

극점감도를 고려한 비선형 시스템의 강인한 제어

서 병 설 강 진 식 * 임 동 균

한양대학교 전자통신공학과

* 충청 실업 전문 대학

Robust Control of Nonlinear System by Using Pole Sensitivity

Byung Sul Suh Jin Shig Kang * Dong Gyun Lim

Dept. of Electronic Communication Eng. Hanyang Univ.

* Dept. of Communication Eng. Chung Cheong Coll.

Abstract

In this paper, we present a method of analysing a system with nonlinear parameter by pole sensitivity defined by the rate of pole movement with respect of non-linear parameter variation. Pole sensitivity give us not only the rate of pole movement but also the directional information. We present a method of design of a state feedback for a system with nonlinear system parameter by considering the pole sensitivity and show that the suggested method guarantee the stability robustness for a system with nonlinear parameter, parameter perturbation and unmodelled dynamics.

1. 서론

강인한 (robustness) 제어기의 설계는 매개변수 (parameter)에 구조화된 (structured), 또는 구조화되지 않은 (unstructured) 불확실성을 포함하거나 모델의 전달함수에 불확실성을 포함하는 형태로 다루어져 왔다. 일반적으로 LQ 레귤레이터는 모델의 전달함수에 $\pm 60^\circ$ 의 위상여유 (phase margin)와 $-6 \sim -\infty$ dB의 이득여유 (amplitude margin)를 갖는다는 사실이 밝혀졌지만 공칭 (nominal)모델에 대한 LQ 레귤레이터가 안정하다 하더라도 시스템의 매개변수에 섭동이 존재하는 경우 안정도를 보장할 수 없다. [4] 또한 비선형으로 변하는 매개변수를 포함하는 플랜트에 대한 상태궤환 제어기의 안정도 및 안정도 강인성에 대하여서는 Safanov에 의하여 연구된 바 있으나 스칼라 형태의 비선형성에 대하여 sector안정도 조건을 만족하는 경우 상태궤환 제어기의 강인성 여유가 공칭시스템에 근접함을 보였지만 비선형 함수가 단일 스칼라 함수인 제약을 갖는다. [10]

본 논문에서는 선형부분과 비선형으로 변하는 매개변수를 포함하는 플랜트에 대하여 극점감도를 비선형 매개변수의 변화에 대한 극점변화율로 정의하고, 극점감도를 최소화 하도록 상태궤환 제어기를 설계할 경우 페루우프 시스템의 상태응답이 선형부분에 대한 LQ 레귤레이터의 상태응답에 점근적으로 접근하며 모델의 매개변수에 대한 섭동이 존재하여도 상태궤환 제어기설계변수를 적절히 선택하면 페루우프 시스템의 안정도를 유지할 수 있음을 보인다. 또한 상태궤환 제어기에서 중요한 입력단의 모델불확실성에 대하여서도 강인한 안정도가 보장됨을 보인다. 예제를 들어 제안한 알고리즘의 타당성을 입증한다.

2. 극점감도 (pole sensitivity)

선형시스템 제어에 있어서 고유치 (eigen value)와 고유벡터 (eigen vector)는 중요한 역할을 하며 시스템 행렬에서의 각 요소들에 대한 섭동 (perturbation)은 시스템의 고유치와 고유벡터를 변화시키는 요인이 된다. 행렬 A_0 에 대한 j번째 고유치 λ_j 와 고유벡터 u_j 는 다음식을 만족한다. [8,9]

$$A_0 u_j = \lambda_j u_j \tag{1}$$

비선형 매개변수를 포함하는 행렬 $A(a)$ 를

$$A(a) = A_0 + A a(t) \tag{2}$$

로 가정하고 a 를 비선형 시변 연속함수 (nonlinear time varying continous function)로 다음과 같은 한계값을 갖는다고 가정한다.

$$| a | \leq q \tag{3}$$

식 (2)에 대한 고유치 λ_j 와 우방고유벡터 u_j 는

$$A(a) u_j = \lambda_j u_j \tag{4}$$

를 만족한다. 여기서 λ_j , u , A 는 a 의 함수로 a 가 연속이라고 가정하면 식 (4)는 미분 가능하게 된다. 식 (4)를 a 에 대하여 미분하면

$$\frac{dA(a)}{da} u_j + A(a) \frac{du}{da} = \frac{d\lambda_j}{da} u_j + \lambda_j \frac{du_j}{da} \tag{5}$$

가 된다. 식 (5)의 좌, 우변에 j번째 좌방 고유벡터 v_j 를 곱하면

$$\begin{aligned} v_j^T \frac{dA(a)}{da} u_j + v_j^T A \frac{du}{da} \\ = \frac{d\lambda_j}{da} v_j^T u_j + \lambda_j v_j^T \frac{du_j}{da} \end{aligned} \tag{6}$$

이다. 여기서 $v_j^T A(a) (du_j/da) = \lambda_j v_j^T (du_j/da)$ 인 관계를 이용하면 식 (6)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v_j^T \frac{dA(a)}{da} u_j = \frac{d\lambda_j}{da} v_j^T u_j \tag{7}$$

여기서 극점감도 (pole sensitivity)를 a 의 변화율에 대한 극점 위치 변화율로 정의하면 식 (7)에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_j \equiv \frac{d\lambda_j}{da} = \frac{v_j^T (d A(a) / d a) u_j}{v_j^T u_j} \tag{8}$$

식 (8)은 a 의 변화에 의한 j번째 고유치의 변화율을 나타내며 S_j 값의 부호와 da 의 부호로서 j번째 고유치가 변화하는 방향을 알 수 있다. S_j 와 da 와의 관계를 표 1에 보였다.

