

WALSH함수와 제어이론

안두수* · 이명규** · 이해기*** · 이승*

*. Sung Kyun Kwan University 전기공학과

**. 경성 대학교 전기공학과

***. 충청실업 전문 대학교 산업안전과

CONTROL THEORY OF WALSH FUNCTIONS - A Survey.

AHN, DOO-SOO* · LEE, MYUNG-KYU** · LEE, HAE-KI*** · LEE, SEUNG*

*. Sung Kyun Kwan University Electric Dept.

**. Kyung Sung University Electric Dept.

***. Choong Chung Industry College Industry Safety Dept.

ABSTRACT

Although orthogonal function is introduced in control theory in early 1970's, it is not perfect. Since the concept of integral operator by Chen and Hsiao in mid 1970's, orthogonal function (for example Walsh, Block-pulse, Haar, Laguerre, Legendre, Chebychev etc) has been widely applied in system's analysis and identification, model reduction, state estimation, optimal control, signal processing, image processing, EEG, and ECG etc. The reason why Walsh Functions introduces in control theory is that as integral of Walsh function is also developed in Walsh orthogonal function, if we transfer give system into integral equation and introduce Walsh function, We can know that system's characteristic by algebraical expression.

This approach is based on least square error and that result is expressed as computer calculation and partly continuous constant value which is easy to apply. Such a Walsh function has been actively studied in USA, TAIWAN, INDO, CHINA, EUROPE etc and in domestic, author has studied it for 10 years since it was is introduced in 1982.

This paper is consider the that author has studied for 10 years and Walsh function's efficiency

I. 서론

1970년대 초 직교함수가 제어이론에 도입되기 시작하였지만 완벽하지 못했고 1970년대 중반에 이르러서 Chen과 Hsiao에 의해 적분 연산자의 개념이 정의되고 부터 시스템의 해석, 식별, 모델축소, 상태추정, 최적제어, 신호처리, 화상처리, EEG, ECG 등에 Walsh, Block-pulse, Harr, Laguerre, Legendre, Chebyshev 함수 등의 직교함수가 널리 응용되고 있다. (1-15)

본 논문에서는 이와같은 직교함수 중 대표적인 Walsh 함수를 이용한 제어이론에 대하여 고찰하였다.

Walsh함수를 제어이론에 도입한 이유는 Walsh함수의 적분은 역시 Walsh함수로 전개되므로 주어진 계를 적분 방정식으로 변환하고 Walsh 함수를 도입하면 그 계의 특성을 간단히 대수 방정식으로 알 수 있게 된다는 점에 있다. 이러한 접근 방식은 최소자승법에 근거하여 결과는 컴퓨터 계산 및 응용이 간편한 부분적으로 연속인 상수값으로 표현된다.

이와 같은 Walsh함수는 미주, 대만, 인도, 중국, 유럽 등지에서 활발히 연구 되어오고 있고 국내에서는 본 저자가 1982년 부터 도입하여 근 10년간 연구하여 왔다.

본 논문은 저자가 연구한 10여년의 결과를 고찰하고 Walsh 함수의 효율성과 앞으로 지향해 나갈 방향을 생각하고 정리하고자 하는데 있다.

II. WALSH 함수

2-1. WALSH 함수의 구성

WALSH 함수는 1922년 개발된 직교함수의 불완전한 집합 형태의 Rademacher 함수를 1923년 WALSH가 구형과 형태의 완전한 직교 함수 집합을 이루는 WALSH 함수라는 직교함수를 얻어냈다.

WALSH 함수는 정의구간 $[0, 1]$ 에서 ± 1 인 2개의 값만 취하는 정현 직교함수로서 $N=2^n$ 개의 완전집합(complete set)을 이루며 이 함수는 다음과 같은 성질이 있다. (18)

$$\int_0^1 \text{WAL}(i, t) \text{WAL}(j, t) dt = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2-1)$$

WALSH 함수 집합은 일반적으로 다음과 같은 3그룹으로 분류된다. (17-19)

i) Sequency or Walsh Ordering

Sequency Ordering은 푸리에급수와 비교될 수 있는데 푸리에 급수의 sine, cosine 함수들이 Sequency Order의 홀수 번째의 sal과 짝수 번째의 cal에 각각 대응된다. (20-21)

$$\text{WAL}(2n, t) = \text{CAL}(n, t) \quad (2-2)$$

$$\text{WAL}(2n-1, t) = \text{SAL}(n, t)$$

여기서 n: Ordering number t: time period(t/T)

ii) Dynamic or Paley Ordering

Dynamic Order는 Paley에 의해 소개되었고 Gray Code를 이용하여 배열되며 다음과 같이 표현된다. (22)

$$\text{Walp}(n, t) = \text{Walw}[b(n), t] \quad (2-3)$$

여기서 $b(n)$ 은 n의 Gray Code-to-binary conversion을 의미한다.

iii) Natural or Hadamard Ordering

Natural Ordering은 Walsh-ordering과 다음의 관계가 있다.

$$\text{Waln}(n, t) = \text{Walw}[b\langle n \rangle, t] \quad (2-4)$$

여기서 $\langle n \rangle$ 은 n의 bit-reversal에 의해 얻어지며 $b\langle n \rangle$ 은 $\langle n \rangle$ 의 Gray Code-to-binary conversion이다.

