땅굴탐색의 음향학적 방법에 대한 연구

A Study on Detection of Tunnel by Acoustics

김 유만 , 이 병호
(한국과학기술원 기계공학과)

1. 서 론

고체의 내부를 탐색하는데 있어서 탄성파는 여러 응용분야에서 많이 사용되고 있다[1,2]. 또한 고체내부의 산란체에 의해 생기는 산란파는 산란체에 대한 여러가지 정보를 가지고 있기 때문에 지질학, 비파괴검사 등의 분야에서 산란파의 연구는 필수적이다.

본 연구에서는 땅굴을 균일, 등방성인 탄성고체 내에 있는 속이 빈 원통으로 가정하여 이에 의해 산란된 탄성파의 거동을 살펴봄으로써 땅굴의 위치 및 반경을 알아내는 방법에 대해서 살펴보고자 한다.

고체 내에 있는 원통에 의한 탄성파의 산란은 White[3] 에 의해 처음으로 수식화 되었으며 Lewis 와 Kraft[4]는 White의 급수형태의 해로부터 산란단면적 (Scattering cross section)을 구하였다.

그런데 땅굴탐색의 문제에서는 일정한 주파수를 갖는 음원을 이용하는 연속파 (Continuous wave) 방법보다는 주파수대역을 갖는 펄스를 음원으로 사용하여 발생하는 산란파의 파형을 살펴보는 것이 보다 적절하며 또한 땅굴탐색은 스케일이 크므로 매질의 감쇠를 무시할 수 없다. 따라서 산란파의 임펄스응답을 구해야 한다.

본 연구에서는 복소파수(Complex wave number) 를 도입하여 (감쇠계수를 복소파수의 허수부로 하여) 매질의 감쇠를 고려하여 원통에 의한 산란파의 임펄스응답을 구하였으며 이를 땅굴탐색에 이용하고자 한다. 그리고 계산된 임펄스응답을 검증하기 위하여 감쇠가 없는 매질로는 알루미늄, 감쇠가 있는 매질로는 아크릴에 각각 구멍을 내어 실험을 수행하였다.

2. 이 론

2.1 파동방정식 (Wave Equation)

균일, 등방성인 탄성 고체 내에서 스트레스 텐서 τ_{ij} 는 스트레인 텐서 ε_{ij} 와 다음의 관계가 있다.

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{1}$$

여기서 λ,μ 는 Lame 상수이다. 또한 스트레인 텐서는 변위벡터 u_i 와

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2}$$

인 관계가 있으며, 체력(Body force)이 없는 경우 고체내의 운동방정식은

$$\rho\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) \tag{3}$$

로 표시된다. 여기서 ρ 는 매질의 밀도이다. 그리고 변위포텐셜 ϕ,ψ 를 도입하면 변위벡터 $\mathbf{u}$ 는

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla\times\psi \tag{4}$$

로 놓을 수 있다. 이상의 식들로부터 변위포텐셜에 관하여 방정식을 세우면

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{5}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{6}$$

이다. 여기서 $c_l^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$ 이고 $c_t^2 = \frac{\mu}{\rho}$ 이다. 식(5)는 스칼라 파동방정식으로서 종파가 고체 내를 c_l 라는 속도로 진행하는 것을 나타내며, 식(6)은 벡터 파동방정식으로 횡파가 고체 내를 c_t 란 속도로 진행하는 것을 나타낸다. 그리고 각 변수의 시간항을 일정한 각주파수 ω 를 갖는 $e^{-i\omega t}$ 라 하면 식(5),(6)은 각각

$$\nabla^2\phi + k_l^2\phi = 0 \tag{7}$$

$$\nabla^2\psi + k_t^2\psi = 0 \tag{8}$$

인 Helmholtz 방정식으로 된다. 여기서 $k_l = \frac{\omega}{c_l}$, $k_t = \frac{\omega}{c_t}$ 이며 이를 각각 종파 및 횡파에 대한 파수라 부른다. 이제부터는 편의상 시간항 $e^{-i\omega t}$ 은 생략하기로 한다.

