

다변량 Thomas-Fiering 모형과 Matalas 모형의 비교연구

이 은태, 이 주현 *

경희대학교 토목공학과 부교수/ 한국건설기술연구원 위촉연구원*

1. 서 론

추계학적 모의발생기법은 과거 30여년간 많은 수문학자에 의해 연구가 진행돼왔으며, 초기에는 일변량(univariate), 정상(stationary) 시계열 모형의 개발에 초점을 두었다. 그러나 갈수록 복잡해지는 수자원개발계획으로 인하여 다변량(multivariate) 모형의 필요성이 증대되었다.

다변량 모형은 단일지점이 아닌 2개 이상의 서로 근접해 있는 지점을 대상으로 하는 모형으로서, 자기상관성분 뿐만 아니라 서로 다른 계열간의 상호상관계수(cross correlation)을 함수로 하고 있다. 또한 다변량 모형은 일반적으로, 이용하고자 하는 수문시계열이 단기간의 자료일 경우 일변량 모형을 이용할 경우 야기되는 표본화(sampling) 과정에서의 오차를 많이 줄일수 있어, 보다 정도 높은 결과를 유도할 수 있다고 알려져 있다.

본 연구에서는 단일지점이 아닌 유역전체의 水文特性, 또는 서로 다른 지점간의 상호상관성을 고려한 水文特性을 파악하기 위해서 12개월 週期성을 고려한 매개변수 推定方法에 의해 Thomas-Fiering(1962)에 의해 제시된 1차 自己回歸 形態의 2지점 모형(two-station model)과 Matalas(1967)의 다변량 1차 자기회귀 모형을 洛東江流域의 倭館과 津洞 2지점에 대해 각각 적용하여 100년간의 월유량을 모의발생하였고 모의발생된 자료의 통계학적 특성치를 과거실측자료의 통계학적 특성치와 비교하므로써 다변량 모형을 이용한 資料擴充의 적용가능성을 검토함과 동시에 선정된 두 모형을 서로 분석하여 보았다.

2. 다변량 모형의 구조

2.1 Thomas-Fiering 모형

본 연구에서 이용하게될 2지점(two-station) Thomas-Fiering 모형

은 단일지점(single station)에 적용되는 일변량 Thomas-Fiering 모형으로 부터 유도된 모형으로서 1차 자기회귀 형태의 2지점 Thomas-Fiering 모형을 행렬식으로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$Z_t = C_t \cdot Z_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.1)$$

여기서 Z_t 는 각지점의 標準化, 正規化되어 있는 유량값의 (2×1) 행렬이며, ϵ_t 는 시간(time)에 있어서는 獨立的(independent)이고 공간(space)에 대해서는 從屬的(dependent)인 殘差項(residuals)의 (2×1) 행렬이다.

한편, C_t 는 지점간의 상호상관성과 주기별 자기회귀과정을 나타내는 매개변수의 (2×2) 행렬을 나타낸다.

2.2 Matalas 모형

Matalas에 의해 제안된 다변량 1차 자기회귀 모형을 월별 주기성을 고려하여 n 개의 지점에 대해 적용하면 다음과 같은 행렬형태의 구조를 갖는 식으로 나타낼 수 있다.

$$Z_{v,t} = A_{1,t} \cdot Z_{v,t-1} + \epsilon_{v,t} \quad (2.2)$$

여기서 $Z_{v,t}$ 는 n 개 지점의 標準化, 正規化되어 있는 유량값의 $(n \times 1)$ 행렬이며, $\epsilon_{v,t}$ 는 系列間(serially)에 독립적이고 空間에 대해서는 從屬的인 殘差項의 $(n \times 1)$ 행렬로서 다음 식(2.9)에 의해 산정되어 진다.

$$\epsilon_{v,t} = B_t \cdot \xi_{v,t} \quad (2.3)$$

여기서 $\xi_{v,t}$ 는 시간과 공간에 대해 독립적인 無作爲 變數로서 일반적으로 原時系列의 確率分布型和 동일한 분포형을 갖는 亂數를 이용한다. 한편 식(2.2)과 식(2.3)에서의 $A_{1,t}$ 와 B_t 는 n 개 지점의 상호상관성을 나타내는 매개변수의 $(n \times n)$ 행렬이다.