표 1. S_j 와 da 와의 관계

	$S_j > 0$		$S_j < 0$	
	$da > 0$	$da < 0$	$da > 0$	$da < 0$
방향	R	L	L	R
$d\lambda_j$	> 0	< 0	< 0	> 0

표 1에서 R은 우측면, L은 좌측면을 나타내며 $d\lambda_j$ 는 고유치의 변화량을 나타낸다.

3. 상태궤환 제어기 설계

3.1 설계문제

다음과 같은 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_0 + \sum_{i=1}^n A_i a_i(t)) x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C_0 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $a_i(t)$ 는 비선형 시변 연속인 함수로 가정하면 극점감도를 고려한 상태궤환 제어기 설계는 제어입력 $u(t)$ 를

$$u(t) = -B^{-1} (F_0 + \sum F_i a_i(t)) x(t) \quad (10)$$

으로 선택할때 비선형 매개변수를 포함하는 시스템의 상태궤환 제어기가 플랜트의 선형부분에 대한 LQR의 특성을 갖기 위해서는 다음의 두 조건을 만족하여야 한다.

$$i) \lambda_i [A_0 + \sum A_i a_i - B F(a_i)] < 0 \quad (11)$$

$$ii) J_{act} \approx J_{LQR} = \min \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q x + u^T R u] dt \quad (12)$$

여기서 $F_i a_i$ 는 a_i 값에 대한 보조제어 이득이며 F_0 는 플랜트의 선형부분에 대한 리카티 대수방정식의 해이다. 또한 J_{act} 는 실제 시스템에 대한 평가함수이며 J_{LQR} 은 플랜트의 선형부분에 대한 평가함수이다. 따라서 상태궤환 제어기는 비선형 매개변수를 포함하는 경우에도 안정도를 보장하고 상태응답이 플랜트의 선형부분에 대한 LQR의 상태응답에 근접하도록 식 (10)과 같은 형태의 제어입력 $u(t)$ 를 결정하는 문제로 된다.

3.2 상태궤환 제어기의 극점감도

이 절에서는 식 (10)인 형태의 제어 입력에 대하여 비선형 변수 $a(t)$ 의 변화에 대한 극점의 변화율인 극점감도를 분석하고 이를 최소화하기 위한 방법을 제안한다.

상태궤환 제어기 루프의 j 번째 고유치와 고유벡터와의 관계식은

$$\begin{aligned} (A_0 + \sum A_i a_i - B F(a_i)) u_j &= \lambda_j u_j \\ &= (A_0 + \sum A_i a_i - B R^{-1} B^T F_0 \\ &\quad - B R^{-1} B^T \sum F_i a_i(t)) u_j \end{aligned} \quad (13)$$

이며 식 (13)의 양변을 a_i 에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (A_0 + \sum A_i a_i - B R^{-1} B^T F_0 \\ - B R^{-1} B^T \sum F_i a_i(t)) \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (A_0 + \sum A_i a_i - B R^{-1} B^T F_0 - B R^{-1} B^T \sum F_i a_i(t))}{\partial a_i} u_j \\ = \frac{\partial \lambda_j}{\partial a_i} u_j + \lambda_j \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 좌방고유벡터 v_j^T 를 양변에 곱하고 우방 고유벡터식 $v_j^T (A_0 + \sum A_i a_i(t) - B R^{-1} B^T F_0$

$$\begin{aligned} - B R^{-1} B^T \sum F_i a_i(t)) \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \\ = v_j^T \lambda_j \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \end{aligned} \quad (15)$$

를 이용하여 정리하면 비선형 매개변수 a_i 에 의한 j 번째 극점의 극점감도는

$$S_{j,i} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial a_i} = \frac{v_j^T (A_0 + \sum A_i a_i - B R^{-1} B^T \sum F_i a_i) u_j}{v_j^T u_j} \quad (16)$$

으로 된다. 즉 j 번째 극점의 변화율은 구조화된 비선형행렬 $A_i a_i(t)$ 의 변화에 따른 이득행렬 $F_i a_i$ 의 변화에 의하여 결정된다. 따라서 조건 (11)과 (12)을 만족하는 제어기는 식 (16)을 최소로 하는 제어입력 $u(t)$ 를 결정 문제로 귀착된다.

