有限要素法에 의한 水營江河口의 污染物質 擴散實態에 관하여

朴 相 吉* 羅 東 烈**

要 旨

河川의 污染이 날로 深刻해 지면서 이에따라 沿岸海域의 污染도 날로 增大되고 있다. 現在 都市生活 污水를 淨化시키고 있지만 완전히 淨化시키는 매우 어려운 實情이다. 本 研究는 都市河川의 污染이 沿岸海域에 미치는 影響을 조사하기 위하여 有限要素法을 導入하여 波浪과 흐름이 共存하는 海域에 대한 數値計算을 實行하여 各種 污染物質이 沿岸海域에 미치는 污染度를 豫測하고자 하였다.

1. 序 論

感潮하천에 대한 研究는 水位가 周邊에 미치는 影響에 대한 方向으로 흐르고 있다. 이러한 傾向은 防災側面에서 매우 重要한 研究이지만 環境側面에서는 깊은 研究가 遂行되지 못했다. 河川의 水質이 沿岸海域에 미치는 影響에 대해서는 土木 工學的 側面에서 充分한 檢討가 이루워 지지 않았으며 단지, 環境 工學的인 側面에서 水質現狀에 대하여 現地 觀測을 통하여 結果만을 提示하여 왔다. 沿岸海域을 污染시키는 주된 原因은 都市河川이다. 따라서 都市河川이 잘 整備 되어야만 沿岸海域의 污染을 減少시킬 수 있다. 沿岸海域의 污染度를 豫測하기 위해서는 土木 工學的인 側面에서 깊은 研究가 必然的으로 遂行 되어야 한다. 이미 外國에서는 이러한 研究 傾向의 範圍를 넘어서 污染防止 對策 樹立까지도 土木 工學的인 側面에서 檢討되고 있다.

本 研究는 旣存擴散 方程式을 利用하여 沿岸海域에 流入되는 污染程度를 旣存資料로 하여 沿岸海域의 污染度 豫測과 海岸開發에 따른 土砂

* 釜山大學校 土木工學科 助敎授 ** 韓國 水資源公社 陝川댐 管理事務所 管理課

(suspend solid) 流出의 擴散範圍 等을 豫測할 수 있는 數値計算의 시스템화를 目的으로 한다.

2. 부유사 물질확산의 수치계산

2.1 확산방정식

임의의 영역 T에 대하여 그 표면을 S, 유속을 U,V,영역내의 물질의 농도를 C 밀도를 ρ 라하면 물질의 물질이 표면 S를 통하여 유출입되는 양(FLUX),q_x,q_y 내부물질의 발생량을 r라 할때 다음의 보존법칙이 성립한다.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho c)\ dxdy + \int_S (qxl+qym)ds = \int_V (\rho r)\ dxdy \tag{1}$$

여기서 l,m은 단위법선의 여현이다.또 식(1)의 좌변 2항은 식(2),(3)과 같이 면적분을 체적적분으로 변환시켜 식(1)에 대입하여 적분기호를 제거하면 식(4)와 같다.

$$\int_S q_x\ l\ ds = \int_V q_{x,x}\ dxdy \tag{2}$$

$$\int_S q_y\ mds = \int_V q_{y,y}\ dxdy \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c) + q_{xx} + q_{yy} = \rho r \tag{4}$$

여기서 물질자체의 확산과 유체의 이류에 의한 효과를 고려하면 식(5),(6)으로 나타낼수 있다.

$$q_x = \rho cu - \rho kc_x \tag{5}$$

$$q_y = \rho cv - \rho kc_y \tag{6}$$

여기서 k는 확산계수이고 식(5)와 식(6)을 식(4)에 대입하면 식(7)이 된다.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c) + (\rho cu)_x + (\rho cv)_y - \rho k(c_{xx} + c_{xy}) = \rho r \tag{7}$$

이때 유체의 밀도가 시간과 공간에 대하여 변하가 없다고 가정하면 식(7)은 식(8)로표현가능하므로 식(8)를 확산 방정식이라고 한다.

$$c + cu_x + cv_y - k(c_{xx}+c_{yy}) = r \tag{8}$$

식(8)의 좌변 제1항은 농도의 시간변화적 변화량이며, 제2,3항은 유체에 의해 운반되는 물질 이동량인 이류항이며 제4,5항은 확산계수에 의해 확산되는 확산항 이다.