3. 月流量 發生모형의 適用

3.1 基本統計量 算定

두지점에 대한 월별 기본통계량 산정결과를 표 3.1에 나타냈으며, 표 3.1에서 알 수 있듯이 두지점에 대한 원자료의 歪曲度係數는 대부분 0에서 크게 벗어나고 있다. 따라서 원자료에 대한 正規化作業이 요구되었으며 본 연구에서는 하천유량의 正規化作業에 일반적으로 이용되는 Logarithmic Transformation 중에서 2變數 對數變換(two-parameter

logarithmic transformation)을 이용하였다.

표 3.1 월유량의 기본통계량 산정결과(왜관, 진동)

Month	평균		표준편차		왜곡도계수				상호상관계수	
	왜관	진동	왜관	진동	원자료		대수변환		lag0	lag1
					왜관	진동	왜관	진동		
1	38.1	69.8	37.8	28.1	3.289	0.853	0.386	-0.144	-0.016	-0.012
2	47.7	106.2	37.3	74.7	1.770	1.572	-0.165	0.271	0.640	0.221
3	74.5	182.8	85.9	218.5	3.561	3.624	0.420	1.355	0.799	0.560
4	141.6	326.9	149.6	270.8	2.259	1.280	-0.317	0.026	0.922	0.257
5	112.5	266.3	98.1	203.2	1.362	0.876	-0.429	-0.473	0.885	0.809
6	88.8	236.2	87.4	239.3	2.022	2.339	-0.747	0.378	0.818	0.071
7	444.6	1081.0	325.9	759.4	0.596	1.031	-0.773	-1.206	0.920	0.295
8	310.7	843.3	207.6	518.8	1.136	0.388	-0.410	-0.925	0.873	-0.114
9	268.4	699.8	207.8	552.1	1.083	1.200	-0.351	0.030	0.910	-0.123
10	70.0	195.8	35.5	86.4	0.790	0.146	-1.693	-0.814	0.859	0.577
11	49.4	138.9	27.1	93.0	0.917	1.563	-0.702	0.179	0.863	0.543
12	38.8	94.3	17.1	35.8	-0.003	0.098	-1.036	-2.052	0.657	0.514
	140.0	353.4	109.8	256.7	총 평균					

3.2 Fourier 波數分析

일반적으로 原時系列의 週期性向은 평균, 표준편차, 계열상관계수 등과 같은 기본통계량에서 나타나게 되며 이러한 주기성향을 갖게되는 기본통계량들을 V_t 라고 표시하였을 때 Fourier 波數分析을 이용하여 V_t 를 산정하는 방법은 다음과 같다.

$$V_t = \bar{U} + \sum_{j=1}^h [A_j \cos(2\pi jt/\omega) + B_j \sin(2\pi jt/\omega)], \quad t=1, \dots, \omega \quad (3.1)$$

$$A_j = \frac{2}{\omega} \sum_{t=1}^{\omega} U_t \cos\left(\frac{2\pi jt}{\omega}\right), \quad j=1, \dots, h \quad (3.2)$$

$$B_j = \frac{2}{\omega} \sum_{t=1}^{\omega} U_t \sin\left(\frac{2\pi jt}{\omega}\right), \quad j=1, \dots, h \quad (3.3)$$

3.3 다변량 모형의 매개변수 推定

3.3.1 Thomas-Fiering 모형

Thomas-Fiering 모형의 매개변수 추정을 위해서는 이에 앞서서 標準化, 正規化되어 있는 월유량자료 $Z_{v,t}$ 를 식(2.7)의 Z_t 로 재배열하여야 한다. 즉, $Z_{1,1} = Z_1, Z_{1,2} = Z_2, \dots, Z_{1,12} = Z_{12}, Z_{2,1} = Z_{13}$, 과 같이 되며, 본 연구에서는 20년간의 월유량자료를 사용하였으므로 $Z_{20,12} = Z_{240}$ 으로 된다.