4. 상태궤환 제어기 설계

4.1 제어기 설계

구조화된 비선형항을 포함하는 플랜트에 대하여 식 (16)의 극점감도를 최소화 하는 $F_i a_i$ 항을 구하기 위하여 모든 i 에 대하여 $[A_i, B]$ 가 가제어 (controllable)라고 가정하면 $S_{i,j}$ 는 $(\sum A_i a_i(t) - B R^{-1} B^T \sum F_i a_i(t))$ 가 영행렬 (zero matrix)인때 최소가 된다. 여기서 $W B = I$ 를 만족하도록 W 를 선택하면 제어 이득 $F(a_i)$ 는 다음과 같다.

$$F(a_i) = F_0 + W^T R^{-1} W \sum A_i a_i(t) \quad (17)$$

정리 1) 모든 i 에 대하여 $[A_i, B]$ 가 가제어 (controllable)이며 보조제어이득 $F(a_i)$ 를 식 (17)로 선택하면 극점감도 $S_{i,j}$ 가 최소화되며 시스템에 대한 정상상태 응답은 플랜트의 선형부분에 대한 상태궤환 제어기 루프의 응답과 같아진다. (증명)

제어루프의 상태응답은

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-(A_0 + \sum A_i a_i - B R^{-1} B^T (F_0 + \sum F_i a_i))t} x(0) \\ &= e^{-(A_0 - B R^{-1} B^T F_0)t} \\ &\quad \cdot e^{-\sum A_i a_i - B R^{-1} B^T \sum F_i a_i)t} x(0) \end{aligned} \quad (18)$$

이다. 여기서 보조이득행렬 F_i 는 $\sum A_i a_i - B R^{-1} B^T \sum F_i a_i$ 를 영행렬이 되도록 선택한 행렬이므로 제어 루프의 응답은 플랜트의 선형부분에 대한 상태궤환 제어기 루프의 상태응답과 같아진다. 또한 극점감도는

$$S_{j,i} = \frac{v_j^T (A_0 + \sum A_i a_i - B R^{-1} B^T \sum F_i a_i) u_j}{v_j^T u_j} \quad (19)$$

에서 $(\sum A_i - B R^{-1} B^T \sum F_i)$ 가 영행렬이 되도록 F_i 를 선택 하였으므로 모든 고유치에 대하여 영이 된다.

(증명 끝)

일반적으로 $(\sum A_i a_i - B R^{-1} B^T \sum F_i a_i)$ 를 영행렬이되게 하는 F_i 는 구할수 없으며 이러한 경우 비선형항인 $\sum A_i a_i$ 의 영향을 최소로 하기 위해서는 a_i 의 어떤한 값에 대하여서도 행렬 $(\sum A_i a_i - B R^{-1} B^T \sum F_i a_i)$ 의 고유치가 영으로 접근하도록 F_i 를 선택하여야 한다. 여기서 $[A_i, B]$ 가 제어 가능이라 가정하면 i 번째의 비선형항 $A_i a_i(t) - B R^{-1} B^T F_i a_i(t)$ 은 다음과 같은 부 시스템으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= (A_i z(t) - B w(t)) a_i(t) \\ w(t) &= -F_i z(t) \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 상태벡터 $z_i(t)$ 와 제어벡터 $w(t)$ 를 모드(mode)형태로 표현하면

$$\begin{aligned} z_i(t) &= v_i e^{\epsilon_i t} \\ w(t) &= u_i e^{\epsilon_i t} \end{aligned} \quad (21)$$

이 된다. 여기서 ϵ_{ij} 를 서로 다른 값으로 선택하면 j 번째의 페루프 고유치와 제어벡터 및 상태벡터와의 관계에 의하여

$$(\epsilon_{ij} I - A_i) v_{ij}^d = B u_{ij} \quad (22)$$

임을 알 수 있다. 식 (22)을 v_{ij}^d 에 대하여 풀면

$$v_{ij}^d = (\epsilon_{ij} I - A_i)^{-1} B u_{ij} \quad (23)$$

로 된다. 식 (23)에서 벡터 v_{ij}^d 는 $(\epsilon_{ij} I - A_i)^{-1} B u_{ij}$ 의 확장공간에 있어야 함을 나타낸다. 모든 j 에 대한 벡터의 조합 행렬을 V_i 라하면 부 시스템의 페루프 고유치를 ϵ_{ij} 로 하는 제어이득 F_i 는 다음과 같다.

$$F_i = -U_i V_i^{-1}$$

그리고 모든 A_i 에 대한 제어이득 $F(a_i)$ 는

$$F(a_i) = -B R^{-1} B^T (F_0 + \sum U_j V_j^{-1}) \quad (24)$$

이며 이때 ϵ_{ij} 가 극점감도를 최소로 하기위한 설계 변수가 된다.

정리 2) 제어 이득 $F(a_i)$ 를 식 (24)로 선택하고 $\epsilon_{ij} \rightarrow 0$ 인 서로 다른 값으로 선택하면 극점감도 $S_{i,j} \rightarrow 0$ 이 되게하며 비선형 매개변수를 포함하는 시스템에 대한 상태궤환 제어기의 페루프 극점은 플랜트의 선형부분의 LQR의 극점에 접근한다.

