

정합 조건이 만족되지 않는 불확실한 다변수 계통에 대한 슬라이딩 모드 제어기의 설계

박귀태 김동식* 임성준 서호준
고려대학교 전기공학과

Design of Sliding Mode Controller for Uncertain Multivariable Systems in the absence of Structure Matching Conditions

Gwi-Tae Park Dong-Sik Kim* Sung-Jun Lim Ho-Joon Seo
Dept. of Electrical Engineering Korea University

Abstract

All models of dynamical systems invariably have some measure of uncertainties associated with some of their dynamics. The recent approaches to establish robustness of stabilizing feedback control against the possible uncertainties have a serious limitation, that is, their applicability only to the systems that satisfy the matching conditions. Such conditions are rarely met in general applications. If a particular system satisfies the matching conditions, the addition of an actuator will destroy the satisfaction of such conditions.

In this paper, we develop robust control algorithms for uncertain multivariable systems in which the matching conditions are not necessarily met. In order to eliminate an influence over partial state variables due to unknown constant disturbances we perform the appropriate block-decomposition for a given system. Functional observers are introduced to estimate the unknown constant disturbances. The sliding mode controller is designed in such a way that the partial state variables in the state-space are directed towards switching surfaces and regulated to the origin asymptotically.

Numerical examples are discussed as illustrations.

1. 서론

일반적으로 계통을 모델링할 때는 여러가지의 불확실성이 존재하게 되는데, 그 이유는 주로 계통의 미계변수를 모르거나 계통이 모델화 되지 않은 운동 (unmodelled dynamics)을 포함하거나, 해석의 간편성을 위해 모델을 축소하는 경우가 있기 때문이다. 최근들어 이러한 불확실한 계통을 효과적으로 제어하기 위한 건설한 제어 방법에 대한 연구가 많이 이루어지고 있다. [1][2] 이러한 연구들은 종래의 통계 제어 이론 (stochastic control theory)과는 달리 불확실성에 대한 통계적인 정보가 필요없이 단지 불확실성의 경계치만을 알고 있는 상태에서 계통의 안정도를 보장받을 수 있는 제어기를 구성하는데 주력하였으며, 또한 계통의 불확실성이 정합 조건 (matching condition)이라는 상당히 엄격한 제한 조건을 만족하는 경우에 한하여 국한되어 왔다. 만일 계통의 불확실성이 정합 조건을 만족하였다 하더라도 제어 계통에 첨가되는 actuator가 그러한 조건을 파괴시킬 수 있기 때문에 실제 상황에서 정합 조건을 만족하기란 대단히 어렵다. 그러므로 정합 조건이 만족되지 않는 계통에 대해 기존의 건설 제어 알고

리즘을 적용할 경우 불확실성의 영향으로 계통에는 항상 정상 상태 오차가 남게 된다. 정합 조건이 만족되지 않는 계통에 대한 연구는 주로 Leitmann과 Barish 등에 의해 발표되었는데 이러한 연구들도 계통의 점근적 안정도를 보장하지는 못하고, 다만 uniformly ultimately boundedness만을 보장하고 있다. [3]-[8] 또한, C.D.Johnson에 의하여 주로 연구된 DAC (Disturbance Accomodation Controller) 이론도 점근적 안정도를 보장하기 위해서는 정합조건 보다는 완화되었으나 또 다른 제약조건을 가지고 있다는 문제점이 있다. [9] 그리고 정합 조건이 만족되지 않는 불확실한 다변수 계통에 대해, 일반 자동제어 분야에서 서로 상충관계에 있는 응답의 정확성과 속응성을 동시에 개선할 수 있는 가변 구조 제어 이론을 적용한 경우는 거의 없으며 지금까지 발표된 연구도 단일 입력 계통에 국한되고 있는 실정이다. [10]

따라서 본 논문에서는 계통의 파라미터 변동이 그다지 크지 않아 정합 조건을 만족하지 않는 미지의 시불변 외란만이 주로 영향을 미치는 계통에 대한 건설한 슬라이딩 모드 제어 알고리즘을 제안하였다. 제안된 제어 알고리즘은 먼저 외란을 추정하기 위해 함수 관측기를 도입한 다음, 행렬 블록 분해 (matrix block decomposition)를 이용하여 주어진 계통을 2개의 부계통으로 분해한 다음, 분해된 2개의 부계통에서 설계자가 관심을 가지는 부계통에 대한 상태 변수들만을 외란의 영향을 받지 않도록 하여 원하는 목표값으로 수렴시키는 방법이다.

본 논문에서 제안된 방법의 유효성을 입증하기 위해 2개의 입력을 가진 다변수 계통에 대해 시뮬레이션을 수행하였다.

2. 함수 관측기를 이용한 외란 보상 알고리즘

본 절에서는 계통의 파라미터 변동량이 그다지 크지 않아 정합 조건을 만족하지 않는 미지의 시불변 외란만이 주로 영향을 미치는 경우 설계자가 관심을 가지는 일부분의 상태 변수들만을 원하는 목표값으로 수렴시키는 방법을 제안하였다.

2.1 계통의 표현 및 기본적인 정의

다음과 같이 표현되는 다변수 계통을 살펴보자.

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU + DF, & X(t_0) &= X_0 \\ Y &= CX \end{aligned} \quad (2-1)$$

여기서 $X \in R^n$ 은 상태 벡터, $U \in R^m$ 은 제어입력 벡터, $Y \in R^r$ 은 출력 벡터이고 $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $D \in R^{n \times p}$ 와 $C \in R^{r \times n}$ 는 계통 행렬이며 $F \in R^p$ 는 미지의 시불변 외란 벡터이다.

