

彈塑性 構成式을 통해서 본 흙의 降伏曲面

1. 序 文

本文은 최근에 연구되어 온 여러가지 構成式(構成 model, model)이 어떠한 형태의 降伏曲面을 가정하고 있는 가를 概觀 하려는 것이다. 현재 제안되고 있는 構成式은 Mohr-Coulomb의 規準을 포함하여 모두 수십개에 이를 것이다. 이들 모두가 각기 특징을 가지고 흙의 應力-變形 관계를 數式化 하려고 노력한 결과이며 따라서 適用상의 제한은 있을지라도 모두가 깊이 흙의 본질에 접근 하려는 연구 끝에 提案된 것이다. 이와같은 연구는 土質力學試驗의 精密化와 함께 土質에 대한 塑性 增分理論의 擴大응용, 그리고 理論式의 컴퓨터를 통한 數值計算 技法의 발달이 원인이 되어 1970년대 이후는 가히 百家爭鳴의 느낌이 있다.

우리는 재료의 變形과정을 흔히 降伏(yield), 破壞(failure), 破斷(rupture)의 3가지로 구분하여 이야기한다. 降伏이란 재료가 彈性舉動에서 벗어나 塑性舉動이 큰 상태로 변화되어가는 과정을 말하고 파괴는 재료가 외력에 대하여 저항력이 증가하다가 감소하는 상태로 변화하는 과정을 말하며 破斷은 재료가 이제는 2개 이상으로 분단되는 과정을 말한다. 이와같은 3가지의 과정은 그 재료의 stress-strain 관계에서 特異點(singular point)을 의미하며 따라서 이들은 應力空間에서 좌표로 표현할 수 있다. 이때 나타나는 降伏曲面이나 破壞曲面的 수학적 표현이 降伏規準(또는 降伏函數), 破壞規準 이라고 부른다.

토질역학에서는 이와같은 기준으로서 오래전 부터 Mohr-Coulomb, Tresca, von Mises의 기준을 이용해 왔으며 특히 Mohr-Coulomb의 파괴기준은 土壓理論등 極限 應力 平衡狀態(塑性變形的 始點이란 가정)의 이론 체계아래 흙구조물의 崩壞應力の 豫測이나 slip line의 이론등에 널리 쓰이고 있는 것은 주지의 사실이다. 그러나 이와같은 規準은 재료의 변형 과정에서 항복과 더불어 재료가 硬化(work hardening) 또는 軟化(work softening) 되는 特性이나 應力狀態가 단순한 線形 관계로 一貫 되는점, 降伏後의 變形關係를 논의 할 수 없는 점들이 있다.

따라서 stress-strain의 전과정을 통해서 초기항복 부터 硬化, 軟化, 破壞에 이르는 變形過程을 밝힐 수 있는 構成式의 필요성이 요구되고 많은 提案式이 나오게 되었다. 이와함께 이들 構成式을 예전처럼 꼭 降伏規準 또는 破壞規準 이라고 구별하지 않으며 단순히 降伏規準 또는 構成式(모델) 이라 하며 破壞規準은 이의 특별한 경우에 해당한다.

本文에서는 이와같은 規準 가운데서 彈塑性 構成式으로 내용을 制限 하였고 그 이유는 구성식의 주류가 彈塑性이며 이를 기본으로 많은 構成式이 발전되었고 지금도 많은 연구가 진행중이기 때문이다. 또한 시간상 주로 等方壓縮이나 等方硬化에 한정해 설명하고 자 한다.

2. 既存의 規準

여기서는 土質力學에서 잘쓰이는 Mohr-Coulomb, Tresca, Mises의 規準을 主應力 空間 座標에서 例示해 둔다.

