

효율적인 LARGE DEVIATION 방법에 의한 발전 시뮬레이션에 관한 연구

송길영 차준민<sup>o</sup> 김용하 오광혜  
고려대학교 전기공학과

A STUDY ON THE PROBABILISTIC PRODUCTION COST SIMULATION  
BY THE EFFICIENT LARGE DEVIATION METHOD

K.Y. SONG J.M. CHA Y.H. KIM K.H. OH

Dept. of Electrical Engineering KOREA UNIVERSITY

Abstract

This paper describes the Large Deviation Method for computing the loss-of-load-probability ( L.O.L.P. ) index for a generating system.

Also, we introduce a rule to prevent the initial value from diverging in Newton-Raphson method which we have to use to determine the value of t. By applying the Large Deviation Method to computing the L.O.L.P. index for some representative reliability test systems, it is verified that the Large Deviation Method is generally very accurate and very fast.

1. 서론

확률론적인 발전 시뮬레이션에서 공급지장확률 ( loss-of-load-probability ; L.O.L.P. ) 과 발전비용의 계산은 많은 수의 이산화 ( discrete ) 된 확률변수 ( random variable ) 의 분포함수를 추정하는 것과 수학적으로 동가라고 할 수 있다.

$X_i$  를 발전기 i의 사고용량 ( capacity lost )이라 하면  $U_n = \sum x_i$  는 계통 전체의 사고용량 ( System Capacity lost )이라고 할 수 있다. 이때 L.O.L.P. 지표는 z 를 예비력 ( system margin )이라고 할 때  $U_n$  이 z 를 초과하는 확률값을 나타내는 데 일반적인 전력 계통에서의 z 값은  $U_n$  분포의 오른쪽 끝부분에 존재한다. 여기서 중앙극한정리 ( Central Limit Theorem ) 를 가정하면  $U_n$ 의 분포를 정규분포로 근사화시켜서 L.O.L.P. 값을 구할 수 있다. 그러나 이 근사화는 분포의 중앙부분에서는 정확하지만 양쪽 끝부분에서는 정확한 값을 계산할 수 없다는 것이 알려져 있다.<sup>[1]</sup> 이러한 단점을 극복하기 위해 제안된 Large Deviation 방법은  $x_i$  와  $U_n$  의 분포를 z 쪽으로 옮겨서  $U_n$  분포의 중심이 z 에 놓이게 한다는 것이다. 이렇게 하면 옮겨진 분포함수의 중심부분에서 확률값을 결정하게 되므로 보다 정확한 L.O.L.P. 값을 구할 수 있다.

이 Large Deviation 방법의 열거리듬에서  $x_i$  의 분포함수인 h 의 n 차 convolution 의 평균과 z 를 같다고 놓은 식에서 t 를 구해야 한다. 이때 Newton-Raphson 법을 사용하는데 일반적인 모델 계통의 특성상 특정 영역에서 초기치를 잡지않는 경우 수렴하지 못하고 발산하는 경우가 발생하여 원하는 계산에 접근조차 하지 못하게 된다.

그러므로 본 논문에서는 Newton-Raphson 법의 초기 계산 과정에서 t 값의 수렴 발산 여부를 판별하여 발산할 경우에는 수렴하는 영역으로 초기치를 이동시켜 구하고자 하는 t 를 효율적으로 구할 수 있는 기법을 개발하였다.

그리고 본 방법에 여러 시험계통을 적용시켜 구한 L.O.L.P. 값과 계산소요시간을 다른 방법의 결과와 비교함으로써 Large Deviation 방법의 유용성을 검증하였다.

2. 정식화

2.1 L.O.L.P. 의 표현

n 개의 발전기로 구성된 계통에서 발전기 i 의 고장용량  $x_i$  는 다음과 같은 확률분포를 갖는 확률변수이다.

$$x_i = \begin{cases} C_i \text{ 확률값} : P_i \\ 0 \text{ 확률값} : 1 - P_i \end{cases} \quad (2-1)$$

여기서  $C_i$  : 발전기 i 의 용량 [ MW ]  
 $P_i$  : 발전기 i 의 F.O.R. ( forced outage rate )

이때, L 을 부하라고 한다면

$$L.O.L.P. = Pr \{ x_1 + x_2 + \dots + x_n > C_1 + C_2 + \dots + C_n - L \}$$

이다. 여기서 고려대상기간의 부하의 평균을  $\mu$ , 평균으로부터의 분산을 Y 라고 한다면  $L = \mu + Y$  로 쓸 수 있다. 이 정의를 이용하면

$$L.O.L.P. = Pr \{ x_1 + x_2 + \dots + x_n + Y > C_1 + C_2 + \dots + C_n - \mu \} \quad (2-2)$$

로 나타낼 수 있다.