2.2 경계조건

경계조건은 전경계S 로서 구성되어 있으며, 전경계S는 경계S1과 경계S2로 구성되어 있다. S1과 S2는 중첩되지 않고 S1에서서는 초기농도 C가 주어지고 S2는 물질량(FLUX)로서주어진다.

$$c = c \text{ on } S_1 \tag{9}$$

$$b = k(c_x l + c_y m) = b \text{ on } S_2 \tag{10}$$

2.3 가중잔차방정식

유한요소법을 적용하기 위해서는 가중잔차 방정식을 유도해야한다. 가중함수 C를 고려하여 식(8)을 영역 V에 대해 적분하면 식(11)과 같다.

$$\int_v c^{*}(c + uc_x + vc_y - kc_{xx} - kc_{yy} - r)dxdy = 0 \tag{11}$$

식(11)의 제2항,3항및 제4,5항을 부분적분하고 경계조건을 도입하여 정리하면 식(12)와 같이된다.식(12)가 물질확산의 가중잔차 방정식 이다.

$$\int_v (c^{*} c)dxdy + \int_v (c^{*} uc_x)dxdy + \int_v (c^{*} vc_y)dxdy + \int_V k(c^{*}_x c_x)dxdy + \int_V k(c^{*}_y c_y)dxdy$$

$$= \int_{S_2} (c^{*} b)ds + \int_V (c^{*} r)dxdy \tag{12}$$

2.4 유한요소 방정식

삼각형 유한요소에 대하여 확산방정식을 적용할 경우 삼각형의 3꼭지점의 농도를 C (=1,2,3)라하면 삼각형 내부의 임의점에서의 농도C는 다음과 같이 표현가능 하다.

$$C = \Phi_{\alpha} C_{\alpha} \tag{13}$$

또 삼각형 내부의 임의점에 대한 가중함수는 식(14)로 표현할 수 있다.

$$c^{*} = \Phi_{\alpha} c^{*}_{\alpha} \tag{14}$$

여기서는 보간함수이며 는 삼각형 요소의 제 절점의 가중함수 이다.일

반적으로 유한요소수치해석에서는 요소절점에서 계산값이 주어지므로 유한요소 내부에서는 이것을 보간할 필요가 있다. 유속U와 C에 대해서도 식(13)과 같이 보간하면 식(15)와 식(16)이 된다.

$$u = \Phi_X u_\alpha \tag{15}$$

$$v = \Phi_X v_\alpha \tag{16}$$

따라서 식(13)에서 식(16)을 식(12)에 대입하여 정리하면 식(17)이 된다.

$$c^*_\alpha \int_V (\Phi_\alpha \Phi_\beta) dxdy c_\beta + c^*_\alpha \int_V (\Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,x}) dxdy\, u_\beta c_\gamma + c^*_\alpha \int_V (\Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,y}) dxdy v_\beta c_\gamma$$

$$+ c^*_\alpha \int_V K(\Phi_{\alpha,x} \Phi_{\beta,x}) dxdy c_\beta + c^*_\alpha \int_V K(\Phi_{\alpha,y} \Phi_{\beta,y}) dxdy c_\beta$$

$$= c^*_\alpha \int_{S_2} (\Phi_\alpha b) ds + c^*_\alpha \int_V (\Phi_\alpha \gamma) dxdy \tag{17}$$

식(16)을 식(17)과 같이 표현하면 식(18)이 유한요소 방정식이 된다.

$$M_{\alpha\beta} c_\beta + K_{\alpha\beta\gamma}{}^{\chi} u_\beta c_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma}{}^{y} v_\beta c_\gamma + S_{\alpha\beta} c_\beta = \Omega_\alpha \tag{18}$$

여기서

$$M_{\alpha\beta} = \int_V (\phi_\alpha \phi_\beta)\ dxdy$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}{}^{x} = \int_V (\phi_\alpha \phi_\beta \phi_{\gamma,x})\ dxdy\ , K_{\alpha\beta\gamma}{}^{y} = \int (\phi_\alpha \phi_\beta \phi_{\gamma,y})\ dxdy$$

$$S_{\alpha\beta} = \int_V K(\phi_{\alpha,x} \phi_{\beta,y})\ dxdy + \int_V K(\phi_{\alpha,y} \phi_{\beta,y})\ dxdy$$

$$\Omega_\alpha = \int_{S_2} (\phi_\alpha b)\ ds + \int_V (\phi_\alpha \gamma) dxdy$$

2.5 시간적분

식(18)을 전체 유한요소계에 대하여 합하면 다음과 같은 방정식이 구해진다.

$$M_{\alpha\beta} C_\beta + (B_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}) C_\beta = \hat{\Omega}_\alpha \tag{19}$$

여기서 $\alpha, \beta = 1, 2 \cdots\cdots N$, N는 전절점의 총수

$$B_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta\gamma}{}^{x} u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma}{}^{x} v_\gamma$$

식(19)에서 시간항을 포함하고 있는 좌변의 재1항은 근사적으로 식(20)과 같이 표현 가능하다. 즉 제 N+1 시간점과 제 N시간점의 농도 C 과 C 의 차는 시간구간 t로 분할한 것으로 식(19)의 제2항도 다음과 같이 근사적으로 대체 할 수 있다.

$$M_{\alpha\beta}C_{\beta} \cong \frac{1}{\Delta t} M_{\alpha\beta}(C_{\beta}^{N+1} - C_{\beta}^{N}) \tag{20}$$

$$(B_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta})C_{\beta} \cong \theta(B_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta})C_{\beta}^{N+1}(1-\theta)(B_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta})C_{\beta}^{N} \tag{21}$$

여기서 $0 \leq \theta \leq 1$

한편 기지항에 관한 제n+1시간점의 값은 식(21)과 같이 쓸 수 있다.