증명) 상태궤환 제어 루프의 시스템 행렬은

$$A_{SF} = A_0 - B R^{-1} B^T F_0 + \sum (A_i - B R^{-1} B^T F_i) a_i \quad (25)$$

이며 $(A_i - B R^{-1} B^T F_i)$ 의 좌방 고유벡터 V_i 와 우방고유벡터 U_i 를 A_{SF} 의 좌측과 우측에 곱하면

$$\begin{aligned} \sum [V_i^T A_{SF} U_i] &= \sum [V_i^T (A_0 - B R^{-1} B^T F_0) U_i] \\ &+ \sum [V_i^T (A_i - B R^{-1} B^T F_i) U_i a_i] \end{aligned} \quad (26)$$

로 된다. 여기서 V_i 와 U_i 는 좌방 및 우방 고유벡터이므로 $V_i^T U_i = I$ 이며 유사변환의 특성에 의하여 $\sum [V_i^T (A_0 - B R^{-1} B^T F_0) U_i]$ 의 극점은 플랜트의 선형부분의 LQR극점과 같다. 그리고 \sum

$$[V_i^T (A_i - B R^{-1} B^T F_i) U_i a_i]$$

$$= \sum \Lambda_i a_i \quad (27)$$

이 성립한다. 여기서 Λ_i 는 $\text{diag}[\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}, \dots, \epsilon_{ip}]$ 인 부 시스템의 극점이며 이때 모든 비 선형항수 a_i 에 대한 최대 극점 변화 값은 다음과 같이 구하여 진다.

$$\epsilon_{\max} = \sum \max(\epsilon_{ij}) q \quad (28)$$

그리고 j 번째 극점에 대한 극점감도 S_j 를 구하기 위해 A_{SF} 의 우방 고유벡터 v_{SFij} 와 좌방고유벡터 u_{SFij} 를 식 (16)에 대입하면

$$S_{j,i} = \frac{v_{SFij}^T [V_i^T (A_i - B R^{-1} B^T F_i) U_i] u_{SFij}}{v_{SFij}^T u_{SFij}} \quad (29)$$

로 된다. 이때 극점감도의 최대 값은

$$\begin{aligned} \max(S_j) &= \max \sum \left(\frac{v_{SFij}^T [A_i] u_{SFij}}{v_{SFij}^T u_{SFij}} \right) \\ &= \sum \max(\epsilon_{ij}) \end{aligned} \quad (30)$$

으로 구하여 지며 $\epsilon_{ij} \rightarrow 0$ 으로 선택한 값이므로 식 (24)로 선택한 제어이득은 극점감도를 최소로 하며 실제 시스템의 극점을 플랜트의 선형부분에 대한 LQR의 극점에 접근하게 한다.

(증명 끝)

4.2 안정도 및 강인성 분석

매개변수에 섭동이 있을때의 페루프의 안정도를 조사하기 위하여 Lyapunov함수를 $V(x) = x^T F_0 x$ 로 선택하고 F_0 는 플랜트의 선형부분에 대한 대수 리카티 방정식의 해로 가정하면 ① $V(0)=0$, ② $V(x) > 0$ 을 만족한다. 그리고 제어이득을 식 (23)로 선택하였을 경우 $V(x)$ 의 시간 변화율은

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T F_0 x + x^T F_0 \dot{x} \\ &= x^T (A_0 + \sum A_i a_i - B R^{-1} B^T (F_0 + \sum F_i a_i))^T F_0 x \\ &+ x^T F_0 (A_0 + \sum A_i a_i - B R^{-1} B^T (F_0 + \sum F_i a_i)) x \\ &= x^T [A_0^T F_0 - F_0 B R^{-1} B^T F_0 \\ &+ (\sum A_i a_i - B R^{-1} B^T + \sum F_i a_i)^T F_0 \\ &+ F_0 A_0 - F_0 B R^{-1} B^T F_0 \\ &+ F_0 (\sum A_i a_i - B R^{-1} B^T + \sum F_i a_i)] x \\ &= x^T [A_0^T F_0 - F_0 B R^{-1} B^T F_0 \\ &+ F_0 A_0 - F_0 B R^{-1} B^T F_0 \\ &+ (\sum A_i a_i - B R^{-1} B^T \sum F_i a_i)^T F_0 \\ &+ F_0 (\sum A_i a_i - B R^{-1} B^T \sum F_i a_i)] x \\ &= x^T [-Q - F_0 B R^{-1} B^T F_0 \\ &+ (\sum A_i a_i - B R^{-1} B^T \sum F_i a_i)^T F_0 \\ &+ F_0 (\sum A_i a_i - B R^{-1} B^T \sum F_i a_i)] x \\ &= x^T [-Q - F_0 B R^{-1} B^T F_0] x \end{aligned} \quad (31)$$

이다. 여기서 상태가중치 (state weighting) Q 와 제어 가중치 (control weighting) R 을 각각 $Q = \mu C^T C$, $R = \rho I$ 로 선택하고 $\mu \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$ 로 할 때 식 (31)은

$$\dot{V}(x) = x^T [-\mu C^T C - \frac{1}{\rho} B B^T F_0] x \quad (32)$$

로 되어 $\dot{V}(x)$ 를 영보다 작게한다. 또한 매개변수 A_0 및 A_i 에 섭동 $\delta A_0, \delta A_i$ 가 존재 하여도 시스템의 안정도가 유지되도록 μ 와 ρ 를 설정 함으로서 시스템의 안정도를 보장하게 된다.