1) Mohr-Coulomb criterion ($\tau = f(\sigma)$)

$$\sigma_1 = 2c \frac{\cos\phi}{1-\sin\phi} + \sigma_3 \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \quad (\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3)$$

$$\sigma_3 = 2c \frac{\cos\phi}{1-\sin\phi} + \sigma_1 \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \quad (\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1)$$

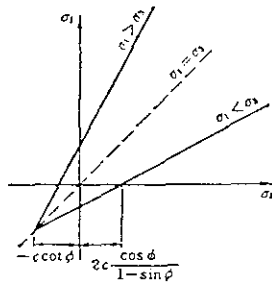


Fig.2-1 Mohr-Coulomb 規準과 σ_1 - σ_3 면과의 交点

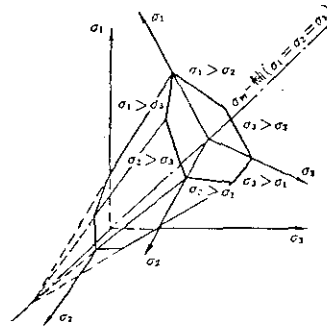


Fig.2-2 3次元 主應力 空間에 있어서 Mohr-Coulomb 規準

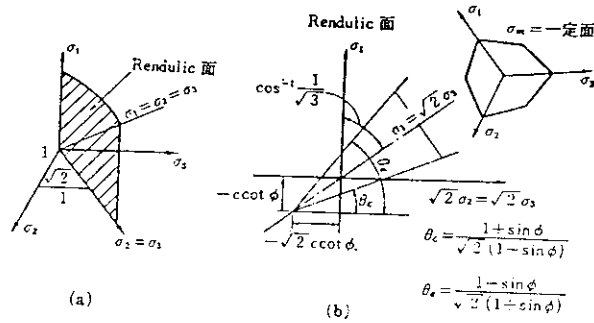


Fig. 2-3 (a) Rendulic 面,

(b) Mohr-Coulomb 規準의 Rendulic面 및 $\sigma_m = \text{一定面}$ 과의 交線

2) Tresca criterion

$$\sigma_1 - \sigma_3$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k$$

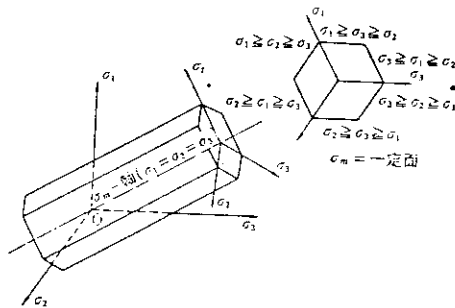


Fig. 2-4 Tresca 規準

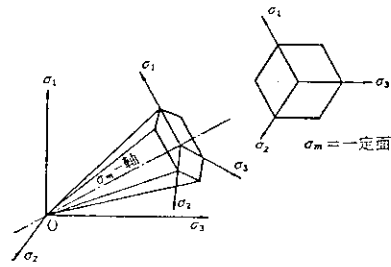


Fig. 2-5 擴張된 Tresca 規準

3) von Mises criterion

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 9\tau_{00t}^2$$

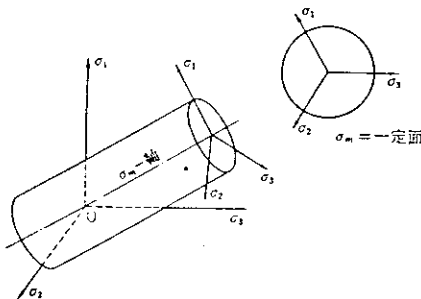


Fig. 2-6 von Mises 規準

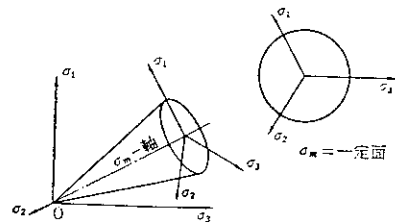


Fig. 2-7 擴張된 von Mises 規準

이상 이들 3가지 規準을 σ_m 축(靜水壓軸)에 직각인 平面(π 面과 平行)에서 동
일 조건으로 비교하면 다음 그림과 같다.

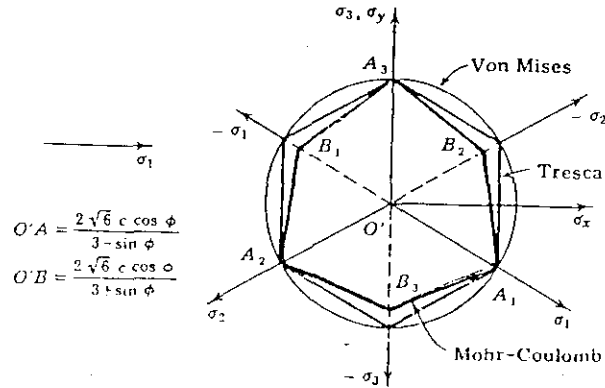


Fig.2-8 Mohr-coulomb 規準에 의한 파괴곡선 및
다른 規準에 의한 파괴곡선과의 비교

우리가 잘 이용하고 있는 Mohr-Coulomb 規準과 실제 實驗結果의 차이를 다음
그림에 나타낸다. 어느경우나 잘 일치하고 있다고 보기는 어렵다.