Paley Order는 Rademacher 함수의 연속적인 곱에 의하여 얻어지며 Natural Order는 kronecker 곱에 의하여 얻어진다. Paley Order와 Natural Order는 계산상의 효율성 때문에 시스템 이론과 영상처리 등에 주로 응용되며 Sequency order는 스펙트럼 분석이나 filtering 등의 문제가 수반되는 통신이나 신호처리 등에 이용되고 있다. (23-25)

2-2. WALSH 函數의 特性

Walsh 함수의 정의구간 $[0, 1]$ 에서 적분 가능한 임의의 함수 $f(t)$ 는 다음과 같은 Walsh 함수로 전개된다.

$$f(t) = C_0 \Phi_0(t) + C_1 \Phi_1(t) + \dots + C_n \Phi_n(t) + \dots \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} C_i \Phi_i(t) \quad (2.5)$$

C_i : Walsh 함수의 계수

$\Phi_i(t)$: Walsh 함수

Walsh 함수의 계수인 C_i 값은 최소자승법을 이용하여

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 [f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} C_i \Phi_i(t)]^2 dt = 0 \quad (2.6)$$

이 되도록 결정한다.

임의 함수 $f(t)$ 를 Walsh 함수 유한급수 전개로 다음과 같이 나타낼때

$$f(t) \approx \sum_{i=0}^{m-1} C_i \Phi_i(t) \quad (2.7) \\ = C \Phi(t)$$

단, $\Phi = [\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{m-1}]$

Walsh 함수의 전개항 수는 다음과 같이 결정한다.

$$m = 2^v, \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

즉, 완전한 집합을 구성하는 Walsh 함수의 유한급수 전개항의 단위는 식(2.4)와 같으며 식(2.3)의 Walsh 계수인 C_i 은 다음과 같이 결정한다.

Walsh 함수가 다음과 같은

$$\int_0^1 \Phi_i(t) \Phi_j(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (2.9)$$

직교성(Orthogonality)을 갖고 있으므로 식(2.3)의 양변에 $\Phi_i(t)$ 를 곱하고 적분을 취하면 다음과 같다

$$\int_0^1 f(t) \Phi_i(t) dt = \int_0^1 C_0 \Phi_0(t) \Phi_i(t) dt + \dots \\ + \int_0^1 C_i \Phi_i(t) \Phi_i(t) dt + \dots \\ + \int_0^1 C_{m-1} \Phi_{m-1}(t) \Phi_i(t) dt \quad (2.10)$$

식(2.9)의 직교성에 의해 식(2.10)의 우변은 2 번째 줄만 남고 모두 0 이 된다.
따라서 Walsh 계수 C_i 은 다음과 같다.

$$C_i = \int_0^1 f(t)\Phi_i(t) dt \quad (2.11)$$

2-3. WALSH 函數의 積分 演算 行列

Walsh 함수의 적분은 Walsh함수로 다시 표현할 수 있고 Walsh 함수의 적분과 Walsh함수와의 관계를 나타내는 행렬이 존재하는데 이 행렬을 Walsh 연산행렬 (Operational Matrix)이라 한다.

적분 연산 행렬을 m 항 까지 고려하였을때

$$\int_0^t \Phi(m, t) dt \approx P(m \times m) \Phi(m, t) \quad (2.12)$$

이 된다.

여기서 P 를 적분연산행렬이라 하며 P 는 다음과 같다.

$$P(m \times m) = \begin{bmatrix} P(m/2 \times m/2) & -1/2m I(m/2 \times m/2) \\ 1/2m I(m/2 \times m/2) & 0(m/2 \times m/2) \end{bmatrix}$$

$$P(1 \times 1) = 1/2 \quad , \quad P(2 \times 2) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(4 \times 4) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/8 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & -1/8 \\ 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

식(2.12),식(2.13)에서 ()표시는 주어진 행렬의 차원을 나타낸다.

2-4. Kronecker 곱

대수 방정식에서 Walsh 계수를 구하는데 kronecker 곱을 이용 하면 행렬간의 계산을 더욱 쉽게 할 수 있다.

kronecker 곱의 기호는 \otimes 로 쓰고

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{21} & \dots & Ab_{n1} \\ Ab_{12} & Ab_{22} & \dots & Ab_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Ab_{1n} & Ab_{2n} & \dots & Ab_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

로 정의된다.

두 행렬이 $n \times n$ 이라면 계산한 결과는 $n^2 \times n^2$ 이 된다. kronecker 곱은 다음과 같은 특성을 가진다.

$$1) (A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD) \quad (2.15)$$

$$2) \|A \otimes B\| = \|A\| \|B\| \quad (2.16)$$

$$3) A \otimes B \otimes C = (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) \quad (2.17)$$

$$4) (A + B) \otimes (C + D) = A \otimes C + A \otimes D + B \otimes C + B \otimes D \quad (2.18)$$

2-5. 단일항 WALSH 函數

Walsh 의 정의구간 $[0,1]$ 은 m 개의 Walsh함수로 유한급수 전개할 때 m 개의 구간으로 세분되며 그 구간에서의 함수는 상수값을 취하며, 이때 함수는 각 구간에서 부분적으로 연속인 상수값을 취한다.