$$\hat{\Omega}_{\alpha} = \hat{\Omega}_{\alpha}^{N+1} \tag{22}$$

따라서 식(20)-식(22)을 이용하여 식(19)를 정리하면 식(23)과 같다.

$$\begin{aligned}&(M_{\alpha\beta} + \theta\Delta t \quad B_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta})C_{\beta}^{N+1}\\ &=(M_{\alpha\beta} \quad (1-\theta) \ \Delta t \quad B_{\alpha\beta} + \quad S_{\alpha\beta})C_{\beta}^{N} + \Delta t\Omega_{\alpha}^{N}\end{aligned} \tag{23}$$

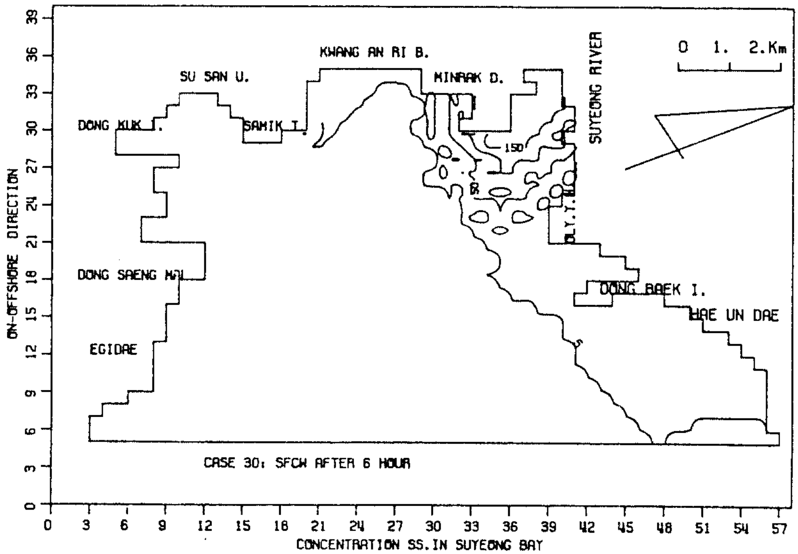
식(23)에서 θ=1인 경우는 식(24)와 같이 쓸 수 있다. 식(24)는 완전 음해법이라 한다.

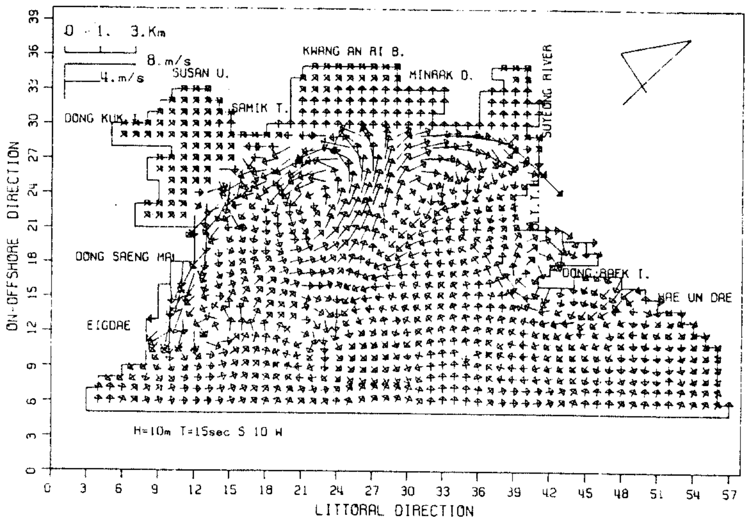
$$(M_{\alpha\beta} + \Delta t \ B_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta})C_{\beta}^{N+1} = M_{\alpha\beta}C_{\beta}^{N} + \Delta t\Omega^{N+1} \tag{24}$$

한편 θ=1/2인 경우를 식(25)와 같이 정리 할 수 있으며 이것을 crank-nicolson법이라 한다.

$$\text{IX}(M_{\alpha\beta} + \frac{\Delta}{2t}[B_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}])C_{\beta}^{N+1} = (M_{\alpha\beta} - \frac{\Delta t}{2}[B_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}])C_{\beta}^{N} + \Delta t\hat{\Omega}_{\alpha}^{N+1} \tag{25}$$

3. 計算結果의 一例


KHANG AN RI B.
SU SAN U.
MINRAK D.
SUYEONG RIVER
0 1. 2.Km
DONG KUK I.
SAMIK T.
150
DONG SAENG MAL
DONG BAEK I.
HAE UN DAE
EGIDAE
ON-OFFSHORE DIRECTION
CASE 30: SFCW AFTER 6 HOUR
CONCENTRATION SS.IN SUYEONG BAY


0 1. 3.Km
8.m/s
4.m/s
KHANG AN RI B.
SUSAN U.
MINRAK D.
SUYEONG RIVER
SAMIK T.
DONG KUK I.
DONG SAENG MAL
DONG BAEK I.
HAE UN DAE
EIGDAE
ON-OFFSHORE DIRECTION
H=10m T=15sec S 10 W
LITTORAL DIRECTION