2.2 속이 빈 원통에 의한 평면종파의 산란

2.2.1 입사파

[그림 1]에서와 같이 좌표축을 잡고 -x축 방향에서 각주파수 ω 를 갖는 평면종파가 반경 a인 원통에 수직으로 입사한다고 하자. 이때 입사파의 포텐셜 ϕ_{in} 은

$$\phi_{in.} = \phi_o e^{ik_l x} = \phi_o e^{ik_l r\cos\theta}$$

$$= \phi_o \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m J_m(k_l r)\cos(m\theta) \tag{9}$$

으로 표현되며 여기서 ϕ_o는 입사파의 크기, ε_m 은 Neumann 계수로 m=0일 때 1, m>0일 때 2의 값을 갖는다. 그리고 J_m 은 제 m차 Bessel 함수이다. 이로부터 입사파에 의한 변위 및 스트레스 성분을 구하면

$$(u_r)_{in.} = \phi_o k_k \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m J_m'(k_l r)\cos(m\theta), \tag{10}$$

$$(u_\theta)_{in.} = -\frac{\phi_o}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m m J_m(k_l r)\sin(m\theta), \tag{11}$$

그리고

$$(\tau_{rr})_{in.} = 2\mu\phi_o k_l^2 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \left\{ J_m''(k_l r) - \frac{\lambda}{2\mu} J_m(k_l r) \right\} \cos(m\theta) \tag{12}$$

$$(\tau_{r\theta})_{in.} = 2\mu\phi_o k_l^2 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m m \left\{ \frac{J_m(k_l r)}{(k_l r)^2} - \frac{J_m'(k_l r)}{k_l r} \right\} \sin(m\theta) \tag{13}$$

이다.

2.2.2 산란파

고체 내에서는 종파만 입사하더라도 산란체에 의해 생기는 산란파는 종파 뿐 만이 아니라 횡파도 존재한다. 이 현상을 Mode conversion 이라 한다. 먼저 산란파의 종파성분을 구해보자. 이를 나타내는 포텐셜을 $(\phi^l)_{sc}$ 라 하면 이는 식(5)를 만족하며 다음과 같이 나타낼 수 있다[6].

$$(\phi^l)_{sc.} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m(k_l r)\cos(m\theta) \tag{14}$$

여기서 A_m 은 경계조건으로부터 얻어지는 계수이고 $H_m(z)$ 는 제1종 Hankel 함수이다. 따라서 이로부터 얻어지는 변위 및 스트레스 성분은

$$(u_r^l)_{sc.} = k_k \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m'(k_l r)\cos(m\theta), \tag{15}$$

$$(u_\theta^l)_{sc.} = -\frac{1}{r} \sum_{m=0}^{\infty} A_m m H_m(k_l r)\sin(m\theta), \tag{16}$$

$$(\tau_{rr}^l)_{sc.} = 2\mu k_l^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ H_m''(k_l r) - \frac{\lambda}{2\mu} H_m(k_l r) \right\} \cos(m\theta) \tag{17}$$

$$(\tau_{r\theta}^l)_{sc.} = 2\mu k_l^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m m \left\{ \frac{H_m(k_l r)}{(k_l r)^2} - \frac{H_m'(k_l r)}{k_l r} \right\} \sin(m\theta) \tag{18}$$

이다.

