda [1] 는 이론적인 non-local 경계조건을 근사화하여 최적의 local ABC를 유도하였으며, 특히 이 조건들은 직각좌표와 극좌표에서의 음향파동 방정식을 위한 인공 경계를 유추하는데 적용하였고, 2차원 공간에서 물의 파동방정식을 선형화 하는데 적용하였다.

또한 1980년에 A.Bayliss 와 E.Turkel [2] 은 인공적인 경계를 이용하여 무한 영역의 문제를 푸는 방법을 소개하였다. 그들은 파동 방정식의 해를 위하여 일련의 방사 경계조건을 구상하여 적용하였으며 인공경계를 무한대로 이동하여 해의 정확성을 증명하였다. 최근에 많은 연구가들이 상기한 두가지의 ABC를 전자파 해석에 적용하였다.

1988년에 R.Fenner 과 J.Watson [10] 은 2차원 Laplace 방정식을 local 경계분 방법을 정식화하였고, 이것은 미지함수의 Taylor series 전개에 근거를 두고 있으며 미지함수와 그 미분값을 특정해석 영역에서 대단히 정확하게 계산할수 있다고 보고되었다.

1989년에 J.D'Anaelo 와 I.Mayergoz [11] 는 Engquist-Majda 나 Bayliss-Turkel 의 ABC 를 유한요소법의 정식화 과정에 혼합시키는 방법을 시도하였다.

그들은 이것을 전자파의 산란문제에 적용시켰으며 ABC들 중에 2차 조건들이 쉽게 정식화를 수행할수 있고 경계영역이 없는 전파 진행문제를 modeling 하는데 아주 효과적인 방법임을 주장하였다.

본 논문에서는 유한요소법과 Engquist-Majda의 absorbing 경계조건 [1] 을 합성하여 전자파의 발산과 산란문제에 적용하였다. ABC 와 합성된 유한요소 정식화를 검증하기 위하여 몇개의 예제를 제시했으며 보다 실질적인 문제

적용을 위해서 간략화된 microwave oven 의 전자계해석을 시도하였으며 결과들은 합성요소법 [12, 13] 의 결과들과 비교하였다. 또한 계산용량에 대한 ABC 의 도입 효과를 관찰하기 위하여 전체계수 matrix 의 non-zero 요소수를 유한경계요소 합성법에서 발생된 수와 비교하였다.

2. 본 문

2.1 수학적 modeling

유한요소법에 사용할수 있는 ABC 중의 하나는 Engquist-Majda 가 공식화한 것이다. 그들은 다음 두가지의 추가 조건을 만족하는 고도의 ABC 를 창출하였다.

가. 이 경계조건들은 local 이어야 한다.

나. 경계 조건들은 파동방정식을 위해서 well-posed 혼합 경계치 문제로 귀착 되어야한다.

scalar wave equation 에 대한 2차 Engquist-Majda ABC 는 반사면 x=0 에서 다음과 같은 구조를 갖는다.

$$(식 1) \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \frac{\partial}{\partial x} \Phi + \frac{\partial}{\partial y} \Phi, t, x \geq 0 \quad (1)$$

어느 평면파가 -x 방향으로 진행한다고 가정했음에 ABC 는 다음과 같다.

$$\Phi_x - \Phi_t = 0 \quad (2)$$

$$\Phi_{xt} - \Phi_{tt} + 1/2 \Phi_{yy} = 0 \quad (3)$$

$$\Phi_{xtt} - \Phi_{ttt} - 1/4 \Phi_{xyy} + 3/4 \Phi_{tyy} = 0 \quad (4)$$

상기식에서 x,y,t 는 함수 Φ 의 거리 (x,y), 시간(t) 에 대한 각각의 편미분을 나타낸다. 상기 경계 조건들은 직각방향의 입사파에 대해서는 완벽하게 흡수되는 경계 조건들이며, 식 (3)의 2차 경계조건 은 45° 의 입사각으로 파가 진입할경우 입사파의 3% 가 반사되는 것으로 계산되었다.

식 (3) 의 제 2차 Engquist-Majda ABC 는 scalar wave 방정식에 대하여 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$k \Phi + jk \frac{\partial \Phi}{\partial n} - 1/2 \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi = 0 \quad (5)$$

식 (5)에서 k 는 파동수 ($k = \omega / \mu t$), Φ 는 미지함수이며 다음과 같이 표시한다.

$$\Phi = \Phi_0 \exp(-jkz) \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -jk \Phi \quad (7)$$

또한 n은 법선방향이며 τ 는 접선방향이다.