다변수 계통의 경우 스위칭 평면의 설정을 위해서 Utkin과 Yang에 의하여 제안된 극점배치 방법에 의하여 식 (2-1)로 표현되는 계통을 2개의 부계통으로 분해하면 다음과 같다. [11] 먼저, 다음과 같은 좌표 변환 행렬 M 을 정의한다.

$$Z = MX \quad (2-2)$$

여기서 M 은 $n \times n$ 정칙 행렬이며 다음과 같은 성질을 가진다.

$$MB = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

여기서 B_2 는 $m \times m$ 정칙 행렬이다.

식 (2-1)의 계통에 식 (2-2)로 정의되는 좌표 변환 행렬을 이용하여 좌표 변환을 취하면 다음과 같은 상태 방정식을 얻는다.

$$\dot{Z} = MAM^{-1}Z + MBU + MDF \quad (2-4)$$

식 (2-4)를 블록 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \vdots \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \vdots & \vdots \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ B_2 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_2 \end{bmatrix} F \quad (2-5)$$

여기서 $Z_1 \in R^{r_1}$ 이고 $Z_2 \in R^{r_2}$ 인 상태 벡터이며 A_{11} 는 적절한 차원을 가지는 행렬이다.

식 (2-5)로 주어진 계통의 상태들이 원하는 상태값들로 수렴시키기 위하여 식 (2-5)의 계통을 오차 동태방정식 (error dynamic equation)으로 표현할 때, Z_1 에 대한 부계통의 외란의 영향을 제거하기 위해서는 부계통 행렬 A_{12} 의 우측 의사 역행렬 (right pseudo inverse)이 존재하여야 한다. 일반적으로 우측 의사 역행렬이 존재하기 위한 필요 조건으로는 행렬의 열의 수가 행의 수보다 커야 하므로 A_{12} 의 우측 의사 역행렬이 존재하기 위해서는 r_1 이 r_2 보다 커야 한다. [12] 그러므로 이와 같은 상황을 고려하여 다음과 같은 행렬 블록 분해 (matrix block decomposition)을 제안한다.

2.2 행렬 블록 분해

본 절에서는 A_{12} 의 우측 의사 역행렬의 존재를 보장 받기 위하여 다음의 두가지 경우에 대해 행렬 블록 분해를 한다.

1) r_1 이 r_2 보다 큰 경우

A_{12} 의 우측 의사 역행렬이 존재하므로 식 (2-5)로 표현된 블록 분해를 그대로 적용한다.

2) r_1 이 r_2 보다 작은 경우

일반적으로 A_{12} 의 우측 의사 역행렬이 존재하지 않으므로 A_{12} 의 우측 의사 역행렬이 존재하도록 다음과 같이 행렬 블록 분해를 수정한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{Z}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\bar{Z}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \vdots & \vdots \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Z}_1 \\ \vdots \\ \bar{Z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} \bar{D}_1 \\ \vdots \\ \bar{D}_2 \end{bmatrix} F \quad (2-6)$$

여기서 $\bar{Z}_1 \in R^{r_1}$ 이고 $\bar{Z}_2 \in R^{r_2}$ 이며 \bar{B}_2 는 식 (2-7)과 같이 t_2 가 $n-[n/2]$ 이 되도록 식 (2-5)의 B_2 에 영 벡터를 $n-[n/2]-t_2$ 개 첨가시켜 얻어진 행렬이다.

$$\bar{B}_2 = [0 \ \dots \ 0; B_2]^T \quad (2-7)$$

본 논문에서는 식 (2-1)과 같이 표현되는 계통은 식 (2-2)와 같은 좌표 변환에 의하여 항상 식 (2-5)와 같은 형태로 표현할 수 있으므로 앞으로의 모든 이론 전개는 식 (2-8)로 표현되는 계통으로 국한하였다.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \vdots \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \vdots & \vdots \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ B_2 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_2 \end{bmatrix} F \quad (2-8)$$

여기서 $X_1 \in R^r$ 이고 $X_2 \in R^m$ 이며 $t \geq r$ 이다.

2.3 오차 동태 방정식을 이용한 외란 보상 알고리즘

2.3.1 오차 동태 방정식으로서의 표현

다음과 같은 오차 벡터 E 를 정의한다.

$$\begin{aligned} E &= [E_1 \ E_2]^T \\ E_1 &= X_1 - X_{1d} \\ E_2 &= X_2 - X_{2d} \end{aligned} \quad (2-9)$$

여기서 $E \in R^n$ 이고 $E_1 \in R^r$ 이며 $E_2 \in R^m$ 이다.

식 (2-9)의 오차 벡터를 이용하여 식 (2-8)의 계통을 오차 동태 방정식으로 표현하기 위하여 식 (2-9)를 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= \dot{X}_1 - \dot{X}_{1d} = \dot{X}_1 \\ \dot{E}_2 &= \dot{X}_2 - \dot{X}_{2d} = \dot{X}_2 \end{aligned} \quad (2-10)$$

식 (2-10)에 식 (2-8)과 식 (2-9)를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \vdots \\ \dot{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \vdots & \vdots \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ B_2 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_2 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_2 \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

여기서 K_1 과 K_2 는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} K_1 &= A_{11}X_{1d} + A_{12}X_{2d} \\ K_2 &= A_{21}X_{1d} + A_{22}X_{2d} \end{aligned} \quad (2-12)$$

식 (2-11)의 E_1 으로 부터 X_2 가 추종하여야 하는 X_{2d} 를 식 (2-13)과 같이 선정한다면 E_1 의 부계통에 나타나는 외란의 영향이 제거 된다는 것을 정리 1에 나타내었다.

