

# 경계요소법을 이용한 3차원 정자장해석

전기역\*o 고창십\* 정현고\*\* 한승업\*  
\* 서울대학교 전기공학과 \*\* 강원대학교 전기공학과

## 3-D Magnetostatic Field Analysis Using Boundary Element Method

K. E. Jeon\* C. S. Koh\* H. K. Jung\*\* S. Y. Hahn\*  
\* Dept. of Electrical Engineering, Seoul National University  
\*\* Dept. of Electrical Engineering, KangWon National University

### Abstract

A three-dimensional magnetostatic problem is analyzed using the boundary element method and the magnetic scalar potential are employed in order to reduce the size of system matrix. Although the total magnetic scalar potential gives very accurate solutions in inner and outer regions of magnetic material, it has limitation on application because the magnetic scalar potential due to applied magnetic field sources is hard to be obtained.

The reduced magnetic scalar potential gives more or less inaccurate solutions inside the magnetic material but very accurate solutions outside. Hence it can be concluded that the reduced magnetic scalar potential is very useful when the magnetic fields of outside magnetic material only are interested. It is also shown, from the numerical results, that the linear shape function gives more efficient solutions than the constant shape functions because the former gives more accurate solutions in spite of relatively fewer unknowns than the latter.

### 1. 서론

근래에 컴퓨터의 발달로 수치해석에 의하여 물리적 계 현상의 실제적이고 실용적인 계산이 가능해짐에 따라, 전기 공학분야에서도 계산 설계문제에 필요한 전자장 해석을 위한 수치해석의 연구가 급속도로 진전되고 있다. 컴퓨터를 이용한 전자계의 수치 해석방법은 유한요소법과 경계요소법이 대표적이다[1].

유한요소법은 해의 안정성 및 적용의 용이성 등의 이유로 해석영역 및 경계조건 설정이 용이한 경우에 널리 이용되어 왔다[1]. 그러나, 최근들어 전기기기 및 소자의 응용이 광범위해지고, 소형화, 경량화, 고성능화 및 고효율화 됨에 따라 전자장의 3차원 해석이 절실이 요구되고 있으나, 해석

대상의 형상이 복잡한 경우 3차원 요소분할의 난이성 및 계 수행량의 대형화로 인한 컴퓨터 수행능력의 한계 때문에 실제 3차원 공학문제 해석에는 어려움이 많다[1,2].

반면에 경계요소법은 해석영역의 경계만을 요소분할 하기 때문에 3차원 문제에서도 요소분할이 비교적 용이하며, 미지수의 갯수도 유한요소법에 비해 대폭 감소된다[1,2]. 또한 계영역 문제해석시, 유한요소법과는 달리 해석영역 및 경계조건에 인위적인 설정으로 인한 오차를 극복할 수 있어 3차원 전자계 해석에 유리하다[1].

3차원 전자계해석시 경계요소법의 적용에 관한연구는 이미 상당부분 진행 되었으며 해석변수로 자기 벡터 포텐셜, 리듀스드 자기 스칼라 포텐셜, 토탈 자기 스칼라 포텐셜 등이 사용되었다[1,2,3]. 이때, 계 행렬의 차수를 낮추기 위하여 각 절점에서의 자유도가 낮은 자기 스칼라 포텐셜을 사용하는 것이 유리하다[1,2,3].

본 논문에서는 리듀스드 자기 스칼라 포텐셜 및 토탈 자기 스칼라 포텐셜을 사용한 알고리즘을 이론해가 알려진 모델의 3차원 전자계해석에 도입하여 이들의 특징 및 장단점을 비교하고 형상함수로 0차 및 1차 함수를 사용한 경우를 비교함으로써 주어진 해석대상에 적합한 해석변수 및 형상함수 선택에 대해 검토하였다.