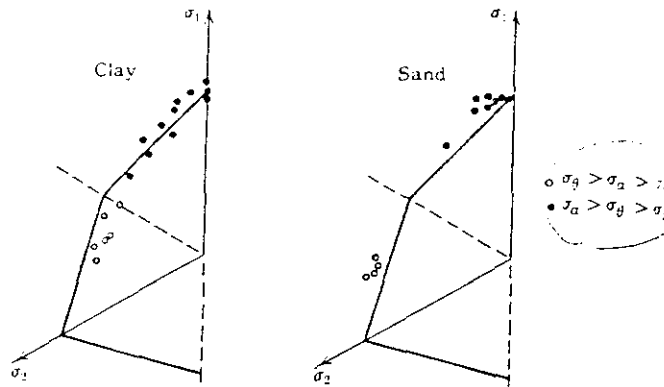


Fig.2-9 (After Wu, Loh, and Malvern)

그러나 Mohr-Coulomb 規準은 近似的 이지만 흙의 破壞를 잘 설명해주고 무엇보다도 간편하다는 점에 장점이 있어 널리 規準으로서 자리잡고 있지만 기본적으로 두 물체간의 摩擦현상에 대한 기본적인 實驗式이고 마찰면에 작용하는 垂直應力の 증가와 더불어 剪斷強度가 직선적으로 증대되어가며 이때 쓰이는 強度常數 C, ϕ

의 물리적 의미가 명확치 않다. 이와같은 문제점을 극복하기 위하여 많은 構成式이 제안되기에 이르렀으며 그 효시는 1957년 Drucker에 의하여 흠에 있어서 plastic strain의 増分形態를 normality rule(直交則)에 適用시킨 것으로부터 시작 된다. 그후에 이를 承繼하여 1960년대 Cambridge의 Roscoe등에 의해 限界狀態理論으로 발전하고 이것이 根幹이 되어 彈塑性 構成式의 발전이 이루어지게 된다.

다음 그림은 앞의 規準과 똑같은 主應力 空間에 있어서 Roscoe등의 限界狀態理論에 의한 항복규준을 보인 것이다. 앞서 3가지의 그림에서 그들 규준과 비교하여 두개의 降伏曲面을 가정하고 있으며 훨씬 복잡하게 이론이 전개된다.

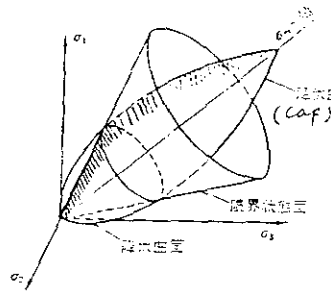


Fig.2-10 Roscoe등의 降伏曲面과 限界狀態面

降伏曲面은 σ_m 軸을 중심으로 원점 이외에서도 교차되고 이 곡면이 한계상태면과 교차되는 곡면을 Cap형 항복면이라 부른다.

3. 彈塑性 모델

현재까지 구성식의 主流는 彈塑性理論을 根本으로 하여 研究되고 있으며 더 나아가 여기에 creep 현상을 고려한 粘彈塑性(visco-elasto plastic model) 구성식도 제안되고 있다. 그러나 이도 또한 彈塑性理論으로부터 출발한 것이며 따라서 構成式理論의 기본은 彈塑性理論이라고 하여도 過言이 아니다. 그런데 彈塑性理論이라고 하는것이 彈性理論과 塑性異論을 複合시킨 應用理論이기 때문에 여기에는

어떤 명확한 이론 체계가 서 있는것이 아니고 연구자의 觀點에따라 여러가지 概念이나 假說이 이용되므로 그 이론의 전개가 매우 다양하다. 이것을 특히 토질역학에 이용할 경우는 이들 이론이 금속과 같은 均質材料에서 발전했던 내용과는 큰 차이가 있으며 더욱 복잡해진다. 본문에서는 이들의 基本理論을 略述하고 대표적인 彈塑性 構成式에 의한 降伏曲面을 소개한다.