그림 1은 ABC 문제의 개략도를 표시한다. 지배영역 Ω 는 문제의 대상이 되는 기하학적 구조를 포함하고 있으며 전자파가 자유공간 속으로 발산되거나 영역내로 진입하게 된다. 계산영역을 제한하기 위하여 ABC를 경계 Γ 를 따라서 설정하였으며, 경계로부터 반사를 최소화하기 위하여 경계 Γ 를 따라 ABC 부가하였다.

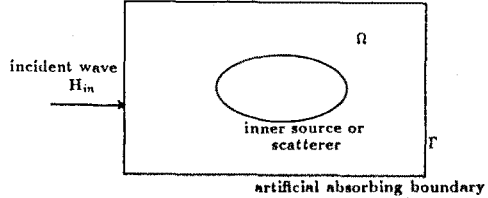


그림 1. ABC 를 적용한 계산영역

Maxwell 방정식으로부터 유도된 Helmholtz 미분방정식은

$$\nabla \times \frac{1}{j\omega \epsilon} \nabla \times H + j\omega \mu H = -J_m \quad (8)$$

식 (8)에서 H는 자계, μ 는 자기투자율, ϵ 는 유전율, ω 는 각속도, j는 -1 나타내며 J_m 은 등가 자화전류를 표시한다.

식 (8)에 잘 알려진 Galerkin 의 가중잔차법 (weighted residual method) 을 적용하여 유한요소법의 정식화 과정을 거치면

$$\int (\nabla W \cdot \frac{1}{j\omega \epsilon} \nabla H + j\omega \mu W \cdot H) d\Omega - W \cdot E_{td} \Gamma = 1 \int \Omega W \cdot J_m d\Omega \quad (9)$$

식 (9)에서 W는 임의의 가중함수이며, E_{td} 는 경계면에서 전계의 접선성분을 나타낸다.

$$E_t = \frac{1}{j\omega \epsilon} \frac{\partial H}{\partial n} \quad (10)$$

한편 식 (5)에서

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -jk \Phi - \frac{j}{2k} \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi \quad (11)$$

로 나타낼수 있으며 식(9)의 E_{td} 를 식 (11) 의 우측항과 대치시킨다면 미지수가 Φ 즉 H로 되어 해를 바로 구할수 있다. 식 (11)을 유한요소법에 의한 정식화를 하기 위하여 임의의 가중함수 W를 곱하고 경계 Γ 를 따라 적분하면

$$W \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\Gamma = W(jk \Phi + \frac{j}{2k} \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi) d\Gamma \quad (12)$$

$$= jkW \Phi d\Gamma - \frac{j}{2k} W \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} d\Gamma + \frac{j}{2k} \frac{\partial W}{\partial \tau} \cdot \Phi d\Gamma$$

Engquist-Majda ABC를 직사각형의 경계에 적용했을때 식 (12)의 우측 두번째 항은 '0' 값을 취하게 되고 그 표현적분은 다음식과 같이 된다.

$$\mathbf{W} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, dr = (\mathbf{j}k\mathbf{W} \cdot \Phi - \mathbf{j} \frac{\partial \mathbf{W}}{2k} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}) \, dr \quad (13)$$

식 (13)은 식(9)에 대입하면 다음식이 된다.

$$\left\{ (\nabla \cdot \frac{1}{j\omega \epsilon} \nabla \mathbf{H} + \mathbf{j} \omega \mu \mathbf{H}) \, d\Omega - \frac{1}{j\omega \epsilon} (\mathbf{j}k\mathbf{W} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{j} \frac{\partial \mathbf{W}}{2k} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \tau}) \, dr \right\} \\ = \int \Omega \mathbf{W} \cdot \mathbf{J} \, d\Omega \quad (14)$$

2차 형상함수, N_i , 을 이용하여 식 (14)를 matrix 형태로 나타낼수 있게 되고 유한요소법의 matrix 형태가 유지되므로 일반적인 해법을 이용하여 계산할수 있게 된다.

$$[S] \{H\} + [C] \{H_b\} - [D] \{H_b\} = [C] \{J\} \quad (15)$$

식 (15)에서 $\{H\}$ 는 모든영역의 절점에서의 자계값이고 $\{H_b\}$ 는 경계면의 절점에서의 자계값을 표시하며 각 matrix는 다음식을 모든요소에 적용시켜 계산된 것이다.

$$[S] = \int \Omega \left(\frac{1}{j\omega \epsilon} \nabla \mathbf{W} \cdot \nabla \mathbf{W} + \mathbf{j} \omega \mu \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} \right) \, d\Omega \quad (16)$$

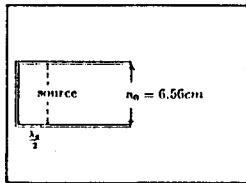
$$[C] = \frac{k}{\omega \epsilon} \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} \, d\Gamma \quad (17)$$

$$[D] = - \frac{1}{2k\omega} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \tau} \, d\Gamma \quad (18)$$