### 2. 경계요소 정식화

리듀스드 자기 스칼라 포텐셜 및 토탈 자기 스칼라 포텐셜을 이용한 전자계 지배방정식은 다음과 같은 맥스웰 방정식, 보조 방정식 및 자계의 연속조건을 이용하여 도출할 수 있다[4].

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_e \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (3)$$

여기서,  $\vec{H}$  는 자계의 세기,  $\vec{J}_n$  는 외부인가 전류 밀도,  $\vec{B}$  는 자속 밀도이고,  $\mu$  는 매질의 자기 투자율이다.

2-1. 리두스드 자기 스칼라 포텐셜을 이용한 적분 방정식

자계의 세기  $\vec{H}$  는 외부 인가 자계원에 의한 자계  $\vec{H}_a$  와 유기된 자계  $\vec{H}_i$  의 합으로 표현할수 있다[5]. 즉,

$$\vec{H} = \vec{H}_a + \vec{H}_i \quad (4)$$

여기서,  $\vec{H}_a$  는 매질과 무관하게 Biot-Savart 법칙으로부터 구할수 있다[4].

유기된 자계  $\vec{H}_i$  는 회전하지 않는 자계이므로 리두스드 자기 스칼라 포텐셜  $\phi_m$  은

$$\vec{H}_i = -\nabla\phi_m \quad (5)$$

과 같이 정의될수 있다. 따라서, 매질이 선형이고 등방성인 경우 지배방정식은

$$-\nabla^2\phi_m = 0 \quad (6)$$

이되며,  $\phi_m$  은 단가함수(Single-valued function)가 된다.

그리고, 매질경계에서의  $\vec{H}$  및  $\vec{B}$  의 연속조건을 해석변수  $\phi_m$  에 관하여 표현하면

$$\phi_m = \phi_{m1} = \phi_{m2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial\phi_m}{\partial n} = \frac{\partial\phi_{m1}}{\partial n} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial\phi_{m2}}{\partial n} + \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) H_{an} \quad (8)$$

이 된다. 여기서,  $\phi_{m1}$ ,  $\phi_{m2}$  은 각 영역에서의 해석변수이고,

$\mu_1$ ,  $\mu_2$  는 각 영역에서의 투자율이며,  $n$  은 단위 외향 법선 벡터,  $H_{an}$  은  $\vec{H}_a$  의 법선성분이다.

그림1과 같이 주어지는 3차원 개영역 문제 해석을 위한 경계 적분 방정식은 식(6)과 그린함수에 대하여 스칼라 그린정리를 적용하고, 식(7), (8)를 이용하면 다음과 같이 얻어진다[6].

$$-a_1\phi_m(\vec{r}) + \int_a \left[ G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial\phi_m(\vec{r}')}{\partial n'} - \phi_m(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] dS' = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} -a_2\phi_m(\vec{r}) - \int_b \left[ \mu G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial\phi_m(\vec{r}')}{\partial n'} - \phi_m(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] dS' \\ = \int_b (1-\mu) G(\vec{r}, \vec{r}') H_{an} dS' \quad (10) \end{aligned}$$

$$a_1 = \begin{cases} 1 & \vec{r} \in R_1 \\ c & \vec{r} \in S \\ 0 & \vec{r} \in R_2 \end{cases} \quad a_2 = \begin{cases} 0 & \vec{r} \in R_1 \\ 1-c & \vec{r} \in S \\ 1 & \vec{r} \in R_2 \end{cases}$$

$c = 0/4\pi$ ,  $0$  : 점  $\vec{r}$  에서의 입체각,

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} = -\frac{(\vec{r}-\vec{r}') \cdot \vec{n}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

그리고,  $\vec{r}$  과  $\vec{r}'$  은 각각 관측점과 자계원이 존재하는 점이다.