따라서 식(2.7)에서 추정해야 할 매개변수는 C_t 행렬의 元素(element)

$ct_{11}, ct_{12}, ct_{21}, ct_{22}$ 와 殘差項의 $\epsilon_t^{(1)}, \epsilon_t^{(2)}$, 등으로서 주기 t 에 따라 각각

표 3.2 Thomas-Fiering 모형의 매개변수 추정결과

월	Ct		Var $\epsilon_t^{(1)}$	Var $\epsilon_t^{(2)}$	Cov $\epsilon_t^{(1)(2)}$
1	0.22828 -0.26518	0.11558 0.51529	0.89984	0.84381	-0.07224
2	0.79488 0.22021	0.23320 0.73770	0.31974	0.41252	0.30271
3	0.44772 0.07741	0.27376 0.56104	0.56782	0.62369	0.43649
4	0.53579 0.05425	-0.17144 0.23681	0.83032	0.92045	0.83980
5	0.66801 -0.15131	0.19291 0.97143	0.27887	0.30453	0.22742
6	1.23796 0.87662	-1.02452 -0.66323	0.66340	0.82105	0.57548
7	-0.58194 -0.55452	0.77087 0.69426	0.80127	0.84056	0.74243
8	-0.14615 -0.81946	0.02001 0.77506	0.98362	0.89632	0.85729
9	0.32802 -0.07148	-0.40987 0.13584	0.95922	0.99340	0.92422
10	0.64844 0.10712	-0.01314 0.56753	0.59486	0.55584	0.46360
11	0.82720 0.33663	-0.16739 0.23024	0.52561	0.70051	0.50769
12	1.51158 0.33750	-0.79036 0.54495	0.15205	0.27175	0.09733

월별로 산정하게 되며 지점(1)과 지점(2)의 두지점에 대하여 적용할 경우, Σ 로 표시되는 Quantity Matrix의 원소를 산정하므로써 식(3.4)과 식(3.5), (3.6)에 의하여 각각 추정하게 된다.

$$C_t = \sum_{t, t-1} \dots \sum_{t-1, t-1}^i \quad (3.4)$$

$$\epsilon_t^{(1)} = \xi_t \sqrt{\text{Var } \epsilon_t^{(1)}} \quad (3.5)$$

$$\epsilon_t^{(2)} = \xi_t \frac{[\text{Cov}(\epsilon_t^{(1)} \epsilon_t^{(2)})]}{\sqrt{\text{Var } \epsilon_t^{(1)}}} + \xi_{t+1} \sqrt{\frac{\text{Var } \epsilon_t^{(2)} - [\text{Cov}(\epsilon_t^{(1)} \epsilon_t^{(2)})]^2}{\text{Var } \epsilon_t^{(1)}}} \quad (3.6)$$

식(3.5)와 식(3.6)에서 ξ_t 는 時間과 空間에 대하여 獨立인 特性을 나타내는 無作爲 變數로서 일반적으로 亂數(random number)를 이용한다.

이상에서와 같이 Thomas-Fiering 모형의 매개변수는 각지점의 自己回歸過程과 서로 다른 지점간의 상호상관성을 보유하고있는 Quantity Matrix를 산정하므로써 얻어지게 된다.

3.2 Matalas 모형

Matalas의 다변량 1차 자기회귀 모형에서 추정해야 할 매개변수는 식(2.2)에서의 $A_{1,t}$ 행렬과 B_t 행렬이 있다. 이와같은 매개변수행렬(parameter matrix)은 서로 다른 지점간의 상호상관계수를 원소로 하는

표 3.3 Matalas 모형의 매개변수 추정결과

월	$A_{1,t}$		B_t	
1	0.70179	-0.47313	0.84863	0.00000
	0.08035	0.20633	-0.05303	0.96248
2	0.79488	0.23320	0.56545	0.00000
	0.22021	0.73770	0.53533	0.35488
3	0.44772	0.27376	0.75354	0.00000
	0.07741	0.56104	0.57925	0.53680
4	0.53579	-0.17144	0.91122	0.00000
	0.05425	0.23681	0.92162	0.26657
5	0.66801	0.19291	0.52808	0.00000
	-0.15131	0.97143	0.43065	0.34506
6	1.23796	-1.02452	0.81449	0.00000
	0.87662	-0.66323	0.70655	0.56730
7	-0.58194	0.77087	0.89514	0.00000
	-0.55452	0.69426	0.82941	0.39069
8	-0.14615	0.02001	0.99178	0.00000
	-0.81946	0.77506	0.86440	0.38618
9	0.32802	-0.40987	0.97940	0.00000
	-0.07148	0.13584	0.94336	0.32080
10	0.64844	-0.01314	0.77127	0.00000
	0.10712	0.56753	0.60108	0.44106
11	0.82720	-0.16739	0.72499	0.00000
	0.33663	0.23024	0.70027	0.45841
12	1.51158	-0.79036	0.38993	0.00000
	0.33750	0.54495	0.24961	0.45765