정리 1

X_1 의 부계통 행렬 A_{12} 의 우측 의사 역행렬이 존재 할 경우 상태 X_2 가 추종하여야 하는 X_{2d} 의 값을 식 (2-13)과 같이 선정한다면 E_1 에 대한 부계통은 식 (2-14)와 같이 다시 표현된다. 즉 E_1 의 부계통에 나타나는 외란의 영향을 완전히 제거할 수 있다.

$$X_{2d} = -A_{12}^{RG} (A_{11}X_{1d} + D_1F), \quad \text{단 } A_{12} \neq 0 \quad (2-13)$$

$$\dot{E}_1 = A_{11}E_1 + A_{12}E_2 \quad (2-14)$$

여기서 A_{12}^{RG} 는 A_{12} 의 우측 의사 역행렬(right-pseudo inverse)로 다음과 같이 주어진다.

$$A_{12}^{RG} = A_{12}^T (A_{12}A_{12}^T)^{-1} \quad (2-15)$$

< 증명 >

식 (2-13)로 주어진 X_{2d} 의 값을 식 (2-11)로 표현되는 오차 방정식의 상태 변수 E_1 에 대한 부계통에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{E}_1 = A_{11}E_1 + A_{12}E_2 + D_1F + A_{11}X_{1d} + A_{12}X_{2d}$$

$$(S-S) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} X + D U \quad (2-5)$$

그러므로 X_2 가 추종해야 할 X_{2d} 의 값은 식 (2-1)의 좌변이 주어진 경우 E_1 의 부계통에는 외란에 대한 항이 X_{2d} 의 값과 상쇄되어 외란의 영향이 없게 된다.

- 증명 끝 -

따라서 정리 1 을 이용할 경우, 외란의 영향을 받는 임의 계통을 2 개의 부계통으로 분해하여, 오차 방정식을 정의하여 오차 방정식으로 표현할 때 부계통의 상태들이 추종해야 할 값을 식 (2-1)의 좌변이 선정되는 주된 (양용) 상태변수(관측)를 가지는 상태 변수들에 대한 불확실한 외란의 영향을 제거할 수 있다. 그러나 정리 1 을 적용하기 위해서는 외란 F 에 대한 정확한 정보를 알아야 하므로 이를 위해 다음에 설명하는 원주 관측기를 도입한다.

2.3.2 외란 추정을 위한 함수 관측기의 설계

본 절에서는 식 (2-1)을 포함하는 계통에 대하여 미지의 외란을 외란을 추정하는 함수 관측기의 설계 방법을 제시한다. [13][14]

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU + DF \\ Y &= CX \end{aligned} \quad (2-1)$$

여기서 외란 벡터 F는 알려진 시변변으로 다음과 같은 형태를 가진다.

$$F = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_p]^T \quad (2-17)$$

관측기를 사용하여 외란의 값을 추정하기 위하여 외란을 상태 벡터로 간주하여 병합 계통을 구성하면 다음과 같다.

$$\dot{\bar{X}} = \begin{bmatrix} A & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{X} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} U \quad (2-18)$$

여기서 $\bar{X} \in R^{(n+p)}$ 는 병합 계통의 상태 벡터로서 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X \\ F \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

식 (2-18)과 같은 계통을 구성하면 식 (2-18)은 외란 벡터와 상태 벡터와의 동차성 관계를 나타내는 병합 계통이 되므로, 병합 계통 (2-18)의 계통 행렬들을 각각 다음과 같이 표시한다.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{조건} [C : 0] \quad (2-20)$$

병합 계통의 가관측성이 보장된다면 외란의 추정을 위한 장 (2-20)의 관측기의 존재를 보장할 수 있으므로, 외란 추정을 위한 관측기를 구성하기 위해서는 병합 계통이 다음과 같은 가정을 만족하여야 한다.

(가정 1)

1. (A:C) 가 완전 가관측 (completely observable) 이다.

2. $\text{rank} \begin{bmatrix} A & D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p$

만일 주어진 계통 행렬이 가정을 만족한다면, 병합 계통이 완전 가관측하게 되는 것을 증명할 수 있다. 외란 추정의 정확도가 증가한다.

먼저 병합 계통 (2-18)의 상태 추종 항은 항상 실패점수(원주) 선정 함수들, 즉 외란 추정 목적에 사용하는 변수들은 다음과 같이 선정할 수 있다.

$$W = KX \quad (2-21)$$

여기서 $W \in R^p$ 는 추종하여야 하는 외란을 나타내는 벡터이고 $K \in R^{(p \times (n+p))}$ 는 처음 n개의 열이 0인 벡터이다. 그리고 식 (2-21)과 같이 선정된 외란 벡터 w_i - 외란 벡터 w 의 i 번째 요소 - 의 추정값을 발생시키기 위한 v-1 차의 함수 관측기는 다음과 같이 구성될 수 있다. 여기서 w_i 는 병합 계통 (2-18)의 관측가능 모드 (observable modes)이다.

$$\dot{V}_i = F_i V_i + J_i Y + H_i U \quad (2-22)$$

$$\hat{w}_i = L_i V_i + N_i Y \quad (2-23)$$

(가정 2) 함수 관측기를 구성하는 행렬은 $F_i \in R^{(v-1) \times (v-1)}$, $J_i \in R^{(v-1) \times v}$ 를 포함하며, 또한 v 는 v 번째 관측기이고 $N_i \in R^{(v-1) \times p}$ 이다. 또한 $w_i \in R^p$ 는 i 번째 외란 추정 벡터이며 $V_i \in R^{(v-1)}$ 은 함수 관측기의 상태 벡터로 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$V_i = T_i X \quad (2-24)$$

외란 추정 벡터 w_i 가 외란 벡터 w 를 추정하기 위하여는 식 (2-24)와 (2-23)의 함수 관측기의 구성 행렬들은 다음과 같은 정리 2 를 만족하도록 선정되어야 한다. [14]