2-2. 토달 자기 스칼라 포텐셜을 이용한 적분방정식

전류영역을 제외한 해석영역에서 외부 인가 전류에 의한 자기 스칼라 포텐셜  $\phi_a$  와 리두스드 자기 스칼라 포텐셜  $\phi_m$  은 각각 라플라스 방정식을 만족하므로 토달 자기 스칼라 포텐셜  $\phi$  는

$$\phi = \phi_a + \phi_m \quad (11)$$

으로 주어지고, 자계의 세기  $\vec{H}$  는

$$\vec{H} = -\nabla\phi \quad (12)$$

로 주어진다[4]. 이때  $\phi_a$  는 다가함수 (multi-valued function) 로서 이를 단가함수로 만들기 위하여 특별한 주의가

요구된다[7]. 그리고, 매질의 경계에서  $\vec{H}$  와  $\vec{B}$  의 연속조건을 해석변수  $\phi$  로 표현하면

$$\phi = \phi_1 = \phi_2 \quad (13)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\phi_1}{\partial n} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial\phi_2}{\partial n} \quad (14)$$

이 된다[7].

그림1의 3차원 개영역 문제의 경계 적분방정식은 리두스드 자기 스칼라 포텐셜에서와 같은 방법으로 유도된다. 즉,

$$-a_1\phi(\vec{r}) + \int_a \left[ G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial\phi(\vec{r}')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] dS' = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} -a_2\phi(\vec{r}) - \int_b \left[ \mu G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial\phi(\vec{r}')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] dS' \\ - \phi_a(\vec{r}) \quad (16) \end{aligned}$$

가 된다.

이러한 적분방정식들은 해석영역의 경계를 이산화한 후 점 정합(Point matching)법을 사용하면

$$[A] \{X\} = \{B\} \quad (17)$$

형태의 행렬 방정식이 된다. 여기서, [A]는 계수행렬로서 각 요소에 대한 적분을 함으로써 얻어지며 그 적분인자는

그린함수 및 그의 법선 미분치와 형상함수의 곱이고,  $\{X\}$ 는 각 절점 또는 요소의 포텐셜 및 그의 법선 미분치로 구성되는 벡터 그리고,  $\{B\}$ 는 구동벡터로서  $\phi_a$  또는 그린함수의 적분으로 구성된다[6].

식(17)을 풀어서  $\{X\}$ 를 구하면 해석영역내의 모든 점에서의 스칼라 포텐셜은 식(9), (10) 및 (15), (16)로부터 얻어지며, 자속밀도는 식(4), (5) 및 (9), (10) 또는 식(12), (15) 및 (16)로부터 얻어진다[6].

### 3. 사례연구

그림2와 같이 균등 자계내에 반경 R인 구형 자성체가 있는 문제의 자계해석에 리두스트 자기 스칼라 포텐셜과 토달 자기 스칼라 포텐셜을 이용한 알고리즘을 각각 적용시켜 보았다. 또한, 0차 및 1차 삼각형 요소를 사용하여 해석하여 보았다. 계 행렬 및 구동벡터의 조립시 발생하는 적분은 Gauss-Legendre 공식을 이용하였고, 특히 적분은 Pina에 의해 제안된 수치적분을 이용하였다[8].

해석모델의 대칭성을 이용하여 자성체 표면의 1/8에 해당하는 부분만을 요소분할하였다. 그림3의 (a), (b), (c)는 세방향에서 본 요소분할도를 나타낸다.

토달 자기 스칼라 포텐셜을 사용하는 경우 필요한 외부에서 인가된 자계원에 의한 스칼라 포텐셜  $\phi_a$ 는 외부인가 자계가 균등하므로

$$\phi_a(\vec{r}) = -H_0 r \sin(\theta) \quad (20)$$

으로 주어진다. 또한 각각의 수치해석 결과들을 그림2의 AB를 따라서 이론해와 비교하였다.