산란파의 횡파는 변위의 움직이는 방향에 따라 두 가지로 나뉜다. 즉, 변위의 방향은 파동의 진행방향과 수직이나 수직인 방향은 두 개이기 때문이다. 예를들어 횡파가 x축 방향으로 진행한다면 변위의 방향이 y축 및 z축 방향인 두 경우가 생긴다. 전자를 SV파라 부르며 후자를 SH파라 부른다. 본 연구에서는 입사파가 원통에 수직으로 들어오는 종파이므로 산란파의 횡파 성분은 SV파 만으로 이루어 진다. 이를 나타내는 포텐셜을 ψ라 놓으면 이는 식(6)을 만족하며 이의 해는

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \nabla\times\{\nabla\times[zH_m(k_t r)\sin(m\theta)]\}$$

$$= k_t^2 \sum_{m=0}^{\infty} B_m H_m(k_t r)\sin(m\theta)z \tag{19}$$

으로 쓸 수 있다[6]. 여기서 B_m 은 경계조건으로부터 얻어지는 계수이며 z는 z축방향의 단위 벡터이다. 따라서 변위 및 스트레스 성분은

$$(u_r^t)_{sc.} = \frac{k_t^2}{r} \sum_{m=0}^{\infty} B_m m H_m(k_t r)\cos(m\theta), \tag{20}$$

$$(u_\theta^t)_{sc.} = k_t^3 \sum_{m=0}^{\infty} B_m H_m'(k_t r)\sin(m\theta), \tag{21}$$

$$(\tau_{rr}^t)_{sc.} = 2\mu\frac{k_t^2}{r^2} \sum_{m=0}^{\infty} B_m m\{k_t r H_m'(k_t r) - H_m(k_t r)\}\cos(m\theta) \tag{22}$$

$$(\tau_{r\theta}^t)_{sc.} = -\mu k_t^4 \sum_{m=0}^{\infty} B_m\{2H_m''(k_t r) + H_m(k_t r)\}\sin(m\theta) \tag{23}$$

으로 된다.

이제 경계조건을 생각해보자. 산란체가 속이 빈 원통이므로 산란체 표면에서 모든 스트레스 성분이 없어야 한다. 즉, r = a 에서

$$(\tau_{rr})_{in.} + (\tau_{rr}^l)_{sc.} + (\tau_{rr}^t)_{sc.} = 0, \tag{24}$$

$$(\tau_{r\theta})_{in.} + (\tau_{r\theta}^l)_{sc.} + (\tau_{r\theta}^t)_{sc.} = 0, \tag{25}$$

으로 경계조건을 표시할 수 있다. 따라서 앞에서 구한 스트레스 성분을 식(24),(25)에 대입하면

$$2\mu\phi_o k_l^2 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \left\{ J_m''(k_l a) - \frac{\lambda}{2\mu} J_m(k_l a) \right\} \cos(m\theta)$$
$$+ 2\mu k_l^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ H_m''(k_l a) - \frac{\lambda}{2\mu} H_m(k_l a) \right\} \cos(m\theta)$$
$$+ 2\mu\frac{k_t^2}{a^2} \sum_{m=0}^{\infty} B_m m\{k_t a H_m'(k_t a) - H_m(k_t a)\}\cos(m\theta) = 0 \tag{26}$$

$$2\mu\phi_o k_l^2 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m m \left\{ \frac{J_m(k_l a)}{(k_l a)^2} - \frac{J_m'(k_l a)}{k_l a} \right\} \sin(m\theta)$$

$$+ 2\mu k_l^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m m \left\{ \frac{H_m(k_l a)}{(k_l a)^2} - \frac{H_m'(k_l a)}{k_l a} \right\} \sin(m\theta)$$

$$- \mu k_t^4 \sum_{m=0}^{\infty} B_m \{2H_m''(k_t a) + H_m(k_t a)\} \sin(m\theta) = 0 \quad (27)$$

으로 쓸 수 있고 여기서 Sinusoidal함수의 직교성을 이용하면 식(26),(27) 의 Σ는 없어지므로 계수 A_m 및 B_m 은 모두 얻어진다. 따라서 산란파의 종파 및 횡파의 포텐셜은 모두 구해진다. 그런데 횡파의 속도는 일반적으로 종파의 속도의 1/2 정도이고 또한 횡파는 측정하기가 종파보다 힘들므로 고체 내를 탐색하는 경우 산란파의 횡파성분은 별로 이용하지 않는다. 본 연구에서도 산란파의 종파성분을 땅굴탐색에 이용하고자 한다. 이에 따라 계수 A_m 만을 구하면

$$A_m = -\phi_0 \varepsilon_m i^m \frac{2m^2 B + y^2 DE}{2m^2 A + y^2 CE}, \quad (28)$$