이는 세부구간 즉, 샘플링구간을 작게 했다고 하면, $[0,1]$ 에서 m 개의 Walsh 함수 전개에 의한 결과는 각 세부구간에 대하여 Walsh함수의 단일항을 적용한 결과와 같은 효과를 얻을 수 있음을 의미한다.

따라서 $\tau=mt$ 로 스케링하면 $t \in [0,1/m]$ 일때 $\tau \in [0,1]$ 이 된다.

첫번째 세부구간에서 $f(\tau)$ 와 $\dot{f}(\tau)$ 를 다음과 같이 Walsh 함수의 단일항 전개를 하자.

$$f(\tau) = f_1 \Phi_0(\tau) \quad (2.19)$$

$$\dot{f}(\tau) = g_1 \Phi_0(\tau) \quad (2.20)$$

여기서 $\Phi_0(\tau)$ 는 유한개의 Walsh 함수를 전개 했을 때 Walsh 함수인 $\Phi(0, \tau)$ 와 같으며 * 는 미분 표시이다.

계수 f_1 과 g_1 은 양변에 $\Phi_0(\tau)$ 를 곱하고 적분을 취함으로써 얻어진다.

$$f_1 = \int_0^1 f(\tau)\Phi_0(\tau) d\tau = \int_0^1 f(\tau)d\tau \quad (\text{단, } \Phi_0(\tau)=1) \quad (2.21)$$

$$g_1 = \int_0^1 \dot{f}(\tau)\Phi_0(\tau)d\tau = \int_0^1 \dot{f}(\tau)d\tau \quad (2.22)$$

$$= f(1) - f(0)$$

$$\text{즉, } f(1) = g_1 + f(0) \quad (2.23)$$

그리고

$$f(1) = \int_0^1 \dot{f}(\tau) d\tau + f(0) \quad \text{이므로}$$

$$f_1 \Phi_0(\tau) = g_1 \int_0^1 \Phi_0(\tau) d\tau + f(0) \Phi_0(\tau) \quad (2.24)$$

$$\text{즉, } f_1 = \frac{1}{2} g_1 + f(0) \quad (2.25)$$

여기서 $f(0)$ 는 초기조건이다.

따라서 임의의 세부구간 k 번째에 대해서는 식(2.22), 식(2.23), 식(2.24), 식(2.25)로부터

$$f_k = \frac{1}{2} g_k + f(k-1) \quad (2.26)$$

$$f_k = g_k + f(k-1) \quad (2.27)$$

으로 반복적인 계산에 의해 각 구간에서의 값이 결정됨을 알수 있다.

III. 시스템 해석

시스템의 해석을 위한 WALSH 함수의 응용방법을 RLC 직렬회로를 통해서 고찰해 보면 회로에 인가되는 전압을 $u(t)$ 라고 하고 이 때 회로에 흐르는 전류를 $y(t)$ 라면, RLC 회로는 아래와 같이 모델링된다.

$$L \frac{dy(t)}{dt} + Ry(t) + \frac{1}{C} \int_0^t y(t) dt = u(t) \quad (3.1)$$

회로의 파라미터들은 각각

$$R = 3 \text{ [H]} \quad L = 1 \text{ [\Omega]} \quad C = 0.5 \text{ [F]} \quad (3.2)$$

라고 하면,

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) + 2 \int_0^t y(t) dt = u(t) \quad (3.3)$$

이며, 인가되는 전압이 다음과 같고

$$u(t) = \begin{cases} 1.0, & 0.0 \leq t < 1/16, \\ 0.0, & 1/16 \leq t < 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

월쉬함수 전개항수를 $m=32$ 라고 할 때 출력파형을 얻기 위한 월쉬변환과정은 다음과 같다.

단, 초기조건은 0으로 가정한다.

$$u(t) = U^T \Phi(t) \quad (3.5)$$

$$y(t) = Y^T \Phi(t) \quad (3.6)$$

라하고, 식(3.3)의 양변에 적분을 취한다음 식(3.5), (3.6)

의 관계를 도입하면 다음과 같다.

$$Y^T \Phi(t) + 3Y^T \int_0^t \Phi(t) dt + 2Y^T \int_0^t \int_0^t \Phi(t) dt^2 = U^T \Phi(t) \quad (3.7)$$

위식에 적분 연산행렬을 도입하면

$$Y^T \Phi(t) + 3Y^T P \Phi(t) + 2Y^T P^2 \Phi(t) = U^T P \Phi(t) \quad (3.8)$$

양변의 $\Phi(t)$ 를 소거하고 정리하면 식(3.3)으로 표현된 미분-적분 방정식이 다음과 같은 대수 방정식으로 변환된다.

$$Y + 3P^T Y + 2(P^2)^T Y = P^T U \quad (3.9)$$

식(3.5)에서 입력 계수벡터 U 는 식(3.4)에 의해

$$u_i = \int_0^1 u(t) \Phi_i(t) \quad (3.10)$$

$$u_0 = 1.0$$

$$u_1 = 1.0$$

$$u_i = 0 \quad (\text{단, } i=2, 3, \dots, 31)$$

이며, 식(3.9)에서 출력에 대한 계수벡터 Y 는 다음과 같다.

$$Y = [I + 3P^T + 2(P^2)^T]^{-1} P^T U \quad (3.11)$$

따라서 식(3.6)에 의해 출력 $y(t)$ 를 결정할 수 있다. 출력 $y(t)$ 는 $m=32$ 개의 세부구간에서 상수값을 취하게 되므로 $t \in [0, 1]$ 에서 연속인 상수값으로 나타난다.