$z = \sum_{i=1}^n C_i - \mu$  이므로 결국 L.O.L.P. 값은

$$Pr \{ U_n > z \} \quad (2-3)$$

을 구하면 된다.<sup>[2]</sup> 식 ( 2-2 ) 의  $x_1 + x_2 + \dots + x_n$  이 확률분포 h 를 갖는 독립확률변수이므로 그 Moment Generating Function ( M.G.F. ) 는 다음과 같다.

$$H^*(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) dx \quad (2-4)$$

또 Associated Density Function A(x) 는 다음과 같이 정의된다.<sup>[3]</sup>

$$A(x) = \frac{e^{tx} f(x)}{H^*(t)} \quad (2-5)$$

여기서 A(·) 의 M.G.F. 는

$$A^*(\theta) = \frac{H^*(t+\theta)}{H^*(t)} \quad (2-6)$$

이며, 또 그 Cumulant Generating Function ( C.G.F. ) 는 아래와 같다.

$$CG(\theta) = \ln A^*(\theta) = T(t+\theta) - T(t) \quad (2-7)$$

여기서  $T(t) = \ln H^*(t)$

A(·)의 cumulant는 CG(θ)를 θ로 미분하고 θ = 0으로 놓음으로써 구할 수 있다. 따라서 A(·)의 평균, 분산, 3차 중앙모멘트를 각각 μ(t), σ²(t), μ₃(t)로 나타내면 다음과 같이 쓸 수 있다.<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \left. \frac{dCG(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = CG'(0) = T'(t) \\ \sigma^2(t) &= CG''(0) = T''(t) \\ \mu_3(t) &= CG'''(0) = T'''(t) \end{aligned} \quad (2-8)$$

또, H(·)와 A(·)의 n차 convolution을 각각 H<sub>cn</sub>(·)와 A<sub>cn</sub>(·)이라 하면 A<sub>cn</sub>(·)의 M.G.F.는

$$A^{-n}(\theta) = [A^{-1}(\theta)]^n = \frac{[H^{-1}(t+\theta)]^n}{[H^{-1}(t)]^n} \quad (2-9)$$

이다. 위식의 우변은 [H<sup>-1</sup>(t)]<sup>-n</sup> e<sup>tx</sup> H<sub>cn</sub>(x)의 moment를 의미한다. 그러므로

$$\begin{aligned} A_{cn}(x) &= [H^{-1}(t)]^{-n} e^{tx} H_{cn}(x) \\ \text{즉 } H_{cn}(x) &= [H^{-1}(t)]^n e^{-tx} A_{cn}(x) \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \Pr\{U_n > z\} &= \int_z^{\infty} H_{cn}(x) dx \\ &= [H^{-1}(t)]^n \int_z^{\infty} e^{-tx} A_{cn}(x) dx \end{aligned} \quad (2-10)$$

여기서 t는 z를 A<sub>cn</sub>(·)의 평균과 같다고 놓은 등식에서 구한다.

### 2.2 A<sub>cn</sub>(·)의 Edgeworth 근사화

식 (2-10)의 A<sub>cn</sub>은 n이 큰 경우에 중앙부근에서는 정규분포에 가깝다는 것을 알고있다.<sup>[4]</sup> 이것을 평균 0과 분산 1을 갖는 표준정규분포로 보면 A<sub>cn</sub>(x)는 M(x; nμ, σ√n)을 이용하여 다음과 같이 근사화된다.<sup>[11]</sup>

$$\begin{aligned} A_{cn}(x) &\approx \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left[ M\left(\frac{x-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \frac{V}{6} M'''\left(\frac{x-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right] \\ \text{여기서 } V &= \frac{n\mu_3(s)}{[n\sigma^2(s)]^{3/2}} = \frac{T'''(s)}{n^{1/2}[T''(s)]^{3/2}} \end{aligned} \quad (2-11)$$