여기서 $A = \frac{H_m(x)}{x^2} - \frac{H_m'(x)}{x}$, $B = \frac{J_m(x)}{x^2} - \frac{J_m'(x)}{x}$,

$C = H_m''(x) - \frac{\lambda}{2\mu} H_m(x)$, $D = J_m''(x) - \frac{\lambda}{2\mu} J_m(x)$,

$E = \frac{2H_m''(y) + H_m(y)}{yH_m'(y) - H_m(y)}$ 이고 $k_l a = x$, $k_t a = y$ 이다.

2.2.3 긴 파장 근사 (Long Wavelength Approximation)

입사파의 파장이 산란체의 크기보다 배우 큰 경우, 즉 $ka \ll 1$ 인 경우 다음의 근사식이 성립한다.

$$J_m(x) \approx \frac{(x/2)^m}{m!}, \quad (29)$$

$$J_m'(x) \approx \frac{1}{2} \frac{m(x/2)^{m-1}}{m!}, \quad (30)$$

$$J_m''(x) \approx \frac{(x/2)^m}{m!} \left(\frac{m^2 - m}{x^2} - 1 \right), \quad (31)$$

$$H_o(x) \approx -\frac{2}{\pi i} \ln x, \ H_m(x) \approx \frac{1}{\pi i}(m-1)!\ (x/2)^{-m}, \ (m>1) \quad (32,33)$$

$$H_o'(x) \approx -\frac{2}{\pi i}\frac{1}{x}, \ H_m'(x) \approx -\frac{1}{2\pi i} m!\ (x/2)^{-(m+1)}, \quad (34,35)$$

$$H_o''(x) \approx \frac{2}{\pi i}\frac{1}{x^2}, \ H_m''(x) \approx \frac{1}{\pi i}(m+1)!\ (x/2)^{-m}\frac{1}{x^2}. \quad (36,37)$$

이를 바탕으로 계수 A_m 을 구하면 m=0 와 m=1 인 경우 만이 가장 큰 항으로 남게 된다.

$$A_0 \approx \phi_0 \pi i \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu} \right) \frac{(k_l a)^2}{2}, \quad (38)$$

$$A_1 \approx \phi_0 \pi \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu} \right) \frac{(k_l a)^2}{2}. \quad (39)$$

즉, 입사파의 파장이 긴 경우에 산란된 종파의 포텐셜은 다음과 같이 근사화 된다.

$$(\phi^l)_{sc.} \approx A_0 H_0(k_l r) + A_1 H_1(k_l r)\cos\theta. \quad (40)$$

2.2.4 매질의 감쇠

매질의 감쇠효과는 다음과 같이 복소파수를 도입함으로써 고려할 수 있다.

$$k_l = \frac{\omega}{c_l} + i\alpha_l, \quad (41)$$

$$k_t = \frac{\omega}{c_t} + i\alpha_t, \quad (42)$$

여기서 α_l 및 α_t 는 각각 종파 및 횡파에 대한 감쇠계수이다. 따라서 복소변수를 갖는 Bessel 및 Neumann 함수를 구해야 한다. 이는 Bessel 함수의 가법정리[7]를 이용하여 구할 수 있다. 즉,

$$J_m(u+iv) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{m-k}(u) J_k(iv), \quad (43)$$

$$Y_m(u+iv) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_{m-k}(u) J_k(iv), \quad (44)$$

$$J_m(iv) = i^m I_m(v), \quad (45)$$

인 관계를 이용하면 감쇠효과를 고려한 산란파를 계산할 수 있다. 여기서 u,v는 모두 실수이며 I_m은 제 m차 수정된 Bessel 함수이다.