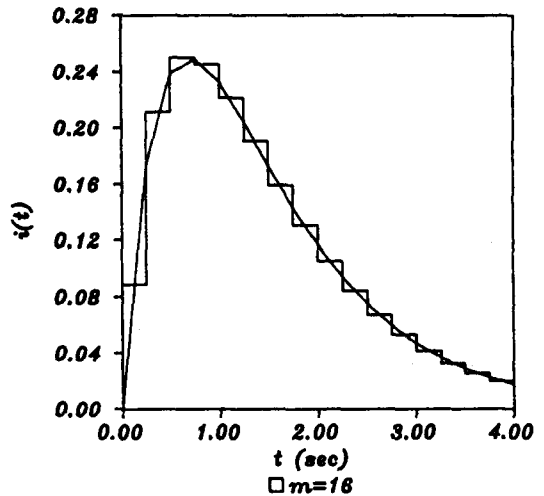


그림 1. R-L-C 직렬회로 해석

IV. 시스템의 차수 및 파라미터 추정

시스템의 차수 및 파라미터를 동시에 결정하는 문제를 고

려할 때, 물리계를 상태방정식으로 모델링하는 것보다는 고차미분방정식으로 모델링하는 것이 현실적이다. 왜냐하면 수학적 모델링시 나타나는 파라미터의 수는 고차 미분방정식에서 더 적기 때문이다. 입출력이 $t \in [0, T_i], T_i \in T$ (단, $i=1, 2, \dots, L$)에 대해서도 파라미터는 일정하므로, 각 보조구간에서 추정한 파라미터가 일정한 값으로 수렴하는 것을 봄으로써 시스템의 차수를 알 수 있다.

그러므로 시스템의 차수는 다음의 과정으로 부터 결정할 수 있다.

1. 먼저 시스템의 차수를 n_i 차라고 간주한다.
2. $t \in [0, T_i], T_i \in T$ 에서 추정한 파라미터를 θ_i 라고 하고 구한다. 단, $i=1, 2, \dots, L$
3. 다음의 오차함수를 비교한다.

$$E(\theta) = \sum_{k=1}^{L-1} \|\theta_k \cdot 1 - \theta_k\| \quad (4.1)$$

4. 오차가 0에 수렴하면 그때의 차수를 시스템의 차수로 하고, 그렇지 못하면 $n_i = n_i + 1$ 차라고 간주하여 위의 과정을 반복한다.

두번째 단계에서 정의 구간을 $t \in [T_i, T_{i+1})$ 로 할 수도 있다. 그러나 이때는 T_i 순간의 초기값 $y(T_i)$ 뿐만 아니라 $y(t)$ 의 미분에 대한 초기조건도 알아야 하는 문제점이 있다. 이러한 문제는 월쉬함수 단일항 전개에 의한 방법의 의해 해결될 수 있다.

V. WALSH 함수 단일항 전개에 의한 최적제어

5-1. 최적제어

최적제어이론에 Walsh함수 단일항 전개를 도입하여 그해를 구하기 어려운 Riccati 방정식을 풀지 않고 최적제어를 수행하는 방법을 고려하였다.

일반적인 최적제어이론에 의해 다음과 같은 선형계의 최적제어입력을 구하면

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad t_f=1 \quad (5.1)$$

평가함수를

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 [X^T(t)QX(t) + U^T(t)RU(t)] dt \quad (5.2)$$

라고 할 때 이 평가함수를 최소화하는 최적제어입력을 결정하는 문제를 생각한다.

위 시스템에 대한 Hamiltonian은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} H [X(t), U(t), \lambda(t), t] \\ = \frac{1}{2} X^T(t)QX(t) + \frac{1}{2} U^T(t)RU(t) \\ + \lambda^T(t)AX(t) + \lambda^T(t)BU(t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

또한 최대 원리에 의한 최적제어는 다음과 같이 결정한다.