제어이득을 식(24)로 선택한 경우 식 (31)은

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T F_0 x + x^T F_0 x \\ &= x^T (A_0 + \sum A_i a_i \\ &\quad - B R^{-1} B^T (F_0 + \sum V_i^{-1} U_i a_i))^T F_0 x \\ &\quad + x^T F_0 (A_0 + \sum A_i a_i \\ &\quad - B R^{-1} B^T (F_0 + \sum V_i^{-1} U_i a_i)) x \\ &= x^T [A_0^T F_0 - F_0 B R^{-1} B^T F_0 \\ &\quad + (\sum A_i a_i - B R^{-1} B^T \\ &\quad + \sum V_i^{-1} U_i a_i)^T F_0 \\ &\quad + F_0 A_0 - F_0 B R^{-1} B^T F_0 \\ &\quad + F_0 (\sum A_i a_i - B R^{-1} B^T \\ &\quad + \sum V_i^{-1} U_i a_i)] x \\ &= x^T [A_0^T F_0 - F_0 B R^{-1} B^T F_0 \\ &\quad + F_0 A_0 - F_0 B R^{-1} B^T F_0 \\ &\quad + (\sum A_i a_i - B R^{-1} B^T \sum V_i^{-1} U_i a_i)^T F_0 \\ &\quad + F_0 (\sum A_i a_i - B R^{-1} B^T \sum V_i^{-1} U_i a_i)] x \\ &= x^T [- Q - F_0 B R^{-1} B^T F_0 \\ &\quad + (\sum A_i a_i - B R^{-1} B^T \sum V_i^{-1} U_i a_i)^T F_0 \\ &\quad + F_0 (\sum A_i a_i - B R^{-1} B^T \sum V_i^{-1} U_i a_i)] x \end{aligned} \quad (33)$$

으로 되며 제어기의 안정조건 $V(x) < 0$ 을 만족하기 위해서는 다음식이 성립하여야 한다. 그리고 식 (33)이 성립하기 위해서는

$$\begin{aligned} &\sum (A_i - B R^{-1} B^T V_i^{-1} U_i)^T a_i F_0 \\ &\quad + F_0 \sum (A_i - B R^{-1} B^T V_i^{-1} U_i) a_i \\ &\quad < Q + F_0 B R^{-1} B^T F_0 \end{aligned} \quad (34)$$

이 성립 하여야 하며 $\rho \rightarrow 0, \mu \rightarrow \infty$ 로 선택하고 norm 을 취하면 다음과 같다.

$$2 \sum \epsilon_{\max} q < \| \mu C^T C + \frac{1}{\rho} [B^T F_0] \|_2 \quad (35)$$

식 (35)는 설계변수 ρ 와 μ 를 적절하게 선정함으로써 매개변수에 섭동항, $\delta A_0, \delta A_i$, 이 존재하여도 안정도를 유지하게 된다.

모델링되지않은 동력학식(unmodelled dynamics)대한 안정도 강인성을 분석하기 위하여 실제 플랜트에 대한 주파수 영역의 표현을 상태궤환에서는 입력단의 모델불확실성의 영향이 크므로 다음과 같이 가정한다. [3]

$$G(s) = G_0(s) [I + L(s)] \quad (36)$$

식 (36)에 대한 블록선도는 아래 그림과 같다.

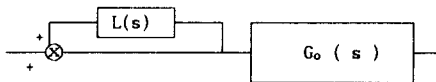


그림 1. 모델 불확실성
Fig 1. Model uncertainty

상태궤환 제어기에 대한 귀환차(return difference)는

$$T_f(s) = I + F(a_1) [sI - A_0 + \sum A_i a_i(t)]^{-1} B \quad (37)$$

로 정의되며 이 시스템에 대한 칼만 부동식을 구하기 위해 $T_f^*(s) \cdot R \cdot T_f(s)$ 를 구하면 $F(a_1)$ 를 식 (17)과 (24)로 선택할 때 각각 다음과 같이 구하여 진다.

$$\begin{aligned} T_f^*(s) \cdot R \cdot T_f(s) &= R + B^T \Phi^{-*} Q \Phi^{-B} \\ &\quad + (W^T R W \sum A_i a_i(s) \Phi^{-B})^* B R^{-1} B (W^T R \\ &\quad \quad \quad \cdot W \sum A_i a_i(s) \Phi^{-B}) \\ &\quad + (W^T R W \sum A_i a_i(s) \Phi^{-B})^* \\ &\quad + (W^T R W \sum A_i a_i(s) \Phi^{-B}) \end{aligned} \quad (38)$$