이상으로부터 우리는 주파수영역에서 속이 빈 원통에 의한 산란된 종파를 구하였다. 따라서 역 Fourier 변환을 이용하면 시간영역에서의 산란파의 임펄스응답을 계산할 수 있다.

3. 실 험

[그림 2]에 실험장치를 나타내었다. 송신 변환자는 Burst pulser (Ultran PB-9400A) 에서 발생되는 전기적인 펄스에 의해 가진된다. 이에 의해 발생되는 탄성파는 매질 내를 진행하여 시편 내부의 원통형 구멍에 의해 사방으로 산란된다. 산란된 탄성파는 시편의 벽면에 위치한 수신변환자에서 전기신호로 바뀌고 이는 Broadband receiver (Ultran BR-640A) 에서 증폭되어 Digital oscilloscope (Tektronics 2432A) 로 전송되어 파형을 얻게 된다.

시편은 알루미늄 및 아크릴 원통을 각면이 서로 30°의 각을 이루도록 12각 기둥으로 가공하여 가운데에 구멍을 내었다. 구멍의 반경은 알루미늄의 경우 2.25 mm 이며 아크릴에서는 2.05 mm 이다.

[표 1]에 시편의 특성값을 나타내었으며 [그림 3]에 송신변환자에서 발생하는 파형의 모습과 스펙트럼을 나타내었다. 아크릴의 감쇠계수는 펄스측정법[8,9]으로 구하였으며 측정된 감쇠계수는 주파수에 비례하여 증가한다. [그림 4]와 [그림 5]에 아크릴의 감쇠계수를 나타내었다.

4. 결 과 및 토 론

[그림 6]은 특정주파수에서 감쇠계수에 따른 산란

파의 크기를 각도에 따라 그린 것이다. 주파수가 커짐에 따라 산란파의 지향성이 뚜렷하게 나타남을 알 수 있으며 감쇠계수가 증가함에 따라 그 크기가 감소함을 알 수 있다. [그림 7]에서 [그림 9]는 알루미늄 및 아크릴의 특정각도에서 계산된 산란파의 임펄스응답이다. 이는 2개의 뚜렷한 peak를 보이고 있는데 두번째의 peak는 θ가 커질수록 (후방산란이 될수록) 첫번째의 것과 멀어지며 또한 그 크기도 작아지고 있음을 알 수 있다. 특히 두 peak사이의 시간차는 $2a\theta/c_1$의 값과 일치하고 있는데 이는 x축을 경계로 원통 위로 지나가는 산란파와 원통 밑으로 지나가는 산란파의 경로차를 종파의 속도로 나눈 값이다. 이는 땅굴탐색에 있어서 매우 중요한 것으로서 두 지점 또는 그 이상의 지점에서의 임펄스응답을 알면 땅굴의 위치 및 반경을 예측할 수 있는 파라메터가 된다. 그러나 후방산란으로 갈수록 두번째 peak의 크기가 작아지므로 수신점은 전방산란의 위치에 놓는 것이 유리함을 알 수 있다.

[그림 10]에서 [그림 12]는 계산한 임펄스응답을 검증하기 위하여 수신변환자에서 측정된 파형을 계산된 임펄스응답과 [그림 3]의 파형과의 Convolution과 비교한 것이다. 여기서의 오차는 보다 정밀한 감쇠계수측정 및 수신변환자의 면적에 대한 보정을 수행하면 감소하리라 생각된다.

참 고 문 헌

[1] *Methods of Theoretical Physics Vol.19 Ultrasonics*, edited by P.D. Edmonds (Academic Press, 1981).

[2] *Ultrasonic Testing*, edited by J. Szilard (John Wiley & Sons, 1982).

[3] R.M. White, "Elastic wave scattering at a cylindrical discontinuity in a solid," J. Acoust. Soc. Am., Vol.30, No.8, 771-785 (1958).