4. 結果의 分析

4.1 相關圖 分析

월유량 자료에 대한 持續性과 正常性의 존재 여부를 판단하기 위해서 실측자료와 모의발생된 월유량 자료의 상관도를 그린 것이 그림 4.1과 그림 4.2이다.

그림을 보면 실측자료의 倭館과 津洞지점 모두가 12개월의 뚜렷한 주기성을 나타내고 있으며 동시에 信賴限界를 벗어나고 있는 非正常時系列임을 쉽게 알 수 있다. 그러므로 모의발생에 앞서서 원자료의 正常化 作業이 요구되었으며 Young-Pisano 殘差技法에 의해 標準化한 자료로부터 變量間의 자기상관계수를 구하여 遲滯量에 대해 도식한 것이 그림 4.3과 그림 4.4이다.

이와 같은 과정을 거쳐서, 2가지 모형에 의해 모의발생된 자료로 부터 자기상관계수를 구하여 실측치와 비교하여 보았으며, 역시 그림 4.1과 그림 4.2에서 알 수 있듯이 모의발생된 월유량 자료 또한 실측된 월유량 자료의 12개월 주기성을 잘 재현하고 있다.

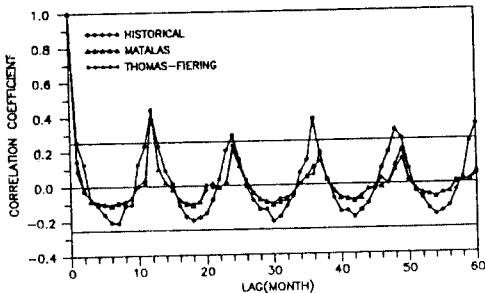


그림 4.1 월유량 자료의 상관도(왜관)

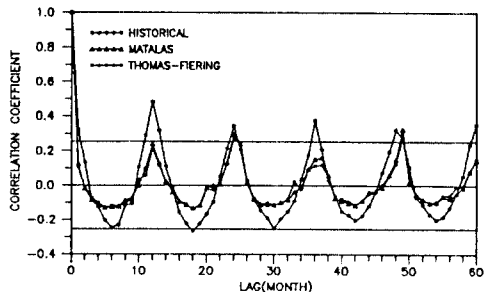


그림 4.2 월유량 자료의 상관도(진동)

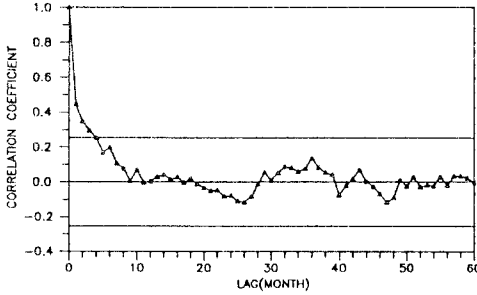


그림 4.3 표준화된 월유량 자료의 상관도(왜관)

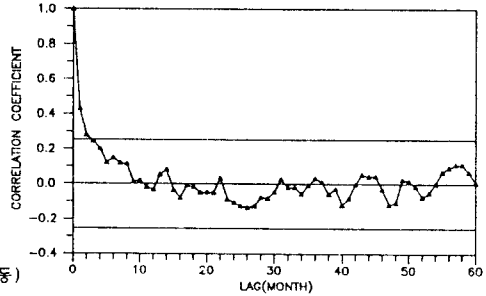


그림 4.4 표준화된 월유량 자료의 상관도(진동)

4.2 月流量의 基本統計量 分析

倭館과 津洞 2지점에 대해 Thomas-Fiering 모형과 Matalas 모형을 이용하여 모의발생된 월유량의 평균과 표준편차를 각각 산정하였으며, 이러한 통계학적 특성치들이 어느만큼 과거의 水文現象을 잘 재현하고 있는가를 알아보기 위하여 표 3.1에 나타낸 실측 월유량자료의 기본통계량과 비교하여 보았고, 이 결과를 그림 4.5~그림 4.8에 나타냈으며, 그림에서 보면 Matalas 모형이 Thomas-Fiering 모형에 비하여 보다 정도 높은 결과를 나타내고 있다.