정리 2

식 (2-23)의 \hat{w}_i 가 $K_i X$ 의 근사적 추정값에 되기 위해서는 안정한 고유치를 가지는 F_i 에 대하여 식 (2-25), (2-26), (2-27)을 만족하는 식 (2-24)로 정의되는 변환 행렬 T_i 가 존재하여야 한다. 이때 A 와 F_i 는 고유치를 공유해서는 안된다.

$$T_i A - F_i T_i = J_i C \quad (2-25)$$

$$H_i = T_i B \quad (2-26)$$

$$K_i = L_i T_i + N_i C \quad (2-27)$$

< 증명 >

다음과 같은 오차 \bar{E}_i 를 정의한다.

$$\bar{E}_i = V_i - T_i \bar{X} \quad (2-28)$$

식 (2-28)의 양변을 미분한 후, 식 (2-18)과 (2-22)를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{E}}_i &= \dot{V}_i - T_i \dot{\bar{X}} \\ &= F_i V_i + J_i Y + H_i U - T_i (A \bar{X} + B U) \\ &= F_i \bar{E}_i + (F_i T_i - T_i A + J_i C) \bar{X} + (H_i - T_i B) U \end{aligned} \quad (2-29)$$

만일 F_i 가 안정하게 선정되고, 식 (2-25)와 (2-26)이 성립한다면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{E}_i(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{w}_i(t) = w_i(t) \quad (2-30)$$

식 (2-27)이 성립하므로 식 (2-22)와 (2-30)으로부터 다음의 관계가 만족한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{w}_i - K_i X] = \lim_{t \rightarrow \infty} [L_i V_i + N_i Y - K_i X]$$

$$\begin{aligned}
 &= L_1 T_1 \bar{X} + N_1 \bar{C} \bar{X} - K_1 \bar{X} \\
 &= (L_1 T_1 + N_1 C - K_1) \bar{X} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

그러므로 \dot{W} 는 $K_1 \bar{X}$ 의 근사적 추정치가 된다.

본 절에서는 함수 관측기를 이용하여 미지의 시불변 외란을 추정하는 방법에 대하여 고찰하였으며, 함수 관측기에서 F_1 를 선정하는 기준은 함수 관측기의 극점이 계통의 극점보다 빠른 모드 (fast mode)가 되도록 하면 된다.

다음 절에서는 함수 관측기에서 추정된 시불변 외란에 관한 정보를 이용하여 설계자가 원하는 상태 변수들만을 원하는 목표값으로 수렴하도록 하는 슬라이딩 모드 제어기에 대해 기술한다.

2.4 슬라이딩 모드를 이용한 제어기의 설계

가변구조 제어기의 설계 목적은 임의의 초기 위치 $X_1(t_0)$ 로부터 계통의 상태를 점진적으로 원하는 목표값 X_{1d} 로 수렴하도록 하는 것이므로 먼저, 식 (2-9)로 표현되는 오차 벡터를 사용하여 계통을 오차 방정식으로 표현한 것을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} 0 \\ K_2 \end{bmatrix} \quad (2-31)$$

식 (2-31)로 표현되는 계통에 슬라이딩 모드 제어 이론을 적용하기 위해서는 다음의 두 단계가 필요하다. [16]

- (1) 제어하고자 하는 계통이 슬라이딩 모드시에 미리 정해진 성질을 가지도록 하는 스위칭 평면을 설계한다.
- (2) 계통의 상태 벡터들이 스위칭 평면 상에 도달하여 머무르도록 하는 제어 입력을 구성한다.

2.4.1 스위칭 평면의 설계

스위칭 평면 행렬을 다음과 같이 정의한다.

$$S = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_m]^T = G_1 E_1 + G_2 E_2 = 0 \quad (2-32)$$

여기서 $G_1 \in R^{m \times r}$ 과 $G_2 \in R^{m \times t}$ 는 스위칭 표면 행렬이다. 스위칭 표면 행렬 G_1 과 G_2 는 슬라이딩 모드시 계통이 안정하도록 선정하면 된다. 그런데 G_2 는 제어입력 결정시 입력을 분리 (decoupling) 하기 위해 $G_2 B_2 = I$ 가 되도록 선정한다. 만일 계통의 상태들이 스위칭 평면상에 머무르게 되면 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned}
 S &= G_1 E_1 + G_2 E_2 = 0 \\
 G_1 E_1 &= -G_2 E_2 \quad (2-33)
 \end{aligned}$$

여기서 $G_2 \in R^{m \times t}$ 는 $t \geq m$ 을 만족하므로 항상 우측 의사 역행렬이 존재하므로 식 (2-33)을 이용하여 E_2 를 E_1 으로 표현하면 다음과 같다.

$$E_2 = -G_2^{RG} G_1 E_1 \quad (2-34)$$

식 (2-34)로 표현된 E_2 의 값을 식 (2-31)에 대입하여 E_1 에 대한 부계통만을 고려하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_1 &= A_{11} E_1 + A_{12} E_2 \\
 &= A_{11} E_1 - A_{12} G_2^{RG} G_1 E_1 \\
 &= (A_{11} - A_{12} G_2^{RG} G_1) E_1 \quad (2-35)
 \end{aligned}$$

식 (2-35)로부터 ($A_{11} - A_{12} G_2^{RG} G_1$)의 극값이 좌반면에 놓이도록 G_1 의 값을 선정한다면 슬라이딩 모드시 계통의 안정도를 보장할 수 있다.

스위칭 평면 행렬 G_1 과 G_2 가 선정되었으므로 다음 절에는 슬라이딩 모드가 발생하도록 하는 제어입력의 결정에 대하여 알아본다.