[4] T.S. Lewis, D.W. Kraft and N. Hom, "Scattering of elastic waves by a cylindrical cavity in a solid," J. Appl. Phys., Vol.47, No.5, 1795-1798 (1976).

[5] D.L. Jain and R.P. Kanwal, "Scattering of elastic waves by circular cylindrical flaws and inclusions," J. Appl. Phys., Vol.50, No.6, 4067-4109 (1979).

[6] P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, 1953), Chap.13.

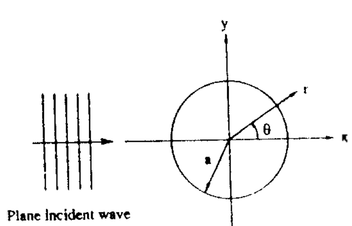
[7] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover,1970).

[8] M.N. Toksoz, D.H. Johnston and A. Timur, "Attenuation of seismic waves in dry and satuated rocks:I. Laboratory measurements," Geophysics, Vol.44, No.4, 681-690 (1978).

[9] X.M. Tang, M.N. Toksoz and H. Cheng, "Elastic waveradiation and diffraction of a piston source," J. Acoust. Soc. Am., Vol.87, No.5, 1894-1902 (1990).

[10] B. Hartman and J. Jarzynski, "Ultrasonic hysteresis absorption in polymers," J. Appl. Phys., Vol.43, No.11, 4304-4312 (1972).

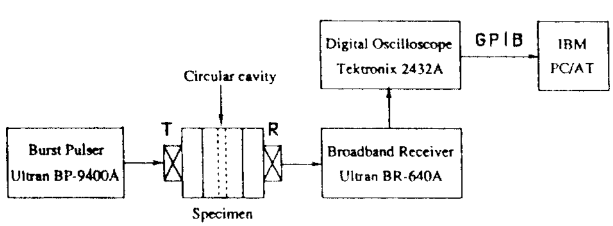
[11] C.H. Chen and S.K. Sin, "On effective spectrum-based ultrasonic deconvolution techniques for hidden flaw characterization," J. Acoust. Soc. Am., Vol.87, No.3, 976-987 (1990).



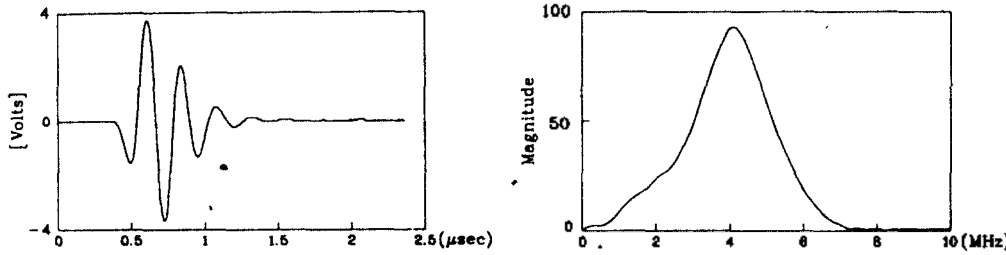
[그림 1] 좌표계 및 입사파의 방향

Table 1. The physical quantities for the specimens. f = frequency (MHz)

	aluminium	acryl
Longitudinal velocity	6370 (m/s)	2640 (m/s)
Transverse velocity	3180 (m/s)	1270 (m/s)
Logitudinal attenuation coefficient	-	17f (Np/m)
Transverse attenuation coefficient	-	90f (Np/m)
Radius of the cylindrical cavity	2.25(mm)	2.05 (mm)
Distance between the receiver and the cavity	64 (mm)	33.5 (mm)