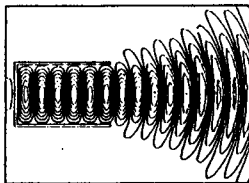
$$[G] = \int \Omega \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} \, d\Omega \quad (19)$$

2.2 ABC를 적용한 계산에

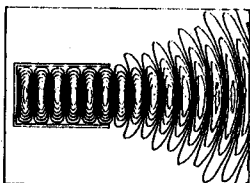
상기 2.1 절에서 ABC를 정식화한 유한요소법을 이용하여 Vlasov-type 안테나의 전자계 해석과 그 결과를 유한-경계요소합성법에 의한 결과와 비교하였다. 그림 2.(a)는 직선형의 Vlasov-type 안테나를 2차원으로 modeling 하기 위한 기하학적 구조를 나타내며 구동함수로서 등가자화전류를 안테나의 면에서 반파장 떨어진



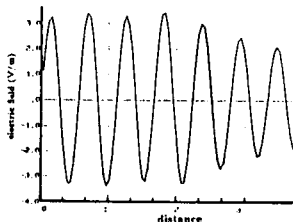
(a) 기하학적 구조



(b) HEM에 의한 결과



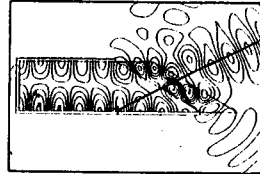
(c) ABC를 이용한 결과



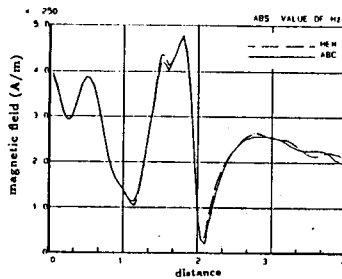
(d) 선분 A-A' 상의 전계의 크기

그림 2. Vlasov-Type 안테나의 해석 (8.6GHz)

곳에 sine wave의 점 전류를 주입하였으며 운용주파수는 8.6 GHz이다. (b)는 유한-경계요소합성법으로 해석한 등전계의 pattern을 나타내며 (c)는 ABC를 이용한 유한요소법으로 해석한 것이다. (d)는 두방법의 결과를 비교하기 위하여 선분 A-A'를 따라 등전계의 크기를 나타내고 있지만 그 차이를 쉽게 알아낼 수 없다.



(a) 유전체 막이 있는 Vlasov-type 안테나 부근의 등전계선



(b) 선분 B-B' 상의 자계의 크기

그림 3. 유전체막이 있는 Vlasov-type 안테나의 해석

그림 3.(a)는 방향성을 가진 microwave beam을 발사시키기 위해서 30° 각도로 경사지게 제작한 Vlasov-Type 안테나를 일정한 두께의 유전체 ($\epsilon_r=2.5$) 막을 입혔을 경우의 등자계 Pattern을 나타낸다. 그림 3.(b)는 (a)에 표시한 선분상의 자계의 크기를 HEM과 ABC에 의한 계산결과를 비교한 것으로 거의 일치하고 있으며 경계면부근에서 차이가 나타남을 알수 있다.

ABC를 이용한 방법의 장점중의 하나는 계산구역 용량의 감소이다. 표 1은 HEM과 ABC방법에 의한 system matrix의 non-zero 요소수를 각각 나타내고 있다. 표 1에 나타낸 것과 같이 non-zero 요소수는 HEM에 의한 경우보다 ABC를 이용한 방법이 약 50%정도 감소한다는 것을 알수 있다. 이것은 ABC에 의한 유한요소 정식화 과정에서 요소를 더 채우는 (fill-in) 것이 없고 일반 유한요소법과 똑같은 system matrix 구조를 유지하기 때문이며, HEM의 경우는 경계요소법과 합성하는 과정에서 경계요소의 절점수에 상응하는 fill-in이 발생되기 때문이다.

ABC를 도입한 유한요소법으로 보다 실질적인 문제풀이 해석하기 위하여 microwave oven의 간단한 modeling을 시도해 보았다. 그림 4.(a)는 해석하기 위한 oven의

기하학적 구조를 보여 주며, 왼쪽의 윗부분은 microwave source 와 waveguide 를 modeling 한 것으로 높이 5cm, 길이 2.5λ이고 전체 해석 영역은 6.2λx5λ이다. 운용 주파수로 6 GHz 를 사용했으며 oven 내에 전자파를 흡수하는 물질을 가정하였고 이표면에 ABC를 적용시켰다. 이물질의 특성은 유전율 10, 도전을 1.0s/m로 가정하였다. 그림 (b) 는 해석한 결과로서 waveguide 에서는 IMI mode 를 유지시키면서 wave 가 진행되며 oven 의 벽에서 반사가 이루어지고 물질에서 에너지가 흡수된다는 것을 알 수 있다.