그러므로

$$\begin{aligned} \Pr\{U_n > z\} &\approx [H^{-1}(t)]^n \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \int_{n\mu}^{\infty} e^{-tx} \left[ M\left(\frac{x-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \frac{V}{6} M'''\left(\frac{x-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right] dx \end{aligned} \quad (2-12)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서 } \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \int_{n\mu}^{\infty} e^{-tx} M'''\left(\frac{x-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) dx \\ = e^{-n\mu t} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1-t^2\sigma^2n) + n^{3/2}t^3\sigma^3 \int_0^{\infty} e^{-t\sigma\sqrt{n}y} M(y) dy \right] \end{aligned}$$

(2-11)과 (2-12)식을 합하면

$$\begin{aligned} \Pr\{U_n > z\} &\approx [H^{-1}(t)]^n e^{-n\mu t + (n\sigma^2 t^2)/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} t\sigma\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \\ &\quad \left\{ [1 - n^{3/2}t^3\sigma^3 V/6] + [H^{-1}(t)]^n e^{-n\mu t} (t^2\sigma^2n - 1) \frac{V}{6\sqrt{2\pi}} \right\} \end{aligned} \quad (2-13)$$

이다.

### 2.3 L.O.L.P. 계산

계통부하 L이 평균 μ와 분산 σ²를 갖는 정규분포라고 하자. 이때 상수부하에 대해서 σ² = 0이다. 식 (2-2)에서 x₁와 Y의 M.G.F.는 각각

$$x_i^{-1}(t) = e^{tc_i P_i + (1-P_i)}$$

$$Y^{-1}(t) = e^{t^2\sigma^2/2}$$

이므로 x₁ + x₂ + ... + xₙ + Y의 M.G.F.는

$$g^{-1}(t) = e^{t^2\sigma^2/2} \prod_{i=1}^n [e^{tc_i P_i + (1-P_i)}] \quad (2-14)$$

이고, 이때의 C.G.F.는

$$\begin{aligned} T(t) &= \ln g^{-1}(t) \\ &= \frac{t^2\sigma^2}{2} + \sum_{i=1}^n \ln [e^{tc_i P_i (1-P_i)}] \end{aligned} \quad (2-15)$$

이며 H<sub>cn</sub>(x) = g<sup>-1</sup>(t) e<sup>-tx</sup> A<sub>cn</sub>(x)이고 A<sub>cn</sub>(·)의 평균, 분산, 3차 모멘트는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T'(s) &= t\sigma^2 + \sum_{i=1}^n \frac{P_i C_i}{P_i + (1-P_i) e^{-tC_i}} \\ T''(s) &= \sigma^2 + \sum_{i=1}^n \frac{P_i C_i^2 (1-P_i) e^{-tC_i}}{[P_i + (1-P_i) e^{-tC_i}]^2} \\ T'''(s) &= \sum_{i=1}^n \frac{C_i^3 P_i (1-P_i) e^{-tC_i} [-P_i + (1-P_i) e^{-tC_i}]}{[P_i + (1-P_i) e^{-tC_i}]^3} \end{aligned} \quad (2-17)$$

그리고

$$V = \frac{T'''(s)}{[T''(s)]^{3/2}} \quad (2-18)$$

따라서 이와 같은 근사식을 이용하여 다음과 같이 L.O.L.P.를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} L.O.L.P. &= \Pr\{x_1 + x_2 + \dots + x_n + Y > z\} \\ &\approx g^{-1}(t) e^{-tT'(t) + t^2 T''(t)/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} t\sqrt{T''(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \\ &\quad \left\{ [1 - t^3 T'''(t)/6] + g^{-1}(t) e^{-tT'(t)} \right. \\ &\quad \left. \{t^2 T''(t) - 1\} \sqrt{6\sqrt{2\pi}} \right\} \end{aligned} \quad (2-19)$$

여기서 t는 다음식에서 구한다.

$$z = T'(t) = \sigma^2 + \sum_{i=1}^n \frac{P_i C_i}{P_i + (1-P_i) e^{-tC_i}} \quad (2-20)$$