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 = RU(t) + B^T \lambda(t) \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial X} = -\dot{\lambda}(t) = QX(t) + A^T \lambda(t) \quad (5.5)$$

식(5.4)에 의해서

$$U(t) = -R^{-1}B^T \lambda(t) \quad (5.6)$$

이고 $\lambda(t)$ 를 아래와 같이 가정하면

$$\lambda(t) = P(t)X(t) \quad (5.7)$$

식(5.6)과 식(5.7)에 의해서 식(5.1)은 다음과 같다.

$$\dot{X}(t) = AX(t) - BR^{-1}B^T P(t)X(t) \quad (5.8)$$

또한, 식(5.7)과 식(5.5)로부터 다음의 관계를 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= \dot{P}(t)X(t) + P(t)\dot{X}(t) \\ &= -QX(t) - A^T P(t)X(t) \end{aligned} \quad (5.9)$$

이때 식(5.8)을 식(5.9)에 대입하면 아래와 같다.

$$[\dot{P}(t) + P(t)A + A^T P(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q]X(t) = 0 \quad (5.10)$$

$X(t)$ 를 소거하면 다음의 행렬 Riccati 미분방정식이 된다.

$$\dot{P}(t) = -P(t)A - A^T P(t) + P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q \quad (5.11)$$

$$P(t_f) = 0$$

이때 $P(t)$ 행렬은 $n \times n$ 대칭행렬이므로 $n(n+1)/2$ 의 다른 항을 갖는다. 위 식에서 $P(t)$ 가 결정되므로 식(5.7), (5.8)로부터 최적제어입력 $U(t)$ 가 다음으로 결정된다.

$$U(t) = -R^{-1}B^T P(t)X(t) \quad (5.12)$$

그러나 여기에서는 위와 같은 Riccati 방정식을 이용하지 않고 식(5.8), (5.9)로부터 최적제어 벡터를 결정한다.

식(5.8)과 식(5.9)를 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\lambda(1) = 0, \quad X(0) = X_0$$

위 식에서 $X(t)$ 는 초기값이 주어졌고 $\lambda(t)$ 는 최종값이 주어졌으므로 해를 구하기 위해 $h = 1-t$ 로 치환하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(s) \\ \dot{\lambda}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ \lambda(s) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$s = -M \begin{bmatrix} X(s) \\ \lambda(s) \end{bmatrix}$$

식(5.14)의 상태전이 방정식을 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ \lambda(s) \end{bmatrix} = \text{Exp}(-Ms) \begin{bmatrix} X(s) \\ \lambda(s) \end{bmatrix}_{s=0}$$

$$= \begin{bmatrix} n_{11}(s) & n_{12}(s) \\ n_{21}(s) & n_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ \lambda(s) \end{bmatrix}_{s=0} \quad (5.15)$$

그런데 $\lambda(1) = 0$ 즉, $\lambda(s) \Big|_{s=0} = 0$ 이므로 위식은

다음과 같다.

$$X(s) = n_{11}(s) X(s) \Big|_{s=0} \quad (5.16)$$

$$\lambda(s) = n_{21}(s) X(s) \Big|_{s=0} \quad (5.17)$$

따라서 최적제어 입력은

$$U^*(s) = R^{-1}B^T n_{21}(s) n_{11}^{-1}(s) X(s) \quad (5.18)$$

즉,

$$\begin{aligned} U^*(t) &= R^{-1}B^T n_{21}(1-t) n_{11}^{-1}(1-t) X(1-t) \\ &= L(1-t) X(1-t) \end{aligned} \quad (5.19)$$

와 같다. 식(5.19)에서 $L(1-t)$ 는 최적궤환이득이다.

식(5.14)에 Walsh 함수 단일항전계를 적용하기 위해 $\tau = (1/m)s$ 으로 치환하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(\tau) \\ \dot{\lambda}(\tau) \end{bmatrix} = -M/m \begin{bmatrix} X(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\begin{bmatrix} X(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{bmatrix} = B_1 \Phi_0(\tau)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(\tau) \\ \dot{\lambda}(\tau) \end{bmatrix} = C_1 \Phi_0(\tau)$$

라 하면

$$C_1 = [I + (1/2m)M]^{-1} \{-M/m \begin{bmatrix} X(i-1) \\ \lambda(i-1) \end{bmatrix}\} \quad (5.21)$$

$$B_1 = (1/2)C_1 + \begin{bmatrix} X(i-1) \\ \lambda(i-1) \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$$\begin{bmatrix} X(i) \\ \lambda(i) \end{bmatrix} = C_1 + \begin{bmatrix} X(i-1) \\ \lambda(i-1) \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$L(1-t) = R^{-1}B^T n_{21}(1-t) n_{11}^{-1}(1-t)$ 이므로 n_{21} 과 n_{11} 만 알면 궤환이득 이 결정됨을 알 수 있다.

식 (5.21)-(5.23)로 부터 반복적인 계산에 의해 $\begin{bmatrix} X(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{bmatrix}$ 의 i 번째 값인 B_1 가 결정된다.

그런데 식(5.16), (5.17)에서 n_{11} 과 n_{21} 은 각각 $n \times n$ 인 행렬이므로 $X(\tau) \Big|_{\tau=0}$ 의 각각의 값에 대해 n 번 반복하면 식

(5.16), (5.17), (5.20) 으로 부터 i 번째 n_{11} 과 n_{21} 이 결정됨을 알 수 있다.