2.4.2 제어 입력의 결정

슬라이딩 모드가 발생하기 위해서는 다음과 같은 부등식이 만족해야 한다. [17]

$$S^T S < 0 \quad (2-36)$$

식 (2-31)로 주어진 계통에서 슬라이딩 모드의 존재를 보장받기 위한 조건을 유도하기 위해 다음과 같은 Lyapunov 함수를 정의한다.

$$\begin{aligned}
 V &= \sum_{i=1}^m v_i(s_i) \\
 v_i &= \frac{1}{2} s_i^2 \quad (2-37)
 \end{aligned}$$

식 (2-37)로 정의된 Lyapunov 함수를 시간에 대해 미분하고 식 (2-31)을 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_i &= s_i \dot{s}_i = s_i \{ \text{Row}_i(G_1) \dot{E}_1 + \text{Row}_i(G_2) \dot{E}_2 \} \\
 &= s_i \{ \text{Row}_i(G_1) (A_{11} E_1 + A_{12} E_2) \\
 &\quad + \text{Row}_i(G_2) (A_{21} E_1 + A_{22} E_2 + B_2 U + D_2 F + A_{21} X_{1d} + A_{22} X_{2d}) \} \\
 &= s_i [\{ \text{Row}_i(G_1) A_{11} + \text{Row}_i(G_2) A_{21} \} E_1 \\
 &\quad + \{ \text{Row}_i(G_1) A_{12} + \text{Row}_i(G_2) A_{22} \} E_2 \\
 &\quad + u_i + \text{Row}_i(G_2) (D_2 F + A_{21} X_{1d} + A_{22} X_{2d})] \\
 &= s_i \{ h_1 E_1 + h_2 E_2 + u_i + \text{Row}_i(G_2) (D_2 F + A_{21} X_{1d} + A_{22} X_{2d}) \}
 \end{aligned} \quad (2-38)$$

여기서 $\text{Row}_i(\cdot)$ 는 i 번째 행벡터를 나타내는 기호이며 h_1 과 h_2 는 다음과 같이 정의된다.

$$h_1 = \text{Row}_i(G_1) A_{11} + \text{Row}_i(G_2) A_{21} \quad (2-39)$$

$$h_2 = \text{Row}_i(G_1) A_{12} + \text{Row}_i(G_2) A_{22} \quad (2-40)$$

식 (2-38)에서 \dot{v}_i 가 항상 음의 값이 되도록 제어 입력을 결정하면 외란의 존재에도 불구하고 항상 슬라이딩 모드의 존재를 보장 받을 수 있게 된다. 따라서 다음과 같이 제어 입력 u_i 를 결정한다.

$$u_i = u_{is} + u_{if} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2-41)$$

여기서 u_{is} 는 스위칭 제어 입력이고 u_{if} 는 외란을 보상하기 위한 보상 제어 입력으로 다음과 같이 정의된다.

$$u_{is} = - \sum_{j=1}^r \phi_{1j} e_{1j} - \sum_{j=1}^t \phi_{2j} e_{2j} \quad (2-42)$$

$$u_{if} = - \text{Row}_i(G_2) (D_2 \bar{W} + A_{21} X_{1d} + A_{22} X_{2d}) \quad (2-43)$$

여기서 \bar{W} 는 외란 F 를 함수 관측기를 이용하여 추정한 값이므로 식 (2-41)의 u_{if} 는 항상 결정할 수 있는 값이다.

식 (2-42)에서 스위칭 이득 ϕ_{1j} 와 ϕ_{2j} 는 다음과 같이 결정된다.

$$\phi_{ij} = \begin{cases} \phi_{ij}^+ & \text{만일 } s_{i0j} > 0 \\ \phi_{ij}^- & \text{만일 } s_{i0j} < 0 \end{cases} \quad (2-44)$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, r$$

$$\phi_{ij} = \begin{cases} \phi_{ij}^+ & \text{만일 } s_1 e_{2j} > 0 \\ \phi_{ij}^- & \text{만일 } s_1 e_{2j} < 0 \end{cases} \quad (2-45)$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, t$$

여기서 스위칭 이득의 한계값을 구하기 위하여 식 (2-41)을 식 (2-38)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{v} &= s_1 (h_1 e_1 + h_2 e_2 - \sum_{j=1}^r \phi_{1j} e_{1j} - \sum_{j=1}^t \phi_{1j} e_{2j}) \\ &= s_1 (\sum_{j=1}^r (h_{1j} - \phi_{1j}) e_{1j} + \sum_{j=1}^t (h_{2j} - \phi_{1j}) e_{2j}) \\ &= \sum_{j=1}^r (h_{1j} - \phi_{1j}) s_1 e_{1j} + \sum_{j=1}^t (h_{2j} - \phi_{1j}) s_1 e_{2j} \end{aligned} \quad (2-46)$$

여기서 h_{1j} 와 h_{2j} 는 각각 h_1 과 h_2 의 j 번째 원소이다. 식 (2-46)이 항상 음이 되기 위한 스위칭 이득의 한계값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_{1j}^+ &> h_{1j} & i = 1, 2, \dots, m \\ \phi_{1j}^- &< h_{1j} & j = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (2-47)$$

$$\begin{aligned} \phi_{1j}^+ &> h_{2j} & i = 1, 2, \dots, m \\ \phi_{1j}^- &< h_{2j} & j = 1, 2, \dots, t \end{aligned} \quad (2-48)$$

그러므로 식 (2-47)과 식 (2-48)이 만족되도록 스위칭 이득을 선정한다면 \dot{v}_1 가 항상 음의 값이 되어 외란의 존재에도 불구하고 슬라이딩 모드 존재 조건이 만족되므로 상태들은 스위칭 평면으로 향하게 되고 결국 스위칭 평면을 따라 E_1 의 상태들이 영으로 수렴하게 된다.