더우기 다변량 1차 자기회귀 모형이란, 모형의 구조적 체계에서 일변량 1차 자기회귀 모형과 같이 遲滯量이 1(lag 1)일때의 系列相關(serial-correlation) 성분을 갖고 있을 뿐만 아니라, 서로 다른 系列間의 상호상관(cross correlation)성분 또한 갖고 있다는 맥락에서 2가지 모형에 의해 모의발생된 월유량자료로 부터 遲滯量이 0(lag 0)일때와 遲滯量이 1(lag 1)일때의 倭館과 津洞 2지점에 대한 상호상관계수를 구하여 각각 그림으로 나타낸것이 그림 4.9와 그림 4.10 이다.

相關圖 分析시 알 수 있었듯이 2가지 모형은 실측 월유량 자료의 系列

相關성분을 잘 재현하고 있었으며, 그림 4.9와 그림 4.10을 보면 상호상관성분 역시 실측치와 거의 일치하고 있음을 알 수 있다.

특히 Matalas 모형에 의해 모의발생된 월유량자료의 상호상관계수는 Thomas-Fiering 모형보다 각각의 遲滯量에 대해서도 훨씬 높은 정도를 보이고 있는 것을 알 수 있다.

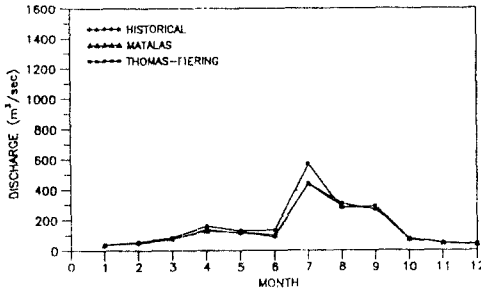


그림 4.5 월유량자료의 평균값 비교(왜관)

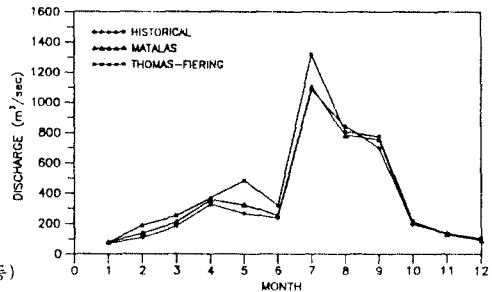


그림 4.6 월유량자료의 평균값 비교(진동)

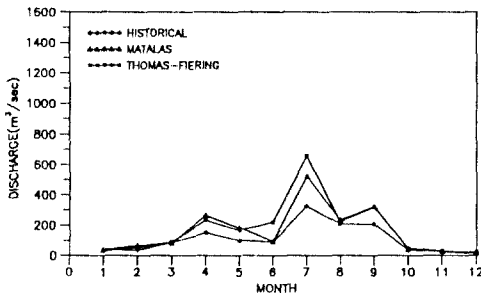


그림 4.7 월유량자료의 표준편차값 비교(왜관)

5. 結 論

본 연구에서는 Thomas-Fiering의 2지점 1차 자기회귀 모형(two-station

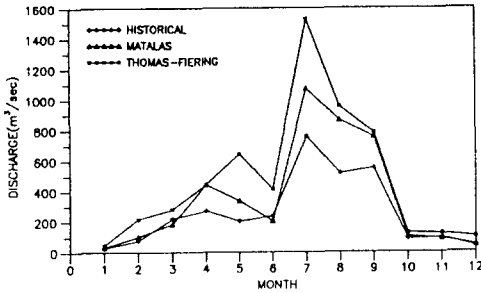


그림 4.8 월유량자료의 표준편차값 비교(진동)