3-1 基本假說

Fig 3-1은 彈塑性體의 stress-strain 관계와 이를 가정한 항복곡면과 대응시킨 것이다. 좌측 그림에서 초기 降伏應力 $\sigma_{ij}(a)$ 까지는 彈性舉動을 하지만 應力이 a 점을 지나면 소성변형이 일어나고 b 점에 이르면 塑性變形量 ϵ_{PIJ} 가 일어난다.

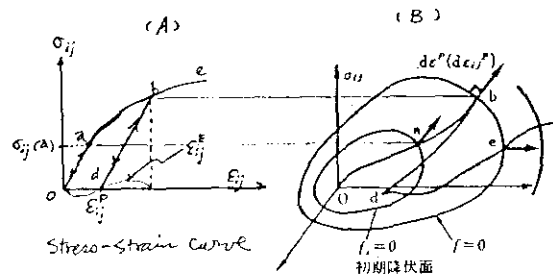


Fig.3-1 항복곡면과 strain hardening

이와같은 관계는 (B) 그림의 應力空間 내에서 응력의 크기에 의해 나타나는 항복곡면 a 에서는 완전한 탄성상태의 領域을 갖는 曲面이 되고 a 점에서 다시 응력이 가해지면 b 점까지 어떤 경로를 따라 降伏曲面이 커지는데 이때 塑性變形도 同伴된다. 이와같은 항복곡면은 (A) 그림의 현상을 數學的으로 표현하는 手段이 되는데 이 降伏曲面의 形態를 어떻게 정의 하느냐가 여러 學者간의 研究 대상이 된다. 그리고 그림에서 b 점에 이르기 까지의 全變形量 ϵ_{ij} 는 彈性變形量 ϵ^e_{ij} 와 塑性變形量 ϵ_{PIJ} 의 합으로 나타낸다. ϵ^e_{ij} 는 作用應力 σ_{ij} 에 의해 通常의 彈性法則에 의해 구할 수 있으므로 나머지 ϵ_{PIJ} 의 값을 결정하는 函數 關係를 誘導하는 것도 또한 연구의 대상이 된다. 이 두가지의 과제는 재료가 塑性變形을 일으키면서 降伏面이 增大되어 간다는 前提가 필요하다. 이를 strain hardening rule이라 하는데 이 세가지의 基本條件이 降伏曲面을 정의하는데 필요하며 따라서 항복함수 f는 다음과 같은 수식으로 표현한다.

$$f = f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, k) = 0 \text{ ----- (3-1)}$$

k는 hardening parameter이다. 이는 stress-strain 관계에서 硬化의 정도, 따라서 우측 그림에서 항복곡면이 擴張되어가는 크기를 나타내는 양으로써 통상 ϵ_{Pij} 의 함수로 가정한다. 가장중요한 것은 이와같은 항복함수를 가정하여 구성식을 유도하는 것인데 通常 彈塑性 構成式은 다음과같은 기본가정 아래 출발한다.

- ① 항복함수 $f = 0$ (閉曲面)의 존재를 가정
- ② strain hardening rule의 가정
- ③ plastic strain increment에 관한 가정
- ④ flow rule에 대한 가정

먼저 항복함수는 (3-1) 식에서 $f=0$ 이므로 應力空間 內에서 閉曲面 임을 의미하고 응력이 초기降伏曲面($f_i=0$) 상의 a에 이르면 처음으로 소성변형이 발생한다고 가정한다. 응력이 항복곡면의 외부로 커져가면 塑性變形이 증가되어 strain hardening이 일어나면서 다른 應力狀態點 b에 이른다. 이 과정에서 plastic strain의 증가에 따른 항복곡면 $f=0$ 도 擴大되고 따라서 점 b를 통하는 항복곡면이 된다. 한편 b 점에서 항복곡면 내부의 점 d로 除荷하고 다시 d에서 같은 降伏曲面上의 e점까지 再載荷 할때는 재료는 탄성거동만 한다고 가정한다. 즉 塑性變形은 응력상태가 항복곡면상에 있을때만 발생 한다고 본다. 소성변형량의 增加方向은 항복면이 곡면이고 외측으로 볼록(凸 convex)할 경우 이 곡면의 法線方向으로 증가되는데 이를 直交法則(normality rule)이라 하며 앞의 ④의 flow rule과 관련하여 항복함수의 특성을 규정한다. flow rule(流動則)이란 塑性變形率의 발생 방식이 현재의 응력 상태에 따라 지배되는 법칙을 말한다. 항복곡면이 이 직교성을 따른다면 다음과 같이 소성변형증분 vector $d\epsilon_{Pij}$ 는 정의된다.