또는

$$\begin{aligned} T_f^*(s) \cdot R \cdot T_f(s) &= R + B^T \Phi^{-*} Q \Phi^{-B} \\ &\quad + B^T \Phi^{-*} \sum (U_i V_i^{-1})^* a_i(-s) \\ &\quad \quad \quad B R^{-1} B^T \sum (U_i V_i^{-1}) a_i(s) \Phi^{-B} \\ &\quad - B^T \Phi^{-*} F_0 (\sum A_i \\ &\quad \quad - B R^{-1} B^T \sum U_i V_i^{-1}) a_i(s) \Phi^{-B} \\ &\quad - B^T \Phi^{-*} (\sum A_i^T \\ &\quad \quad - \sum (U_i V_i^{-1})^* B R^{-1} B^T) a_i(-s) F_0 \Phi^{-B} \\ &\quad + B^T \Phi^{-*} \sum (U_i V_i^{-1})^* a_i(-s) \\ &\quad + \sum U_i V_i^{-1} a_i(s) \Phi^{-B} \end{aligned} \quad (39)$$

식 (38)과 (39)는 $R = \rho I$ ($\rho \rightarrow 0$), $Q = \mu C^T C$ ($\mu \rightarrow \infty$)로 선택할 때 다음식을 만족한다.

$$T_f^*(s) \cdot T_f(s) \geq I \quad (40)$$

여기서 β 를 다음과 같이 두면

$$\beta = \min \sigma_{\min} [T_f(j\omega)] \quad (41)$$

β 는 다음식을 만족한다.

$$\beta \geq 1 \quad (42)$$

시스템이 안정도를 유지할 조건

$$\sigma_{\min} [T_f(j\omega)] > \sigma_{\max} [L(j\omega)] \quad (43)$$

로부터 $L(j\omega) = \text{diag}[l_1(j\omega), l_2(j\omega), l_3(j\omega), \dots, l_m(j\omega)]$ 인 모델 불확실성에 대하여 $-1 < l_i(j\omega) < 1$ 이 라고 가정하면

$$\sigma_{\min} [T_f(j\omega)] \geq 1 > \sigma_{\max} [L(j\omega)] \quad (44)$$

이 성립한다. 식 (43)와 (44)에서 $\sigma_{\min}, \sigma_{\max}$ 는 각각 최소 특이치(singular value)와 최대 특이치를 나타낸다. 식 (36)으로 표현되는 모델 불확실성에 대하여 이득여유(gain margin) GM과 위상여유(phase margin)은 다음식으로 된다. [3]

$$GM := \frac{1}{1 \pm \beta} \quad (45)$$

$$= [-6 \text{ DB}, \infty \text{ DB}]$$

$$PM := \pm \cos^{-1} [1 - \beta^2 / 2] \quad (46)$$

$$= [\pm 60^\circ]$$

따라서 식 (36)으로 주어지는 모델 불확실성에 대하여 LQR의 위상여유와 이득여유를 갖게됨을 알 수 있다.

5. 결론

비선형 매개변수를 포함하는 시스템에 대한 강인한 상태궤환 제어기의 설계방법이 제안되었다. 시스템에서의 극점감도를 비선형 매개변수의 변화에 대한 페루프 극점의 변화율로 정의하였으며 상태궤환 제어이득은 플랜트의 선형부분에 대한 LQR제어이득과 극점감도를 최소로 하는 보조이득으로 구성되며 이때의 페루프 상태 응답은 플랜트의 선형부분에 대한 상태응답에 근접함을 보였다. 또한 LQR의 설계변수를 조정하여 플랜트 매개변수행렬에 섭동이 존재할 경우에도 상태궤환 제어기의 안정도가 유지되며 상태궤환 제어기에 영향이 큰 입력단의 모델 불확실성에 대하여 서도 LQR의 이득여유 및 위상여유를 갖게됨을 보였다.

본 논문에서는 구조화된 비선형 매개변수를 스칼라 형태의 비선형 함수와 상수행렬의 곱의 형태로 표현하였으며 비선형 함수는 연속이며 라플라스변환이 존재하는 경우에 대하여 고려하였으며 벡터형태의 비선형 함수이거나 라플라스 변환을 구할수 없는 불연속 함수에 대한 연구가 필요하다.

6. 참고문헌

- [1] B.D.O. Anderson and J.B. Moore, "Linear Optimal Control", Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971
- [2] M.G. Safanov and M. Athans, "Gains and phase margin for multiloop LQG regulators." IEEE Trans. Automat. contr., vol. AC-22, pp. 173-179, Apr. 1977.
- [3] N.A. Letomaki, N.R. Sandell, Sr., and M. Athans, "Robustness results in linear quadratic Gaussian based multivariable control designs." IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-26, pp 75-93, Feb. 1981.
- [4] J. C. Doyle. "Robustness with observers," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-24, pp 607-611
- [5] E. Soroka and U. Shaked. "On the robustness of LQ regulators." IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-29, No. 7, July, 1984
- [6] B.D.O. Anderson and J.B. Moore, "Linear Optimal Control : Linear Quadratic Methods", Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990
- [7] Y. K. Foo, "Robustness of multivariable feedback systems: Analysis and optimal design," Univ. Oxford Report, 1985
- [8] F.R. Gantmacher, "Matrix Theory," Chelsea Publishing Company, 1960
- [9] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. "Matrix Computation," The Johns Hopkins University Press., Baltimore, Maryland, 1983
- [10] M.G. Safanov, "Robustness of multivariable feedback systems," MIT Press., Cambridge, 1980