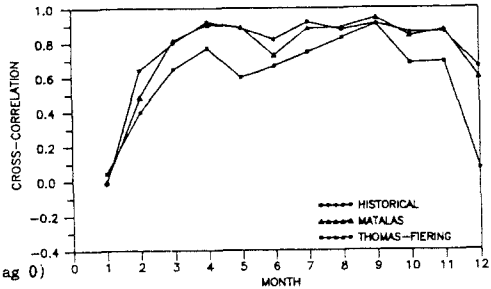


그림 4.9 월유량 자료의 상호상관계수 비교(lag 0)

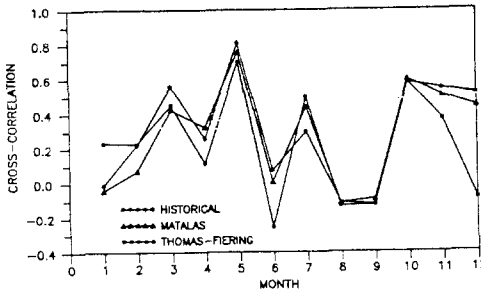


그림 4.10 월유량 자료의 상호상관계수 비교(lag 1)

AR(1) model)과 Matalas의 다변량 1차 자기회귀 모형(multivariate AR(1) model)을 월별 주기성을 고려하여 洛東江 流域의 倭館과 津洞 2지점에 적용하였으며, 100년간의 월유량을 모의발생하여 실측치와 모의발생치의 통계학적 특성치를 비교, 분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 倭館과 津洞 2지점의 正規化 과정에서 나타났듯이 2지점의 실측자료는 對數正規分布에 가장 근사하고 있음을 알 수 있었다.

(2) 相關圖分析시 실측치와 모의발생치 모두 강한 季節性을 나타냈으며, 실측 자료를 正常時系列로 변환시키기 위해서는 1次 標準化作業이 필요하다.

(3) 모형의 매개변수 추정과정에서 Matalas의 다변량 모형을 2개의 지점에 대하여 적용할 경우 이변량 Matalas 모형의 매개변수 행렬인 $A_{1,t}$ 행렬은 Thomas-Fiering 모형의 매개변수 행렬인 C_t 행렬과 동일한 구조를 갖게 됨을 알 수 있었으며, 결과에서 나타나는 차이는 서로 다른 방법에 의해 殘差項에 대한 매개변수를 추정하는데서 기인하고 있음을 알 수 있었다.

(4) 실측자료를 통한 2가지 모형의 매개변수 推定結果를 이용해 모의발생된 有流量의 統計學的 特性值는 實測資料의 特性值를 잘 재현해주고 있었으며, 특히 Matalas 모형은 서로다른 지점간의 相關性을 고려한 河川流量의 모의발생에 적합하다고 생각된다.

(5) 流域全般에 걸친 보다 精度 높은 결과의 算定을 위해서는 더욱 많은 지점을 對象으로 하여 Matalas에 의해 제시된 다변량 모형의 적용이 시행되어야 한다고 생각된다.

參 考 文 獻

1. A.J.Lawrance, "A Reconsideration of the Fiering Two-Station Model", Journal of Hydrology, 29(1976): 77-85
2. J.D.Salas, J.W.Delleur, V.Yevjevich and W.L.Lane, "Applied Modeling of Hydrologic Time Series", Water Resources Publications, 1980
3. J.P.Haltiner and J.D.Salas, "Development and Testing of a Multivariate, Seasonal ARMA(1,1) Model", Journal of Hydrology, 104(1988): 247-272
4. M.B.Fiering, "Multivariate Techniques for Synthetic Hydrology", Journal of Hydraulics Division, ASCE, 33(1964): 43-60
5. N.T.Kottegoda, "Stochastic Water Resources Technology", The Macmillan Press, 1980
6. N.T.Kottegoda and V.Yevjevich, "Preservation of Correlation in Generated Hydrologic Samples through Two-Station Models", Journal of Hydrology, 33(1977): 99-121
7. R.L.Bras and I.Rodriguez-Iturbe, "Random Functions and Hydrology", Addison-Wesley Publishing Company, 1985
8. R.T.Clarke "Mathematical Models in Hydrology". Irrigation and Drainage Paper, 1973