5.2 적용예

다음과 같은 선형 시불변 시스템이 있다.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U \quad (5.24)$$

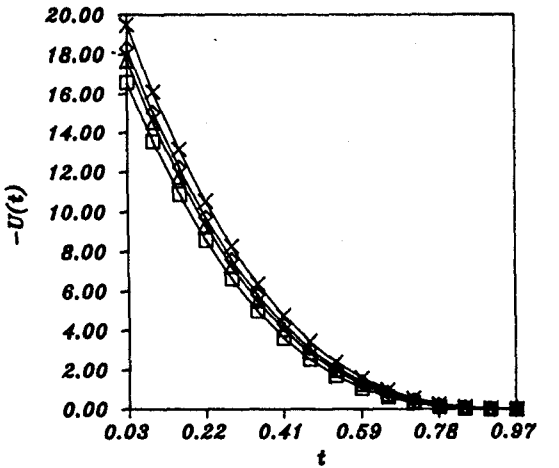
$$X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

목적평가함수가

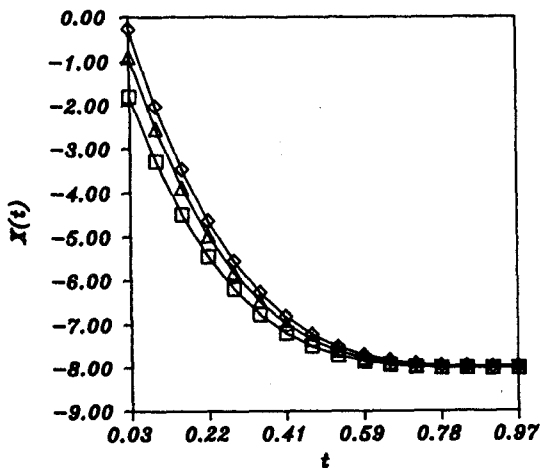
$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (X^T Q X + U^T R U) dt \quad (5.25)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, R = 1, t_f = \pi/2$$

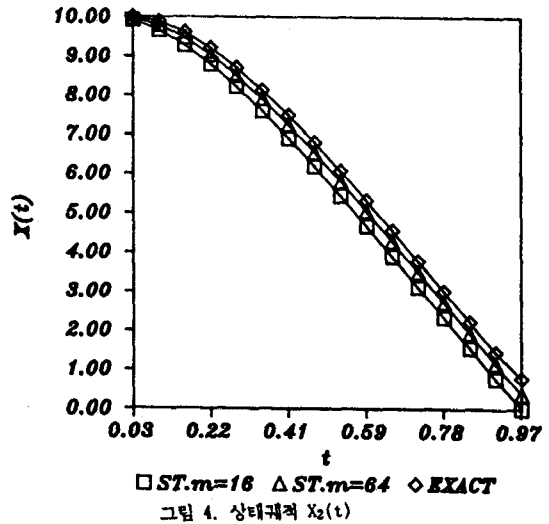
과 같을 때 최적제어 입력 및 궤적은 그림 2, 그림 3, 그림 4와 같다.



□ ST.m=16 △ ST.m=48 ◇ ST.m=64 × EXACT
그림 2. 최적제어 입력 u(t)



□ ST.m=16 △ ST.m=64 ◇ EXACT
그림 3. 상태궤적 X1(t)



□ ST.m=16 △ ST.m=64 ◇ EXACT
그림 4. 상태궤적 X2(t)

VI. WALSH-Fourier 변환에 의한 고조파 제거

일정한 크기의 직류전원을 반브리지 인버터 (Half-Bridge Inverter)에 인가하였을 때 인버터 출력전압의 기본파 및 고조파의 크기는 PWM파형의 스위칭각에 따라 결정된다. 사용할 전압형PWM 인버터를 효율적으로 수행하기 위해서는 인버터 출력전압 파형중에서 시스템에 영향을 주는 저차의 고조파분은 제거되어야 한다. 이를 위해서는 Patel이 제시한 SHE PWM의 이론과 W-FT변환을 이용하여 인버터 출력파형의 스위칭각을 계산하였다.

그림5

예를 들면 5,7차 2개의 고조파 제거에 관한 방법을 설명하면 그림 5에서 3개의 점호각을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 라 하자. 기본파 및 5차, 7차 고조파의 진폭은 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} a_1 &= w_1 S(1,1) + w_5 S(1,2) + w_7 S(1,3) + \dots \\ a_5 &= w_1 S(5,1) + w_5 S(5,2) + w_7 S(5,3) + \dots \\ a_7 &= w_1 S(7,1) + w_5 S(7,2) + w_7 S(7,3) + \dots \end{aligned} \quad (6.1)$$

아래의 4단계는 선형대수 방정식을 세우기 위하여 사용된다.

1) 5, 7차 고조파의 크기를 시가하기 위해서는 처음부터 32개의 Walsh 함수를 사용한다.

2) Walsh함수로부터 Fourier계수를 구하는 방법은 Y. Tadokord와 T. Higuchi가 제시한 이론인 W-FT이며 이 방법은 Simans와 Kitai가 제안한 비순환 공식(Nonrecursive formula)보다 계산속도가 빠른 특징이 있다.

$$S(k, i) = \frac{2^{j+2}}{N} [W_z]_i [\text{sink}0_n]_z \quad n=1$$

$$k=1, 2, \dots, N/2-1 \quad i=1, 2, \dots, z \quad (6.2)$$

이과정은 2-2절 W-FT에서 자세히 설명하였고 J. A. Asumadu and R. G. Hoft가 제시한 Walsh함수만 이용하는 방법보다 알고리즘이 더욱 간단하고 계산속도가 빠르며 정확하다.