$$d\epsilon_{Pij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \lambda > 0 \text{ ----- (3-2)}$$

λ 는 양의 parameter로서 응력과 plastic strain의 함수이다. 이식의 의미는 塑性變形率增分 벡터 $d\epsilon_{Pij}$ 가 항복함수 f 의 응력 σ_{ij} 에 대한 기울기(微分形)로서 결정된다는 것을 의미하며 $d\epsilon_{Pij}$ 와 같은 vector field 에서의 값이 f 와 같은 scalar 函數의 기울기로 표현 될때 그 scalar 함수를 potential 함수라하는데 이

경우는 降伏函數 f상에서 plastic strain이 발생하고 있으므로 함수 f는 동시에 potential 함수가 된다. 이와같이 항복함수가 직접 plastic strain을 규정하는 potential 함수의 역할을 겸할때 關聯流動則(associate flow-rule)을 적용하고 있다고 본다. 따라서 (3-2) 식에서 parameter Λ 는 塑性的 降伏過程에 있는 應力點이 언제나 항복곡면상에 존재한다는 適合條件(Prager의 적합조건)에 따라서 (3-1)식의 全微分形의 형태로서 다음과 같이 전개된다.

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon^{p}_{ij}} d\epsilon^{p}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0 \quad (3-3)$$

k 는 (3-1)에서 설명한 바와 같이 ϵ^{p}_{ij} 의 函數 爲로서 다음과 같이 표현된다.

$$dk = \sigma_{ij} d\epsilon^{p}_{ij} \quad (3-4)$$

(3-3), (3-4) 및 (3-2) 식에서 一連의 계산을 통해 Λ 는 다음과 같이 算出한다.

$$\Lambda = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\left\{ \begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial \epsilon^{p}_{ij}} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} & \frac{\partial f}{\partial k} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \end{array} \right\} \sigma_{kl}} \quad (3-5)$$

이상 塑性變形増分 $d\epsilon^{p}_{ij}$ 의 값은 (3-2) 및 (3-5) 식에 의해 결정되는데 문제는 항복함수 f 를 어떻게 설정 하느냐에 따라 (3-1)식이 구체적으로 결정되고 따라서 구성식이 정의된다.

그리고 (3-2)식 또한 塑性變形에 대한 구성식의 하나이다.(어떻게 항복함수가 결정되며 구성식이 정의되는 가는 다음장에서 Cam-clay model을 예로 설명한다.)

지금까지 彈塑性構成式의 가장 기본이되는 가정에 대해서 Drucker-Prager의 이론을 핵으로 설명하였는데 이 이론의 出發點은 降伏函數와 potential 함수가 같으므로 associate flow rule이 적용되며 따라서 가정한 항복면에서 塑性變形率増分 벡터는 항복면의 법선 방향으로 증대되어 간다는 이론이다. 이로부터 많은연구가 시작되어 초기에는 이 이론을 많이 답습하였으나 차차 후의 力學的 舉動은 반드시 이와같은 associate flow rule를 따르지 않는다는 것이 밝혀졌다. 즉 降伏曲面과 소성 potential면이 같지 않는 경우가 발견되고 또한 이론상의 矛盾도 발견되었다.

이후 크게 두갈래의 흐름(associate flow rule)과 (non-associate flow rule)으로 구성식의 연구가 진행되고 있다. 특히 사질토에 대해서 많은 論議가 되고 있는데 거의 후자를 따르고 있으며 이와같은 경우는 항복곡면에서 彈塑性限界를 정의하고 다음으로 별도의 塑性 potential면을 가정하여 塑性變形增分($d\epsilon_{Plj}$)의 방향을 설정한다. 따라서 2개의 閉曲面을 가정한다. 이와같은 경우를 non-associate flow rule(非關聯流動則)의 적용이라고 부르며 대표적인 예가 Cam-clay model은 associate flow rule을, Lade model은 non-associate flow rule을 적용하며, 구성식을 제안하고 있다.