### 2.4 Newton-Raphson 법을 이용한 t값 계산

식 (2-20)에서 부하를 상수부하로 가정하면

$$f(t) = T(t) - z \quad (2-21)$$

로 쓸 수 있다. 즉, f(t) = 0을 만족시키는 t를 구하면 된다. 여기서 최적해를 t\*, 근사해를 to, to를 t\*로 옮기기 위한 수정량을 Δt라고 한다면

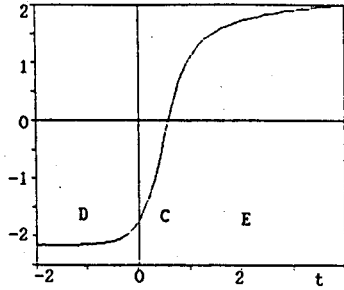
$$f(to + \Delta t) = 0 \quad (2-22)$$

이 된다.<sup>[5]</sup> 이것을 Taylor 전개한 후 Δt₂ 이상의 항을 무시하고 t₁ = to + Δt₁을 다음 단계의 개선된 근사값이라고 한다면

$$f(to) + \Delta t_1 f'(to) = 0 \quad (2-23)$$

이 식에 Texas Electric System을 적용시켜 t값의 변화에 따른 f(t)의 궤적을 그려 보면 그림 1.과 같다.

여기서, Newton-Raphson 법에서의 수렴조건을 만족시켜야 하는데 C영역에서 초기치 to를 잡으면 t\*로 수렴하지만, D나 E영역에서는 t값이 발산하여 t\*로 수렴하지 못한다. 이때, 첫번째 수정량을 Δs₁, 두번째 수정량을 Δs₂라 하고 Δs₁과 Δs₂의 크기를 비교해 보자.



C: 초기치로 잡았을 때 수렴하는 영역  
D,E: 초기치로 잡았을 때 발산하는 영역  
그림 1. Texas System의 t의 변화에 따른 f(t)의 궤적

즉, D,E 영역에서 잡은 초기치의  $\Delta s_1$  과  $\Delta s_2$  는 (+), (-) 부호가 바뀌고,  $|\Delta s_1| \leq |\Delta s_2|$  이기 때문에 발산함을 알 수 있다. 여기에 대한 해결 방법으로, 발산되는 경우를 판별하여 다음과 같이 초기치를 이동시키면 된다. 즉,  $\Delta s_1$ 의 부호가 (+) 이고  $\Delta s_2$ 의 부호가 (-) 인 경우에는  $t_0$  를 (+) 방향으로 이동시키고,  $\Delta s_1$ 의 부호가 (-),  $\Delta s_2$ 가 (+) 인 경우에는  $t_0$  를 (-) 방향으로 이동시켜 수렴하는 영역 C에서 초기치를 선정하고 Newton-Raphson 법을 이용하여 최적해  $t^*$ 를 구하면 된다.

3. 적용예

앞 절에서 설명된 Large Deviation 방법의 일거리듬과, Newton-Raphson 법에서의 새로운 기법을 검증하기 위하여 여러 모델 계통을 적용시켜 보았다. 적용된 모델 계통은 IEEE-RTS, Texas Electric System, Eprl-D System 이다. 이들 세 계통의 특성은 표 1과 같다.

	Texas	IEEE-RTS	Eprl-D
발전기 총용량(MW)	4466	3405	111420
첨두부하 (MW)	3350	2850	25344
발전기 수 (대)	27	27	174

표 1. 각 시험계통의 특성

3.1  $t^*$  값 계산

Newton-Raphson 법을 사용하여 t 값을 계산하기 위하여 세 모델 계통을 식 (2-21)에 적용시킨 뒤 t 값의 변화에 따른 궤적을 관찰해 보면 그림 2와 같이 비슷한 유형으로 나타남을 알 수 있다.