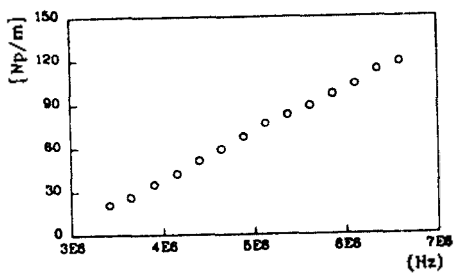
[그림 2] 실험장치의 개략도



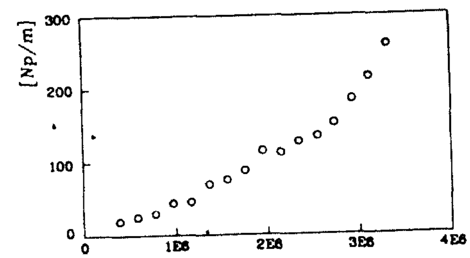
(a) Input waveform

(b) Spectrum of input wave

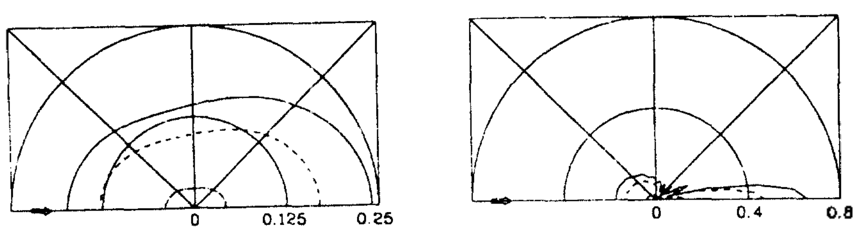
[그림 3] 입력파형 및 스펙트럼



[그림 4] 아크릴의 감쇠계수 (종파)



[그림 5] 아크릴의 감쇠계수 (횡파)

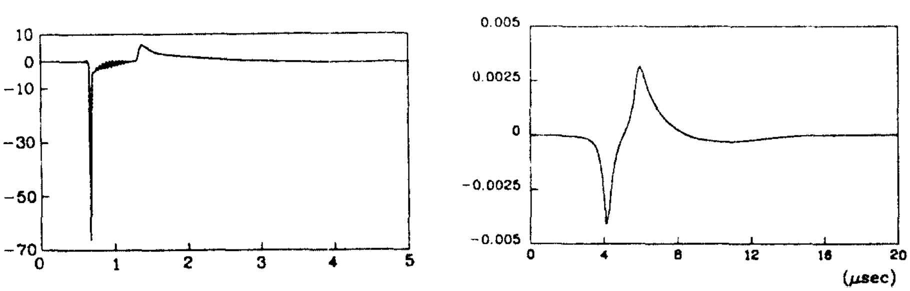


(a) $k_l a = 1.0$

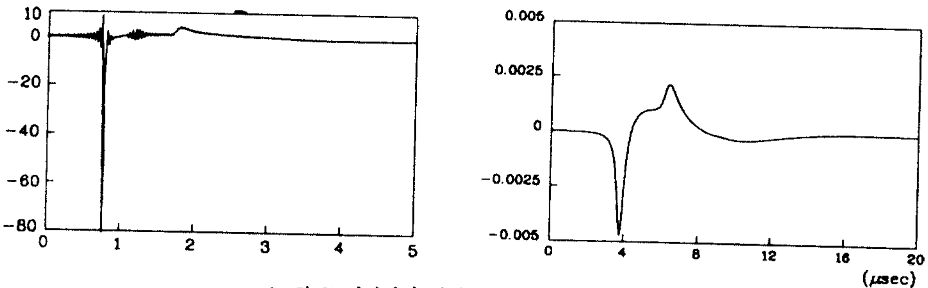
(b) $k_l a = 10$

(실선: $\alpha_l = 0$, 점선: $\alpha_l = 10$ [Np/m], 일점쇄선: $\alpha_l = 20$ [Np/m])