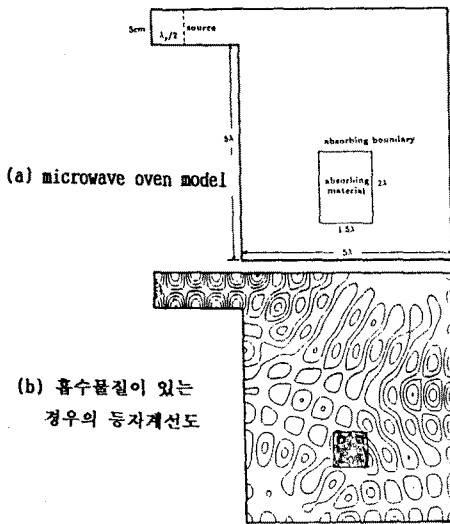


그림 4. Microwave Oven 의 model 의 modeling

표 1. 계수 matrix 의 non-zero 요소수

| No. of nodes | No. of non-zeros | | ABC/HEM (%) |
|--------------|------------------|--------|-------------|
| | in HEM | in ABC | |
| 873 | 11281 | 5241 | 46.5 |
| 1394 | 20727 | 8255 | 39.8 |
| 3640 | 40352 | 21930 | 54.3 |
| 4054 | 49467 | 24385 | 49.3 |
| 4290 | 51058 | 25980 | 50.9 |

3. 결론

Engquist-Majda 의 2차 Absorbing Boundary Condition (ABC) 을 유한요소 정식화 과정에 도입하여 전자파 해석을 하였다. 유한-경계요소 합성법에서 경계요소적분에 해당하는 부분을 ABC로 대체시킨으로서 무한공간의 해석영역을 인공적으로 설정된 소영역내에서 정확한 해석이 가능하게 되었다. Vlaso-type 의 안테나 와 microwave oven 의 modeling 을 통해서 ABC의 장점인 계산에 소요되는 기억용량의 감소와 계산시간의 단축을

증명하였으며 이 방법은 전자파를 이용한 기기들의 해석과 설계에 유용할 것이다.

앞으로 보다 정밀한 계산을 위해서 이론적인 분석과 함께 정량적인 해석이 필요하며 ABC를 도입한 유한요소법은 전자파의 산란 문제에도 효과적으로 이용할 수 있을 것이며 3차원 해석에의 적용가능성도 연구되어야 할 것이다.

4. 참고 문헌

- [1] B.Engquist and A.Majda, "Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves", Math. of Comp., Vol. 31, No.139, pp.629-651,1977.
- [2] A.bayliss and E. Turkel, "Radiation Boundary conditions for Wave-Like Equations", Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 33, pp. 707-725, 1980
- [3] R.L.Higdon, "Numerical Absorbing Boundary Conditions for the Wave Equation", Math. of Comp., Vol. 49, No. 179, pp. 65-90, July 1987.
- [4] A.F.Peterson, "Absorbing Boundary Conditions for the Vector Wave Equation", Microwave and Optical Tech. Letters, Vol.1, No.2, pp.62-64, April 1988.
- [5] B. Engquist and A. Majda, "Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations", comm. Pure Appl. Math., Vol.32, pp.313-357, 1979.
- [6] P.J. Roache, "Computational Fluid Dynamics", Hermosa Press, Albuquerque, N.M., 1972
- [7] W.D.Smith, "A nonreflecting plane boundary for wave propagation problems", J. Computational Phys., Vol. 15, pp. 492-503, 1974.
- [8] T.Elvius and a.Sundstrom, "Computationally efficient schemes and boundary conditions for a fine mesh barotropic model based on the shallow water equations", Tellus 25, pp.132-156, 1973
- [9] Gerrit Mur, "Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic Field Equations", IEEE Trans. on Electromagnetic Compatability, Vol.CM-23, pp. 377-382, 1981.
- [10] R.T.Penner and J.O. Watson, "A Local Boundary Integral Equation Method for Potential Problems", Intl J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 26, pp.2517-2529, 1988
- [11] J.D'Angelo and I.D.Mayergoz, "On the Use of Local Absorbing Boundary Conditions For the RF Scattering Problems", ibid., 1988.
- [12] 신관석, "Hybrid Finite-Boundary Element Analysis of Time Harmonic Electromagnetic Fields", Ph.D.Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, 1989
- [13] 신관석, "무한공간 전자장해석을 위한 유한 및 경계요소 합성법", 대한전기학회지 vol. 39 No. 3, p.p.47-54, 1990.3