그림4는 AB를 따라 상대 투자율이 변할 때 토달 자기 스칼라 포텐셜과 리두스트 자기 스칼라 포텐셜의 해를 비교한 것이다. 그림으로부터 자성체 내부에서는 Total 자기 스칼라 포텐셜이 훨씬 정확하며, 자성체 외부에서는 비슷한 정도의 해가 얻어짐을 알 수 있다. 또한, 토달 자기 스칼라 포텐셜에 의한 해는 상대 투자율이 큰 경우에도 자성체의 내부 및 외부에서 매우 정확함을 알 수 있고, 리두스트 자기 스칼라 포텐셜에 의한 해는 투자율이 커질 때 자성체 내부에서는 다소의 오차를 수반하나, 외부에서는 매우 정확함을 알 수 있다. 리두스트 자기 스칼라 포텐셜이 자성체 내부에서 해가 다소 부정확한 것은 외부인가 자계와 유기된 자계의 상쇄효과(Cancelling effect) 때문인 것으로 생각된다. 그림5는 구 외부의 한점에서 미지수의 변화에 따른 수렴 특성을 나타낸다. 1차 요소를 사용하는 경우 0차 요소보다 훨씬 정확한 결과를 얻을 수 있음을 보여준다. 이 결과들은 유한요소법을 이용한 기존의 결과들과 비교하여 볼 때 적은 수의 미지수에서 더 정확한 결과임을 확인하였다[9].

### 4. 결론

본 논문에서는 경계요소법을 사용하여 3차원 정자계 문제를 해석 하였으며, 계 행렬의 차수를 낮추기 위하여 토달 및 리두스트 스칼라 포텐셜을 도입하였다. 이론해가 알려진 모델에 유도된 알고리즘을 적용한 결과 리두스트 자기 스칼라 포텐셜을 사용한 경우 은 자성체의 내부에서는 상쇄효과로 인하여 다소 부정확한 결과를 얻었으나, 자성체 외부에서는 매우 정확한 결과를 얻었으며, 토달 자기 스칼라 포텐셜을 사용한 경우 자성체의 내부에서 매우 정확한 결과를 얻었다. 그러나, 토달 스칼라 포텐셜을 사용할 경우 전기공학 분야의 대부분의 문제에 존재하는 외부인가 자계원에 의한 스칼라 포텐셜을 구하기가 어려우므로 적용한계가 있다. 따라서, 자성체 외부에서의 자계에 더욱 관심이 있는 경우에는 리두스트 자기 스칼라 포텐셜이 유용함을 알았다. 그리고, 해석모델의 이산화율을 위한 형상함수로 0차 및 1차 형상함수를 시험한 결과 1차 형상함수를 사용한 경우가 훨씬 좋은 결과를 얻었다.

앞으로, 경계요소법이 실제 공학문제의 3차원 전자계 해석에 쉽게 응용되기 위하여는 3차원 자동요소 분할기법 및 3차원 적용요소 분할기법에 관한 연구가 수행되어야 할 것으로 사료된다.

### 참고 문헌

- [1] Sompoth Peaiyoung, Computational aspects of the boundary element method applied to two- and three-dimensional magnetic field problems, Ph. D. Dissertation, Dept. of Electric Power Engineering, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, 1987.
- [2] J. P. Peng, S. Salon and M. V. K. Chari, "A comparison of finite element and boundary element formulations for three-dimensional magnetostatic problems", IEEE Trans. on Magnetic, Vol. MAG-20, pp.950-952, 1984.
- [3] C. W. Trowbridge, "Three-dimensional field computation", IEEE Trans. on Magnetics, Vol. MAG-18, pp. 293-297, 1982.
- [4] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 2nd Ed., McGRAW HILL, New York, 1974.
- [5] B. Ancelle and J. C. Sabonnadiere, "Numerical solution of 3D magnetic field problems using boundary integral equations", IEEE Trans. on Magnetics, Vol. MAG-16, pp.1089-1091, 1980.