4. 彈塑性 構成式의 降伏曲面

本文에서는 흙을 彈塑性體로 보고 구성식을 제안한 대표적인 예물들어 降伏曲面과 構成式을 제시한다. 다만 이 구성식의 始發이라고 할수 있는 Cam-clay model에 대해서는 이 모델의 이론이나 誘導方式이 다른 構成式의 기본적 思考가 되고 있으므로 그 유도과정을 간략하게 설명하고 나머지는 概要만 敘述하기로 한다.

4-1 Cam-clay model

이 구성식은 Cam-clay라는 이상적인 점성토를 가지고 限界狀態(殘留應力狀態 또는 摩擦流體狀態, 더이상 체적과 응력의 변화가 없는 상태)라는 개념에 消散에너지의 관계식을 도입하고 Drucker의 塑性增分理論에 의하여 제안된 식으로써 특히 critical state energy theory 라고도 부른다. 이 모델은 흙이 彈塑性 상태가 되는 조건을 e, p, q 공간에서 정의되는 降伏曲面(Roscoe면)으로 나타내고 이 곡면의 경계를 CSL 이라하며 이는 應力經路에 의존하지 않고 유일하게 결정된다. 또한 塑性變形率 增分 벡터는 이 항복곡면과 직교한다는 가정아래 유도된 것이다. 이 구성식은 그후 다시 수정하여 수정 Cam-clay 모델이 提案되었다. 보통 Drucker의 假說을 따라 탄소성체 이론을 적용할 때는 앞장에서 言及한 바와 같이 降伏函數 f 를 결정하는 방식을 통해 구성식이 확정되는데 그 과정을 다음에 설명한다.

前述한 바와 같이 탄소성 구성식의 기본 가정 ①②③④를 따라 식을 誘導하는데 먼저 正規壓密 粘土에 대해서 생각한다. 正規壓密 粘土를 압밀하여 어느 응력 상태에 있을 때 荷重을 除去하고 過壓密 상태로 든 후에 다시 하중을 작용시키면 점토의 탄성거동이 탁월한 영역의 응력 상태가 존재한다는 實驗的 사실을 이용하여 이와 같은 彈性應力 상태가 降伏曲面에 도달하면 소성변형을 시작하고 이때 발생하는 塑性變形率 增分に 의하여 항복면이 相似形으로 확대되어 간다고 본다.(Fig4-1) 이때 전체의 體積變形率 增分은 $d\varepsilon_v^e$, $d\varepsilon_v^p$ 의 합으로 나타내고 체적변형율의 일부는 회복이 가능하다.(탄성 체적변형율)

$$\text{즉, } d\varepsilon_v = d\varepsilon_v^e + d\varepsilon_v^p \quad \text{----- (4-1)}$$

한편 전단에 의한 剪斷變形率 增分 $d\varepsilon_s$ 은 회복이 불가능한 소성 변형이다.

$$d\varepsilon_s = d\varepsilon_s^p \quad \text{----- (4-2)}$$

그리고 전단 중에 소비되는 에너지는 限界狀態에서 全部 摩擦로 消費된다.

$$\text{즉, } p \cdot d\varepsilon_v^p + q d\varepsilon_s^p = M p d\varepsilon_s^p \quad \text{----- (4-3)}$$

한편 항복곡면은 소성 potential면과 일치하고 變形率增分은 降伏曲面에 직교한다고 생각한다. 따라서 (4-3) 식에서

$$\frac{d\varepsilon_s^p}{d\varepsilon_v^p} = -1 / \frac{dq}{dp} \quad \text{----- (4-4)}$$

$$\text{여기서, } p = 1/3(\sigma_1 + 2\sigma_3) = J_1/3, \quad q = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{3}J_2D$$

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_3, \quad d\varepsilon_s = 2/3(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3), \quad M = q/p$$

限界狀態에서는 더이상의 塑性體積 變形은 없으므로 $d\varepsilon_v^p = 0$, (4-4) 식에서

$dq/dp = 0$ 가되어 한계상태선(C.S.L)과 降伏曲面이 교차하는 곳에서는 接線의 경사가 0이 된다.(Fig 4-1 중 $d\varepsilon$ 의 접선의 경사)