식(2.2)의 예를 들면 다음과 같다.

S(16, 1)을 구하려면 N=64, k=16, i=1인 경우 q=1, j=5이다.

식(6.1), 식(6.2)에 이들 값을 대입하면 Z=1, i=1이므로

$$S(16, 1) = \frac{2^7}{64} [W_1]_1 [\text{sin}160_1]$$

$$= 2 [\sin 16 \cdot \frac{\pi}{64}]$$

$$= 2 \sin 45 = 1.4142$$

3) S(k, i)인 Walsh계수 W₄₁₋₅을 계산한다. 예를 들면 i=1, 5, 9에 대한 Walsh계수는 다음과 같다.

$$W_1 = 4 \int_0^{1/4} V(\omega t) \text{WAL}(1, \omega t) d(\omega t)$$

$$= 4 \left[\alpha_1 - (\alpha_2 - \alpha_1) + (\alpha_3 - \alpha_2) - \left(\frac{1}{4} - \alpha_3 \right) \right]$$

$$= 8\alpha_1 - 8\alpha_2 - 8\alpha_3 - 1$$

$$W_5 = 4 \int_0^{1/4} V(\omega t) \text{WAL}(5, \omega t) d(\omega t)$$

$$= 4 \left(\alpha_1 - (\alpha_2 - \alpha_1) + (1/8 - \alpha_2) - (\alpha_3 - 1/8) + (1/4 - \alpha_3) \right)$$

$$= 8\alpha_1 - 8\alpha_2 - 8\alpha_3 + 2$$

$$W_9 = 4 \int_0^{1/4} V(\omega t) \text{WAL}(9, \omega t) d(\omega t)$$

$$= 4 \left(\alpha_1 - (1/16 - \alpha_1) + (\alpha_2 - 1/16) - (\alpha_3 - \alpha_2) + (3/16 - \alpha_3) - (1/14 - 3/16) \right)$$

$$= 8\alpha_1 + 8\alpha_2 - 8\alpha_3$$

4) 기본파와 5차, 7차 고조파의 진폭을 계산하기 위하여

식(6.1)에서 S(k, i)와 W(4i-3)을 대입하면

$$a_1 = W_1 S(1, 1) + W_5 S(1, 2) + W_9 S(1, 3) + \dots + W_2, S(1, 8)$$

$$= 1.27375(8\alpha_1 - 8\alpha_2 + 8\alpha_3 - 1) - 0.52760(8\alpha_1 - 8\alpha_2 - 8\alpha_3 + 2) - \dots - 0.12545(8\alpha_1 - 8\alpha_2 + 8\alpha_3 - 1/4) \quad (6.4)$$

$$a_5 = W_1 S(5, 1) + W_5 S(5, 2) + W_9 S(5, 3) + \dots + W_2, S(5, 8)$$

$$= 0.25772(8\alpha_1 - 8\alpha_2 + 8\alpha_3 + 1) - 0.62099(8\alpha_1 - 8\alpha_2 - 8\alpha_3 + 2) - \dots + 0.13749(8\alpha_1 + 8\alpha_2 + 8\alpha_3 - 1/4) = 0 \quad (6.5)$$

$$a_7 = W_1 S(7, 1) + W_5 S(7, 2) + W_9 S(7, 3) + \dots + W_2, S(7, 8)$$

$$= 0.18552(8\alpha_1 - 8\alpha_2 + 8\alpha_3 + 1) - 0.07685(8\alpha_1 - 8\alpha_2 - 8\alpha_3 + 2) + \dots + 0.15225(8\alpha_1 + 8\alpha_2 + 8\alpha_3 - 1/4) = 0 \quad (6.6)$$

식(6.5)과 식(6.6)은 0으로하고 α₁, α₂, α₃를 구한다.

α₁, α₂, α₃를 계산하기 위하여 식(6.4)~(6.6)의 대수 방정식을 푼다. 이를 매트릭스 방정식으로 표현하면 식(6.7)과 같다.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(1,1)+S(1,2)+S(1,3)+\dots+S(1,8) \\ S(5,1)+S(5,2)+S(5,3)+\dots+S(5,8) \\ S(7,1)+S(7,2)+S(7,3)+\dots+S(7,8) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_5 \\ W_9 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

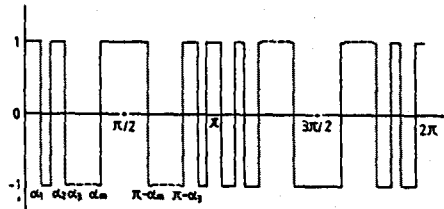


그림 5. 인버터러 상전압 파형

VII. 결론

본 논문에서는 본 저자가 10여년간 연구해온 직교함수중 대표적인 Walsh 함수가 제어이론에 어떻게 적용되어 왔는가를 고찰하였다.

Walsh 함수는 미-적분방정식으로 모델링된 제어계를 Walsh 함수의 특성을 이용하여 대수 방정식으로 변환하여 문제를 변환하였으며 현재 디지털 컴퓨터의 발달로 인하여 시뮬레이션이 매우 용이하며 결과가 정확하고 실시간 제어가 가능하다.