부록

$$\begin{aligned}
 & T_f^*(s) \cdot R \cdot T_f(s) \\
 &= R + G_{SF}^*(s) R + R G_{SF}(s) + G_{SF}^*(s) R G_{SF}(s) \\
 &= R + (R^{-1} B^T (F_0 + \sum F_i a_i(s)) \phi^* B)^* R \\
 &\quad + R (R^{-1} B^T (F_0 + \sum F_i a_i(s)) \phi^* B) \\
 &\quad + (R^{-1} B^T (F_0 + \sum F_i a_i(s)) \phi^* B)^* R \\
 &\quad - (R^{-1} B^T (F_0 + \sum F_i a_i(s)) \phi^* B) \\
 &= R + B^T \phi^{*-1} (F_0 + \sum F_i a_i(s))^* B \\
 &\quad + B^T (F_0 + \sum F_i a_i(s)) \phi^* B \\
 &\quad + B^T \phi^{*-1} (F_0 + \sum F_i a_i(s))^* B R^{-1} \\
 &\quad - B^T (F_0 + \sum F_i a_i(s)) \phi^* B \\
 &= R + B^T \phi^{*-1} [(F_0 + \sum F_i a_i(s))^* \phi^{*-1} \\
 &\quad + \phi^{*-1} (F_0 + \sum F_i a_i(s))] \phi^* B \\
 &\quad + (F_0 + \sum F_i a_i(s))^* B R^{-1} B^T (F_0 + \sum F_i a_i(s))] \phi^* B \\
 &= R + B^T \phi^{*-1} [F_0^T \phi^{*-1} + \sum F_i^T a_i(-s) \phi^{*-1} \\
 &\quad + \phi^{*-1} F_0 + \phi^{*-1} \sum F_i a_i(s) \\
 &\quad + (F_0 + \sum F_i a_i(s))^* B R^{-1} B^T (F_0 + \sum F_i a_i(s))] \phi^* B \\
 &= R + B^T \phi^{*-1} [F_0^T (-sI - A_0 - \sum A_i a_i(s)) \\
 &\quad + \sum F_i^T a_i(-s) (-sI - A_0 - \sum A_i a_i(s)) \\
 &\quad + (-sI - A_0 - \sum A_i a_i(-s))^T F_0 \\
 &\quad + (-sI - A_0 - \sum A_i a_i(-s))^T \sum F_i a_i(s) \\
 &\quad + F_0 B R^{-1} B^T F_0 + \sum F_i^T a_i(-s) B R^{-1} B^T F_0 \\
 &\quad + F_0 B R^{-1} B^T \sum F_i a_i(s) \\
 &\quad + \sum F_i^T a_i(-s) B R^{-1} B^T \sum F_i a_i(s) \\
 &= R + B^T \phi^{*-1} [F_0^T sI - F_0^T A_0 - F_0^T \sum A_i a_i(s) \\
 &\quad + \sum F_i^T a_i(-s) sI - \sum F_i^T a_i(-s) A_0 \\
 &\quad - \sum F_i^T a_i(-s) \sum A_i a_i(s) \\
 &\quad - sI F_0 - A_0^T F_0 - \sum A_i^T a_i(-s) F_0 \\
 &\quad - sI \sum F_i a_i(s) - A_0^T \sum F_i a_i(s) \\
 &\quad - \sum A_i^T a_i(-s) \sum F_i a_i(s) \\
 &\quad + F_0 B R^{-1} B^T F_0 + \sum F_i^T a_i(-s) B R^{-1} B^T F_0 \\
 &\quad + F_0 B R^{-1} B^T \sum F_i a_i(s) \\
 &\quad + \sum F_i^T a_i(-s) B R^{-1} B^T \sum F_i a_i(s)] \phi^* B \\
 &= R + B^T \phi^{*-1} [F_0 sI - sI F_0 - F_0 A_0 \\
 &\quad - A_0^T F_0 + F_0 B R^{-1} B^T F_0 \\
 &\quad - F_0 \sum A_i a_i(s) + F_0 B R^{-1} B^T \sum F_i a_i(s) \\
 &\quad + \sum F_i^T a_i(-s) sI - \sum F_i^T a_i(-s) A_0 \\
 &\quad - \sum F_i^T a_i(-s) \sum A_i a_i(s) \\
 &\quad - \sum A_i^T a_i(s) F_0 + \sum F_i^T a_i(-s) B R^{-1} B^T F_0 \\
 &\quad - sI \sum F_i a_i(s) - A_0^T \sum F_i a_i(s) \\
 &\quad - \sum A_i^T a_i(-s) \sum F_i a_i(s) \\
 &\quad + \sum F_i^T a_i(-s) B R^{-1} B^T \sum F_i a_i(s)] \phi^* B
 \end{aligned}$$