그림 1 에 미지의 시불변 외란이 계통에 인가되는 경우 함수 관측기를 이용하여 외란을 추정한 후 스위칭 논리를 이용하여 슬라이딩 모드를 얻는 가변구조 제어계의 블록 선도를 나타내었다.

3. 시뮬레이션 연구 및 결과

본 절에서는 제안된 외란 보상 알고리즘의 유효성을 보이기 위하여 두개의 입력과 두개의 시불변 외란을 가지는 계통에 대하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다.

3.1 다변수 계통의 적용

3.1.1 오차 동태 방정식으로서의 표현

다음과 같이 표현되는 정합 조건이 만족되지 않는 외란이 인가되는 선형 다변수 계통을 고려한다.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} F \quad (3-1)$$

여기서 오차 벡터 E 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} E &= [E_1 \quad E_2]^T \\ E_1 &= X_1 \\ E_2 &= X_2 - X_{2d} \end{aligned} \quad (3-2)$$

여기서 $X_1 = x_1$, $X_2 = [x_2 \quad x_3]^T$ 이며, X_{2d} 는 식 (2-13)에 의해 다음과 같이 결정된다.

$$X_{2d} = [Y_1 - Y_2 \quad 0]^T \quad (3-3)$$

식 (3-2)의 오차 벡터의 경로를 이용하여 식 (3-1)을 오차 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} E + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} 0 \\ -Y_1 + 2Y_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

3.1.2 외란 추정을 위한 함수 관측기의 설계

외란을 추정하기 위하여 식 (3-1)의 계통에 대하여 병합계통을 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{E}} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{E} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U \\ Y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{E} \end{aligned} \quad (3-5)$$

여기서 $\bar{E} = [e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad f_1 \quad f_2]^T$ 로 정의된 벡터이다.

식 (3-5)의 병합계통에서 추정해야 할 외란을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{E} \quad (3-6)$$

관측기의 극값을 각각 -12에 위치시키면 정리 2 로부터 외란 추정을 위한 함수 관측기는 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} V + \begin{bmatrix} 12 & -9 & -11 \\ 14 & 11 & 11 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} U \\ \hat{W} &= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} V + \begin{bmatrix} -6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} Y \end{aligned} \quad (3-7)$$

3.1.3 슬라이딩 모드를 이용한 제어기의 설계

스위칭 함수 S 는 슬라이딩 모드에서 E_1 에 대한 부계통의 고유치가 -10 이 되도록 다음과 같이 선정하였다.

$$S = \begin{bmatrix} c_{11} & 1 & 0 \\ c_{21} & 0 & 1 \end{bmatrix} E \quad (3-8)$$

여기서 $c_{11} = 11$, $c_{21} = 1$ 로 선정하였다.

식 (3-8)로 표현되는 스위칭 함수를 시간에 대해 미분하고 식 (3-4)를 대입하여 정리하면 다음과 같다

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= c_{11} \dot{e}_1 + \dot{e}_2 \\ &= c_{11} e_1 + (c_{11} - 2) e_2 + 3e_3 + u_1 - f_1 + 2f_2 \\ \dot{s}_2 &= c_{21} \dot{e}_1 + \dot{e}_3 \\ &= (c_{21} + 1) e_1 + c_{21} e_2 - 4e_3 + u_2 + f_2 \end{aligned} \quad (3-9)$$

식 (2-41) - 식 (2-43)으로부터 제어 입력 U 를 다음과 같이 구성한다.

$$u_1 = u_{1s} + u_{1f} \quad (3-10)$$

$$u_{1s} = -\phi_{11} e_1 - \phi_{12} e_2 - \phi_{13} e_3 \quad (3-10a)$$

$$u_{1f} = f_1 - 2f_2 \quad (3-10b)$$

$$u_{2f} = -f_2 \quad (3-10c)$$

식 (3-10)으로 표현되는 제어 입력 U 를 식 (3-9)에 대입하여 정리한 다음 양변에 s 를 곱하면 다음과 같다.

$$s_1 = (c_{11} - \phi_{11})s_1e_1 + (c_{11} - 2\phi_{12})s_1e_2 + (3 - \phi_{13})s_1e_3 \quad (3-11a)$$

$$s_2 = (c_{21} + 1 - \phi_{21})s_2e_1 + (c_{21} - \phi_{22})s_2e_2 + (-4 - \phi_{23})s_2e_3 \quad (3-11b)$$

식 (2-36)이 만족되도록 식 (2-47)과 식 (2-48)에 따라 스위칭 이득의 한계값을 결정하면 다음과 같다.

$$\phi_{11}^* > c_{11} \quad \phi_{12}^* > c_{11} - 2 \quad \phi_{13}^* > 3 \quad (3-12a)$$

$$\phi_{11}^- < c_{11} \quad \phi_{12}^- < c_{11} - 2 \quad \phi_{13}^- < 3 \quad (3-12b)$$

$$\phi_{21}^* > c_{21} + 1 \quad \phi_{22}^* > c_{21} \quad \phi_{23}^* > -4 \quad (3-12c)$$

$$\phi_{21}^- < c_{21} + 1 \quad \phi_{22}^- < c_{21} \quad \phi_{23}^- < -4 \quad (3-12d)$$

이상과 같이 결정된 수치들을 이용하여 디지털 컴퓨터로 시뮬레이션한 결과를 그림 2 - 그림 10 까지에 나타내었다. 시뮬레이션 결과에서 알 수 있듯이 외란의 영향에도 불구하고 x_1 과 x_2 가 영으로 수렴함을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 계통의 파라미터 변동이 그다지 크지 않아 정합조건을 만족하지 않는 미지의 시불변 외란만이 계통에 영향을 주로 미치는 경우 함수 관측기를 도입하여 설계자가 관심을 가지는 일부분의 상태 변수들만을 원하는 목표값으로 수렴시키는 외란 보상 제어 알고리즘을 제안 하였다.