(4-3)과 (4-4) 식에서 다음식을 얻는다.

$$\frac{dq}{dp} = - \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = - \left(M - \frac{q}{p} \right) \therefore \frac{dq}{dp} - \frac{q}{p} + M = 0 \quad \text{----- (4-5)}$$

(4-5)식을 積分하면 다음 降伏函數 f 가 구해진다.

$$f = p_0 \cdot \exp\left[\frac{q}{Mp} \right] \quad \text{----- (4-6)}$$

항복함수 f 가 구해졌으므로 塑性構成式은 (3-2)식과 (3-3), (3-5)식에 의해 parameter Λ 가 결정된다. 이때 (4-6)식 항복함수 f 는 (3-1)식의 Hardening parameter k 가 함수 f 와 더불어 硬化되는 것을 의미하고 滿足한다.

이들 계산 결과는 다음과 같은 꼴이 된다.

$$\lambda = \frac{C_c - C_s}{2.3(1+e_0)} \frac{dq + \left(M - \frac{q}{p}\right) dp}{f \left(M - \frac{q}{p}\right)}$$

따라서 塑性構成式 $d\epsilon_{Pij}$ ($= d\epsilon_{vP}$)는 다음과 같게 될 것이다.

$$d\epsilon_{vP} = \frac{(C_c - C_s)}{2.3M(1+e_0)} \left[\frac{dq}{M \cdot p - q} + \frac{dp}{p} \right] \left[\frac{S_{ij}}{q} + \frac{\left(M - \frac{q}{p}\right)}{3} \right] \quad (4-7)$$

여기에 彈性構成式 $d\epsilon_{v^0}$ ($= d\epsilon_{v^0}$)는 Hooke법칙에 의해 구할 수 있으며 이것을 剪斷彈性係數 G 를 이용하여 표현하면 通常 다음과 같은 꼴이 된다.

$$d\epsilon_{v^0} = \frac{C_s}{2.3(1+e_0)} \frac{dp}{p} + \frac{dS_{ij}}{2Gp} \quad (4-8)$$

(4-1)식에 의해 (4-7)식과 (4-8)식을 合成하면 점토를 彈性體로 가정한 original cam-clay의 구성식이 구해진다.

여기서 C_c : 正規壓密 曲線의 壓縮指數

C_s : 正規壓密에서의 膨潤指數

S_{ij} : 偏差應力 Tensor

이들 식에서 알수있는 바와 같이 이 모델은 初期 間隙比 e_0 , 壓縮指數 C_c , 膨潤指數 C_s , poisson 비 ν , CSL의 경사 M 등 5개의 상수를 알면 결정되고 이들은 통상의 壓密 - 膨脹試驗과 삼축시험 결과로부터 결정되며 正規壓密 粘土의 stress-strain 관계를 잘 표현해주는 구성식이다. 이 모델의 降伏曲面은 다음 Fig.4-1에서와 같다. 다만 Fig.4-1의 향복곡면은 수정 Cam-clay 모델의 降伏曲面(타원)인데 original Cam-clay는 降伏曲面이 보다 더 원에 가깝다.

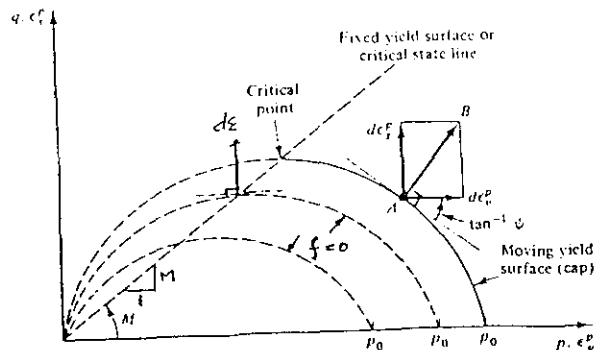


Fig.4-1 Yield locus in q-p space

이것을 다시 應力空間 座標에서 표현하면 Fig.4-2, 4-3과 같다. Fig.4-4는 이와같은 Cam-clay model에서 降伏面과 C.S.L의 관계를 개선한 Cap model의 降伏曲面을 나타낸 것이다. 항복곡면은 associate flow rule을 따라 확대되어 가지만 이 곡면의 포락선은 별도의 降伏函數 f_1 을 가정하여 初期에는 Drucker-line을 終局에서는 von-Mises의 限界에서 이르도록 되어 있다. 여기서 Drucker-Prager line은 C.S.L와 거의 같다.