1) $F_i = W^T R W A_i$ 인 경우

$$\begin{aligned}
&= R + B^T \hat{\Phi}^{-*} [Q - F_0 \sum A_i a_i(s) + F_0 \sum A_i a_i(s) \\
&\quad - \sum A_i^T a_i(-s) F_0 + \sum A_i^T a_i(-s) F_0 \\
&\quad + \sum A_i^T a_i(-s) W^T R W sI \\
&\quad - \sum A_i^T a_i(-s) W^T R W A_0 \\
&\quad - \sum A_i^T a_i(-s) W^T R W \sum A_i a_i(s) \\
&\quad - sI W^T R W \sum A_i a_i(s) - A_0^T W^T R W \sum A_i a_i(s) \\
&\quad - \sum A_i^T a_i(-s) W^T R W \sum A_i a_i(s) \\
&\quad + \sum A_i^T a_i(-s) W^T R W \sum A_i a_i(s)] \phi^{-B} \\
&= R + B^T \hat{\Phi}^{-*} [Q \\
&\quad + \sum A_i^T a_i(-s) W^T R W \sum A_i a_i(s) \\
&\quad + \sum A_i^T a_i(-s) W^T R W (sI - A_0 - \sum A_i a_i(s)) \\
&\quad + (- sI - A_0 \\
&\quad - \sum A_i a_i(-s))^T W^T R W \sum A_i a_i(s)] \phi^{-B} \\
&= R + B^T \hat{\Phi}^{-*} Q \phi^{-B} \\
&\quad + B^T \hat{\Phi}^{-*} \sum A_i^T a_i(-s) W^T R W \sum A_i a_i(s) \phi^{-B} \\
&\quad + B^T \hat{\Phi}^{-*} \sum A_i^T a_i(-s) W^T R W \\
&\quad + W^T R W \sum A_i a_i(s) \phi^{-B} \\
&= R + B^T \hat{\Phi}^{-*} Q \phi^{-B} \\
&\quad + (W^T R W \sum A_i a_i(s) \phi^{-B})^* B R^{-1} \\
&\quad - B (W^T R W \sum A_i a_i(s) \phi^{-B}) \\
&\quad + (W^T R W \sum A_i a_i(s) \phi^{-B})^* \\
&\quad + (W^T R W \sum A_i a_i(s) \phi^{-B})
\end{aligned}$$

(2) $F_i = U_i V_i^{-1}$ 인 경우

$$\begin{aligned}
&= R + B^T \hat{\Phi}^{-*} [F_0 sI - sI F_0 - F_0 A_0 - A_0^T F_0 \\
&\quad + F_0 B R^{-1} B^T F_0 - F_0 \sum A_i \\
&\quad + F_0 B R^{-1} B^T \sum U_i V_i^{-1} a_i(s) \\
&\quad + \sum (U_i V_i^{-1})^* a_i(-s) sI \\
&\quad - \sum (U_i V_i^{-1})^* a_i(-s) A_0 \\
&\quad - \sum (U_i V_i^{-1})^* a_i(-s) \sum A_i a_i(s) - \sum A_i^T a_i(-s) F_0 \\
&\quad + \sum (U_i V_i^{-1})^* a_i(-s) B R^{-1} B^T F_0 \\
&\quad - sI \sum U_i V_i^{-1} a_i(s) - A_0^T \sum U_i V_i^{-1} a_i(s) \\
&\quad - \sum A_i^T a_i(-s) \sum U_i V_i^{-1} a_i(s) \\
&\quad + \sum (U_i V_i^{-1})^* a_i(-s) B R^{-1} \\
&\quad \cdot B^T \sum (U_i V_i^{-1}) a_i(s)] \phi^{-B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R + B^T \hat{\Phi}^{-*} [Q + \sum (U_i V_i^{-1})^* a_i(-s) B R^{-1} \\
&\quad \cdot B^T \sum (U_i V_i^{-1}) a_i(s) \\
&\quad - F_0 (\sum A_i - F_0 B R^{-1} B^T \sum U_i V_i^{-1}) a_i(s) \\
&\quad - (\sum A_i^T - \sum (U_i V_i^{-1})^* B R^{-1} B^T) a_i(-s) F_0 \\
&\quad + \sum (U_i V_i^{-1})^* a_i(-s) (sI - A_0 - \sum A_i a_i(s)) \\
&\quad + (- sI - A_0^T \\
&\quad - \sum A_i^T a_i(-s)) \sum U_i V_i^{-1} a_i(s)] \phi^{-B} \\
&= R + B^T \hat{\Phi}^{-*} Q \phi^{-B} \\
&\quad + B^T \hat{\Phi}^{-*} \sum (U_i V_i^{-1})^* a_i(-s) B R^{-1} \\
&\quad \cdot B^T \sum (U_i V_i^{-1}) a_i(s) \phi^{-B} \\
&\quad - B^T \hat{\Phi}^{-*} F_0 (\sum A_i \\
&\quad - B R^{-1} B^T \sum U_i V_i^{-1}) a_i(s) \phi^{-B} \\
&\quad - B^T \hat{\Phi}^{-*} (\sum A_i^T \\
&\quad - \sum (U_i V_i^{-1})^* B R^{-1} B^T) a_i(-s) F_0 \phi^{-B} \\
&\quad + B^T \hat{\Phi}^{-*} \sum (U_i V_i^{-1})^* a_i(-s) \\
&\quad + \sum U_i V_i^{-1} a_i(s) \phi^{-B}
\end{aligned}$$