- [6] P. K. Banerjee and R. Butterfield, Boundary element methods in engineering science, McGRAW HILL, New York, 1981.
- [7] D. A. Lindholm, "Notes on Boundary integral equations for three dimensional magnetostatics", IEEE Trans. on Magnetics, Vol. MAG-16, pp.1409-1413, 1980.
- [8] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles and L. C. Wrobel, Boundary element techniques, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [9] 이홍배, "변 요소법을 이용한 3차원 정자장 해석", 석사 학위논문, 서울대학교, 1991.

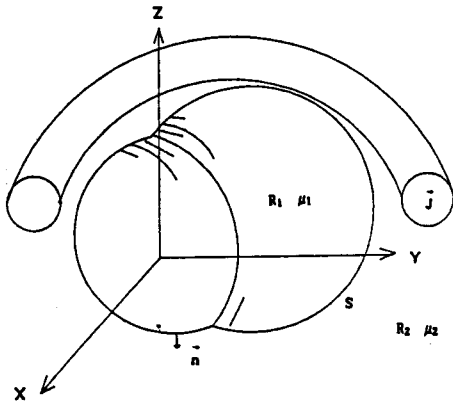


그림 1. 3차원 개방영역문제의 일반적인 모델.  
Fig 1. General model of 3 dimensional open boundary problem.

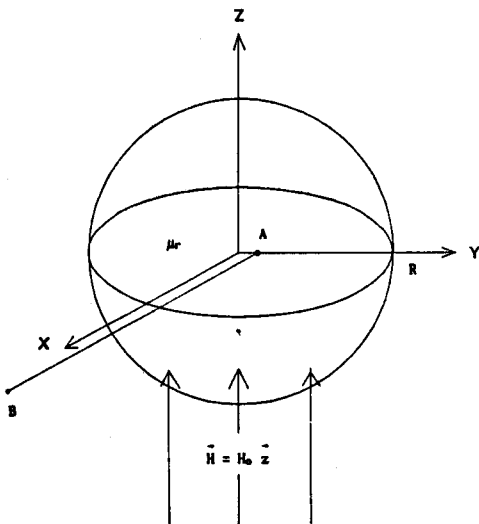


그림 2. 사대연구 적용모델.  
Fig 2. A magnetic sphere in a uniform external magnetic field.

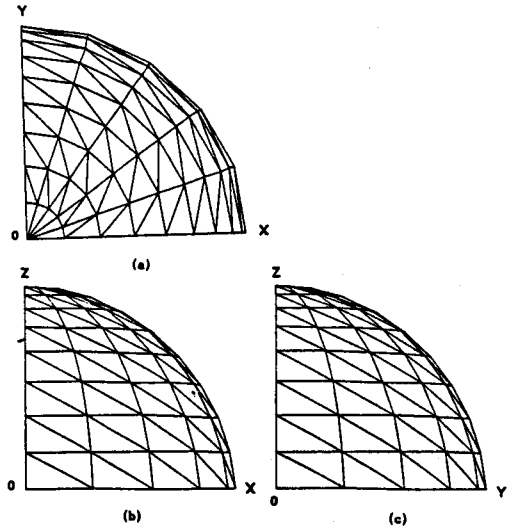
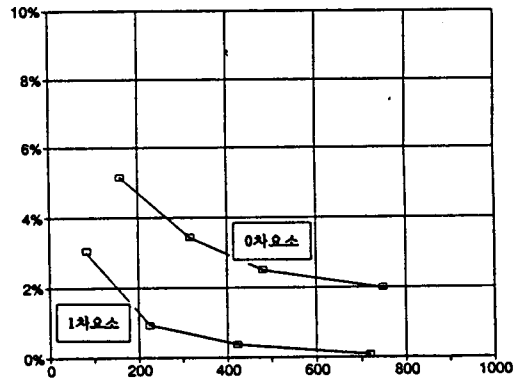
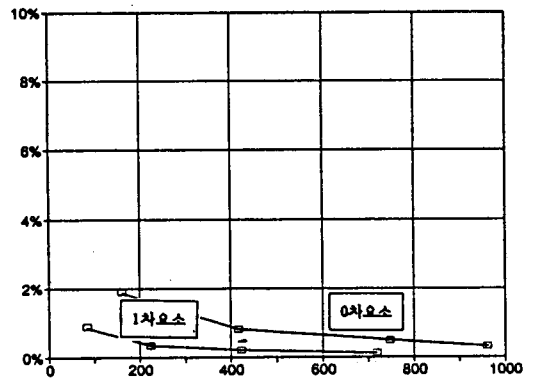