기존의 방법으로는 외부에서 인가되는 외란이 정합 조건을 만족하지 않는다면 항상 외란의 영향으로 인하여 정상상태 오차가 남게 되지만, 본 논문에서 제안된 제어 알고리즘으로는 모든 상태를 원하는 값으로 수렴하게 할 수는 없으나, 설계자가 원하는 일부분의 상태, 즉 $[n/2]$ 개의 상태 변수들만은 외란의 영향이 없이 원하는 값으로 수렴 시킬수 있다.

본 논문에서 제안된 제어 알고리즘은 빠른 스위칭에 의해 계통을 제어하기 때문에 일반 자동 제어 분야에서는 서로 상충 관계에 있는 응답의 속용성과 정확성을 동시에 개선할 수 있다는 장점을 가지고 있다.

향후 과제로서 계통의 파라미터 변동뿐만 아니라 미지의 외란이 동시에 존재 하면서 정합 조건을 만족하지 못하는 경우에도 효과적으로 계통의 불확실성을 보상할 수 있는 견실한 제어 알고리즘의 개발에 대한 연구가 요구된다.

5. 참 고 문 헌

[1] M. J. Corless, G. Leitmann, " Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems ", IEEE Trans., Vol. AC-26, No. 5, pp. 1139-1144, 1981

[2] Y. H. Chen, " Design of robust controllers for uncertain dynamical systems ", IEEE Trans., Vol. 33, No. 5, pp. 487-491, 1988

[3] W. E. Schmitendorf and T. H. Hopp, " Asymptotic tracking of uncertain systems in the absence of matching conditions ", AS ACC, pp. 423-426, 1985

[4] Y. H. Chen and G. Leitmann, " Robustness of uncertain systems in the absence of matching assumptions ", Int. J. Contr., Vol. 45, No. 5, pp. 1527-1542, 1987

[5] Y. H. Chen, " On the robustness of mismatched uncertain dynamical systems ", Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, Vol. 109, pp. 29-35, 1987

[6] R. K. Yedavalli and Z. Liang, " Reduced conservatism in the ultimate boundedness control of mismatched uncertain linear systems ", J. of Dynamic systems Measurement and control, Vol. 109, pp. 1-6, 1987

[7] B. R. Barmish & G. Leitmann, " On the ultimate boundedness control of uncertain systems in the absence of matching assumptions ", IEEE Trans., Vol. AC-27, No. 1, pp. 153-158, 1982

[8] S. Gutmann, " Uncertain dynamical systems - a Lyapunov min-max approach ", IEEE Trans., Vol. AC-24, No. 3, pp. 437-443, 1979

[9] C. D. Johnson, " Theory of disturbance - accomodating controllers ", Control and Dynamic Systems, vol. 12

[10] H. L. Stalford, " Robust control of uncertain systems in the absence of matching conditions : scalar input ", Proc. of the 26th conf. on decision and control, pp. 1298-1307, 1987

[11] V. I. Utkin and K. D. Yang, " Methods for constructing discontinuity hyperplanes in multi- dimensional variable structure systems ", Auto. Remote Contr., Vol. 39, pp. 1466 - 1470, 1978

[12] C. A. Rohde, " Some results on generalized inverses " SIAM review, Vol 8, No. 2, pp. 201-205, 1966

[13] D. G. Luenberger, " An introduction to observers ", IEEE Trans., Vol. AC-16, No. 6, pp. 596-602, 1976

[14] P. Murdoch, " Observer design for a linear functional of the state vector ", IEEE Trans., Vol. AC-17, No. 3, pp. 308-310, 1973

[15] J. O'Reilly, " Minimal - order observers for linear multivariable systems with unmeasurable disturbances ", Int. J. Contr., Vol. 28, No. 5, pp. 743-751, 1978

[16] R. A. DECARLO, S. H. Zak and G. P Mathews, " Variable structure control of nonlinear multivariable systems : a tutorial ", Proc. of IEEE, Vol. 76, No. 3, pp. 212- 232, 1988