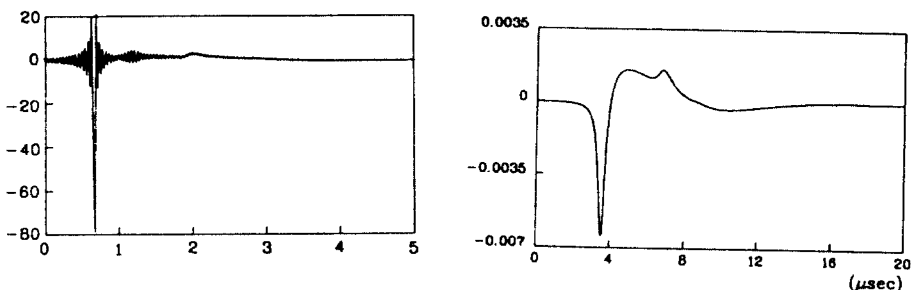
[그림 6] 산란파의 지향특성



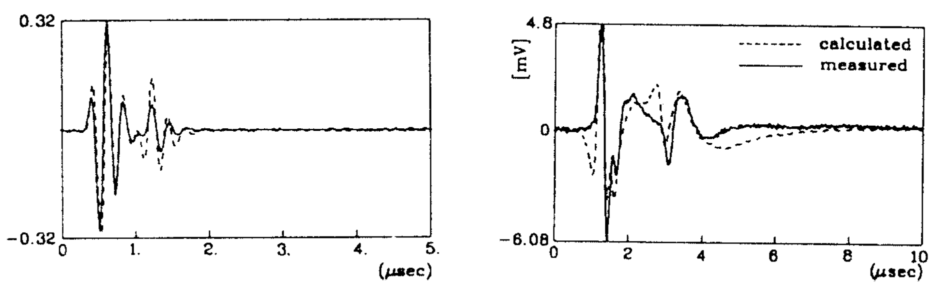
[그림 7] 산란파의 임펄스응답 (θ = 60°)



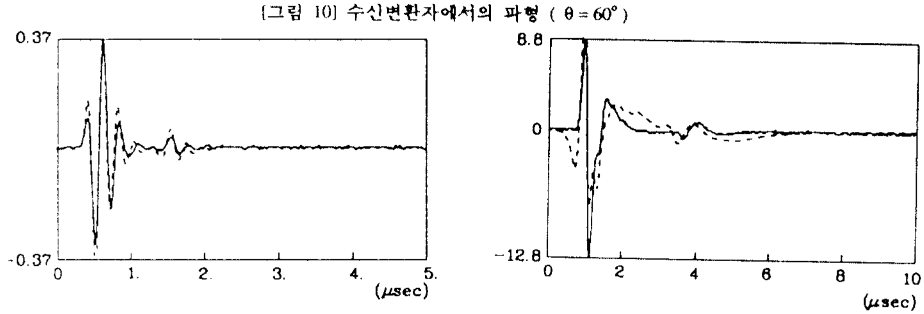
[그림 8] 산란파의 임펄스응답 (θ = 90°)



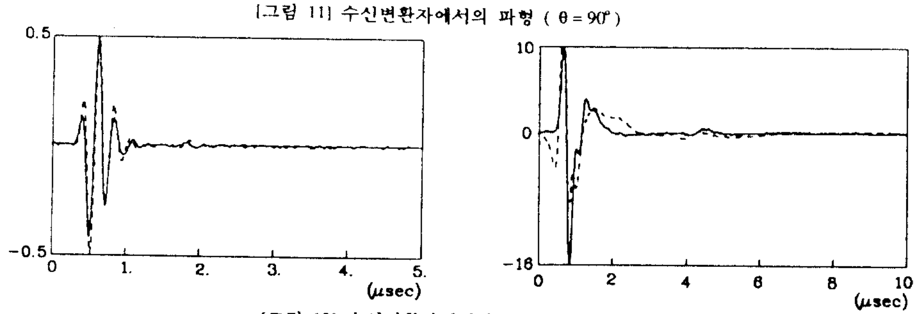
[그림 9] 산란파의 임펄스응답 (θ = 120°)



[그림 10] 수신변환자에서의 파형 (θ = 60°)



[그림 11] 수신변환자에서의 파형 (θ = 90°)



[그림 12] 수신변환자에서의 파형 (θ = 120°)