그림 3. 요소분할도.  
Fig 3. Mesh on surface of a sphere with 720 elements and 362 nodes.



(a) Using Reduced Scalar Potential At (2.0, 0.0, 0.0)



(b) Using Total Scalar Potential At (2.0, 0.0, 0.0)

그림 5. 0차요소와 1차요소의 수렴특성비교.  
Fig 5. Convergence of constant and linear element

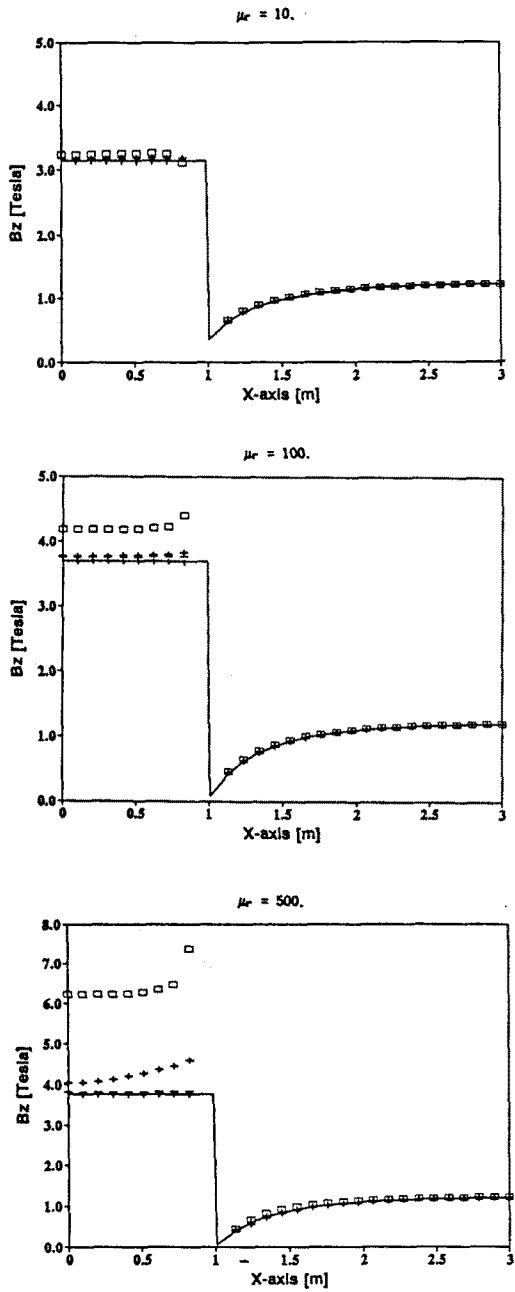


그림 4. AB를 따라 상대 투자율의 변화에 따른 각 경우의 해  
 Fig 4. The solution of each case along AB line

- |   |                                 |
|---|---------------------------------|
| — | : 이론해                           |
|   | : 포탈 스킴라 포텐셜과 0차요소를 사용하여 구한 해   |
| + | : 포탈 스킴라 포텐셜과 1차요소를 사용하여 구한 해   |
| □ | : 리듀스드 스킴라 포텐셜과 0차요소를 사용하여 구한 해 |
| - | : 리듀스드 스킴라 포텐셜과 1차요소를 사용하여 구한 해 |