[17] U. Itkis, " Control Systems of variable structure ", New York, Wiley, 1975

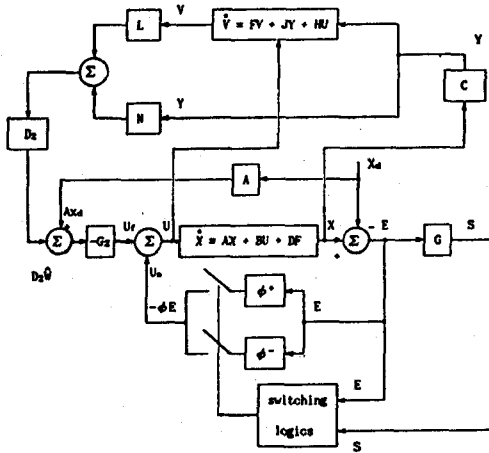


그림 1. 제안된 외란보상 알고리즘에 의한 제어계통의 블록선도

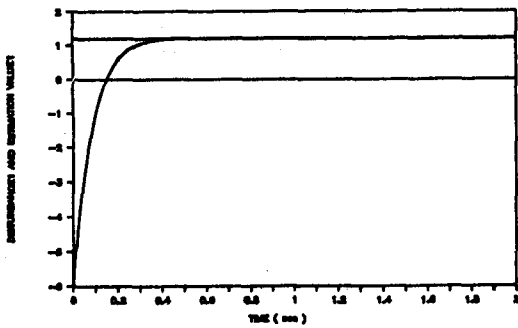


그림 2. 제안된 외란보상 알고리즘에 의한 외란 추정값 \hat{w}_1

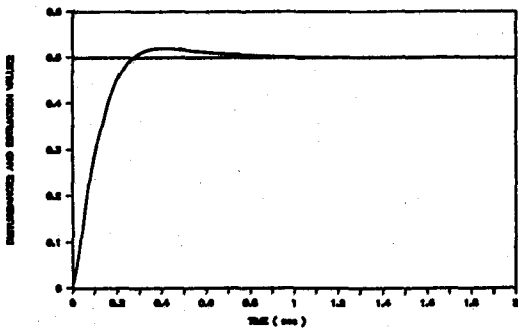


그림 3. 제안된 외란보상 알고리즘에 의한 외란 추정값 \hat{w}_2

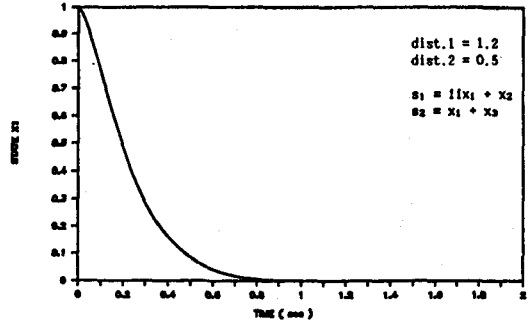


그림 4. 제안된 외란보상 알고리즘에 의한 상태 궤적 x_1

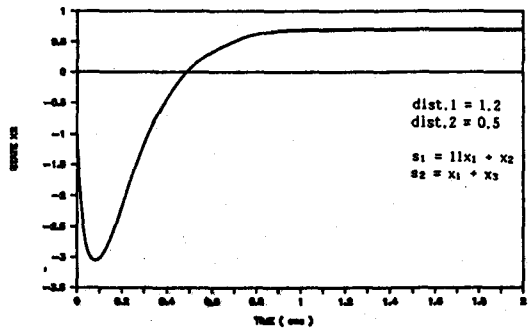


그림 5. 제안된 외란보상 알고리즘에 의한 상태 궤적 x_2

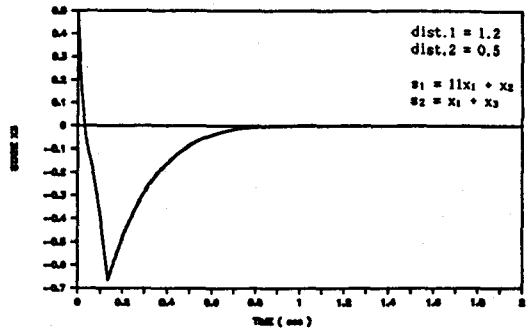


그림 6. 제안된 외란보상 알고리즘에 의한 상태 궤적 x_3

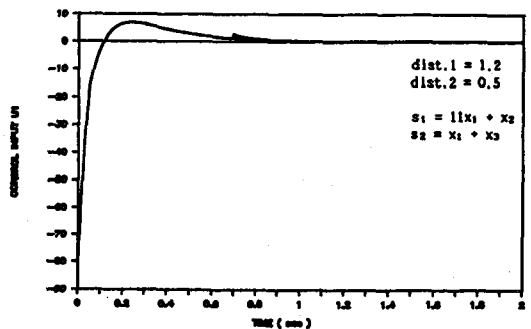


그림 7. 제안된 외란보상 알고리즘에 의한 제어 입력 u_1

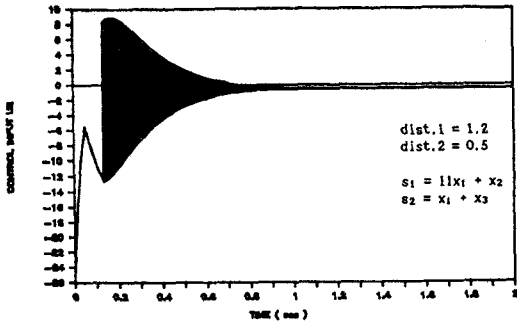


그림 8. 제안된 외란보상 알고리즘에 의한 제어 입력 u_2

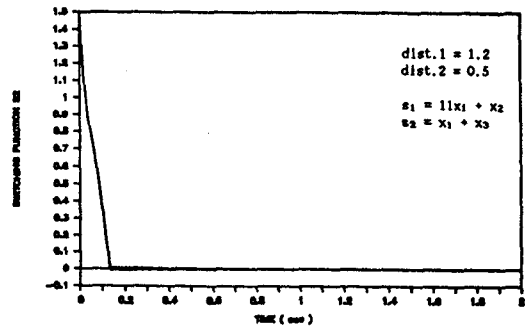


그림 10. 제안된 외란보상 알고리즘에 의한 스위칭 함수 s_2

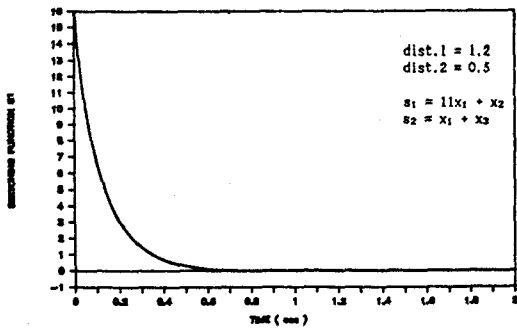


그림 9. 제안된 외란보상 알고리즘에 의한 스위칭 함수 s_1