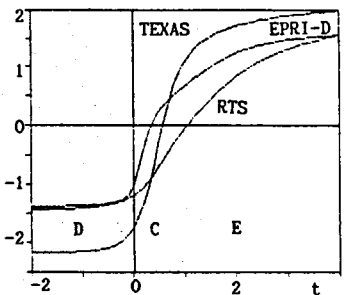


그림 2. 각 모델 계통의 t의 변화에 따른 f(t)의 궤적

그 중의 한 모델인 Texas Electric System 을 적용시켜 초기치  $t_0$ 에 따른  $\Delta t_1$  과  $\Delta t_2$  값과 그때의 수렴·발산 여부를 판별해 보면 표 2.와 같다. 즉, 발산하는 영역 D에서는  $t_0$ 를 (+) 방향으로, E 영역에서는 (-) 방향으로 이동시켜야 한다.

본 논문에서 D 영역에서는 새로운 초기치를  $t_{new} = t_{old} + \frac{t_{old}}{2}$  로 지정해 주고, E 영역에서는  $t_{new} = t_{old} - \frac{t_{old}}{2}$  로 지정해 주었다. 이 결과  $t_0$ 의 초기설정치에 관계없이 최적해  $t^* = 0.08529804$ 를 구할 수 있게 되었다.

$t_0$	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$	영역	판별
0.001	0.16985	-0.17899	D	발산
0.0015	0.16743	-0.17157		
0.00193	0.16538	-0.16544		
0.00194	0.16533	-0.16530	C	수렴
0.002	0.16504	-0.16446		
0.1	-0.01568	0.00097		
0.2	-0.31477	2.99813	E	발산
0.3	-0.97149	124.84507		
0.5	-2.90539	1421.92525		

표 2.  $\Delta s_1, \Delta s_2$  값에 따른 수렴·발산 여부 판별

3.2 L.O.L.P. 값 계산

앞에서 유도한 일거리듬에 모델 계통들을 적용시켜 L.O.L.P. 값과 계산소요시간을 구하여, 표 3에 기존의 Booth-Balelliaux 법과 Cumulant 법의 결과와 비교하였다.

	L.O.L.P.			계산 소요 시간
	TEXAS	IEEE-RTS	EPRl-D	
Large Deviation	0.002217	0.002922	0.008133	1.6
Booth-Balelliaux	0.002207	0.002974	0.008269	5.2
Cumulant	0.005119	0.002361	0.022411	1.0

표 3. 각 방법에 의한 L.O.L.P. 값과 계산소요시간 비교

Large Deviation 방법은 가장 정확한 방법으로 알려진 Booth-Balelliaux 법의 결과와 거의 일치하는 것으로 보아 매우 정확한 방법이라는 것을 알 수 있다.

4. 결론

본 논문에서 소개한 Large Deviation 방법은 발전 신뢰도 지수를 구하는데 있어서 여러가지 복잡한 수식과 근사화를 사용하지만 Booth-Balelliaux 법과 마찬가지로 매우 정확한 L.O.L.P. 값을 구했다. 또, 계산시간도 Booth-Balelliaux 법보다 약 3 배 정도 빨랐다. 따라서, Large Deviation 방법이 발전 신뢰도 지수를 계산하는데 있어서 매우 정확하고 빠른 방법임이 증명되었다. 특히, 본 일거리듬에서 중요한 상수인 t 값을 선정하기 위하여 Newton-Raphson 법을 사용하는데 이때 초기치에 따라서 수렴하지 못하고 발산하는 경우, 초기치를 변화시켜 원하는 t 값을 구할 수 있는 기법을 개발하여 더욱 효율적으로 Newton-Raphson 법을 사용하여 문제를 해결하였다.

5. 참고문헌

[1]. D.J. Levy & E.P. Kahn ; 'Accuracy of the Edgeworth Expansion of LOLP Calculations in Small Power Systems', IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101. (1982), pp. 986-994.  
 [2]. M. Mazumdar ; 'Comparison of Algorithms for Computing Generating-System Reliability Indexes', EPRI EL-2874, Contract TPS 81-822, Feb. 1983.  
 [3]. W. Feller ; 'An Introduction to Probability Theory and Its Applications', Vol. II, New York, John Wiley & Sons Inc. 2nd Edition, 1971.  
 [4]. J.E. Freund & R.E. Walpole ; 'Mathematical statistics', 3rd Edition, Prince Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.  
 [5]. 송길영 ; '계통해석이론의 기초와 응용', 동일출판사, pp.101-104.