앞으로의 과제는 2가지로 분류할수 있는데 그 하나는 비선형계와 다변수 시스템등에 이와같은 이론을 적용하여 연구하고 있는 내용을 완성시키는 것이고, 다른 하나는 이와같은 이론을 실제의 산업에 적용시키는 문제로서 적용가능한 분야로는 의용과학(EEG, ECG등), 통신기기, 화상처리, 음성처리등에 매우 효율적이며, 좋은 결과를 가져올수 있으리라 사료되며 이에 대한 연구가 진행중에 있다.

Reference

1. 안두수, 이명규 "철취 및 관련함수의 응용 -시스템 및

- 제어 이론의 대수적 접근", 성균관대학교 전기공학과 제어공학실, 1990.
2. 안두수, "주파수 영역에서 Walsh 함수에 의한 전달함수의 간단화", 대한 전기 학회 논문지, 31-8-1, pp.33-38, 1982. 8.31.
 3. 안두수, 심재현, 이명규, "월쉬 급수 전개에 의한 분포정수계의 해석에 관한 연구", 대한전기학회논문지, 35-3-2, pp.95-102, 1986. 3.1.
 4. 안두수, 채영무, 이재춘, "Walsh함수에 의한 모델의 간단화", 성균관대학교 논문집, 과학기술편, 제37집, No.2, pp.357-359, 1987. 2.28.
 5. 안두수, 채영무, 이명규, "Haar함수를 이용한 시스템 동정에 관한 연구", 대한 전기 학회 논문지, 제 36권, 4호, 36-4-8, pp.287-292, 1984. 4.
 6. 안두수, 이해기, 이명규, "Walsh함수 발생기의 구성과 정역현과 합성에 관한 연구", 성균관대학교 논문집, 과학기술편, 제38집, No.2, pp.357-359, 1988. 2.15.
 7. 안두수, 배종일, 이명규, "선형계의 차수 및 파라미터 추정을 위한 Walsh함수 접근", 대한 전기 학회 논문지, 제38권, 2호, 38-2-8, pp.137-143, 1989. 2.
 8. Doo-Soo Ahn, Min-Ho Park, Chung-Yuen Won, "TIME OPTIMAL CONTROL FOR INDUCTION MOTOR SERVO SYSTEM", IEEE Power Electronics Specialists Conference, pp.1053-1062, 1988.
 9. 안두수, 원충연, 이명규, "월쉬급수를 사용한 새로운 고조파 제거 방법에 관한 연구", 대한 전기 학회 논문지, 39-3-6, pp.263-272, 1990. 3.
 10. 안두수, 배종일, "Walsh함수의 접근에 의한 분포정수계의 파라미터 추정", 대한 전기 학회 논문지, 39-7-9, pp.740-748, 1990. 7.
 11. 안두수, 이승, "Walsh함수에 의한 분포정수계의 최적제어에 관한 연구", 성균관대학교 논문집, 과학기술편, 제41집, No.1, pp.25-40, 1990. 8.30.
 12. 안두수, 이명규, "분포정수계의 분산형 최적제어에 관한 연구", 대한 전기 학회 논문지, 39-10-8, pp.1075-1085, 1990. 10.31.
 13. 이승, "Walsh함수에 의한 선형제어 시스템의 최적제어 입력 결정", 성균관대학교, 전기공학과, 석사학위논문, 1989.
 14. 이명규, "분포정수계의 분산형 최적제어에 관한 연구", 성균관대학교, 전기공학과, 박사학위논문, 1989.
 15. R.Kitai, "Synthesis of Periodic sinusoids form Walsh waves", IEEE Trans. Instrum. Meas., Vol. IM-24, No. 4, pp.313-317, Dec. 1975.
 16. LI YI-HUA, "Design of Walsh function Generator", IEEE Trans, Vol. EMC-29, No.1, pp.83-86, Feb. 1987.
 17. Y. A. Geadah, M. J. G. Corinthios, "Natural, Dyadic and Sequency order algorithms and processor for the Walsh-Hadamard transform", IEEE Trans. C-26, pp.435-442, 1977.
 18. N. Ahmed and K. R. Rao, Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing, New York: Springer - Verlag, 1975.
 19. T. M. Chien, "On representation of Walsh functions", IEEE Trans. Electromagn. Compt., Vol. MC-17, pp.170-176, Aug. 1975.
 20. G. S. Robinson, "Logical convolution and discrete Walsh and Fourier power spectra", IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-20, pp.271-280, Oct. 1972.
 21. A. C. Davies, "On the definition and generation of Walsh functions", IEEE Trans. C-21, 187-189, Feb. 1972
 22. P. W. Besslich, "Walsh function generator minimum orthogonality error", IEEE Trans. Electromagn. Compt., Vol. EMC-15, pp.177-180, Nov. 1973.
 23. J. L. Shanks, "Computation of the fast Walsh-Fourier transform", IEEE Trans. Compt., Vol. C-18, pp.457-459, May. 1969.
 24. K. Beauchamp, Applications of Walsh and Related Functions with Introduction to Sequency Theory, Orlando, FL: Academic, 1984.