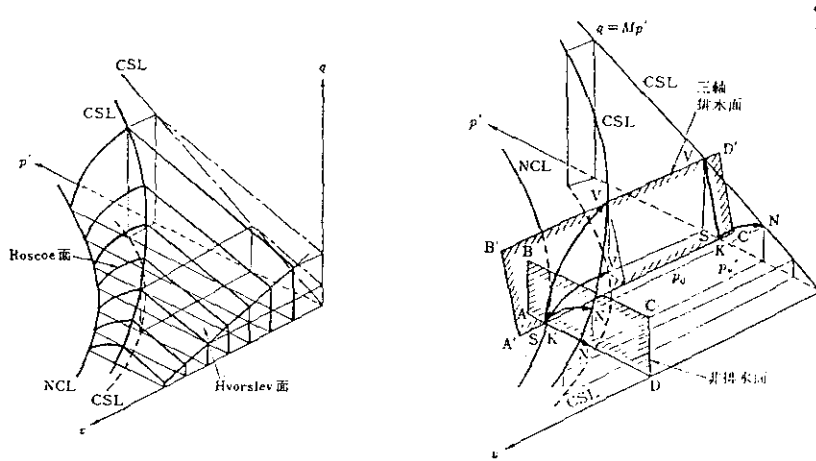


Fig.4-2 (p', q, v)공간에있어서 Hvorslev 면, Roscoe면 및 한계상태선

Fig.4-3 (p', q, v)공간에있어서 한계상태선(CSL)과 응력경로

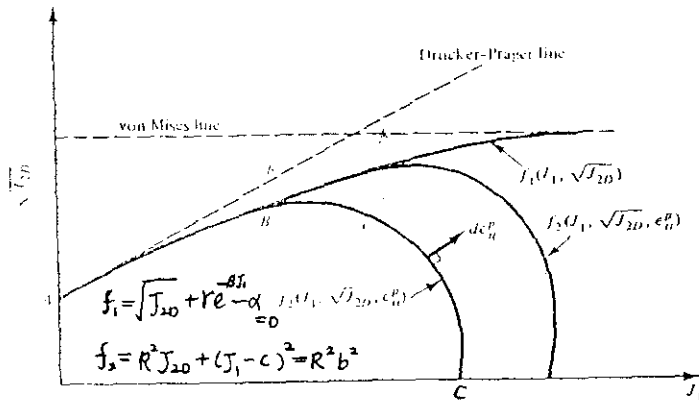


Fig.4-4 Cap model

이 Cap모델은 岩石이나 不飽和토, 衝擊을 받는 地盤등에 이용된다. Cap모델과 Cam-clay 모델의 차이점은 Cam-clay에서는 $M = q/p$ 의 기울기를 갖는 固定降伏面(CSL)과 移動降伏面 $f=0$ 로서 구성되어 있는데 비해 Fig.4-4에서 처럼 연속된 A B

C 면으로 항복면을 가정한 것이다. Fig.4-4의 좌표축은 應力不變量으로 표현했을 뿐 p-q 좌표와 의미는 같다. 높은 응력에서 von Misses의 이론을 따르는 것은 그 상태에서의 재료의 거동이 流體와 같다고 보기 때문이다.

4-2. Lade model

Cam-clay 모델은 CSL 이라고하는 원추형의 固定 降伏曲面에 Cap형의 또하나의 降伏曲面을 가정하고 있다. 이와 같은 가정은 흙의 特性도 포함 되지만 한편으로는 數學的 처리의 용이성과 간편성에 있다. 이후에 많은 연구가 계속되어 특히 Cap형의 降伏曲面(이를 體積 降伏曲面 이라함)과 potential 곡면이 서로 일치하지 않으며 또한 固定降伏面(이를 剪斷降伏曲面 이라함)도 변화되는 모델의 연구가 提案 되었다. 이들 두개의 항복곡면은 초기의 항복곡면 상태에서 또하나의 塑性變形 率을 誘發하는 potential 곡면이 가정되면서 相似形으로 확대되어 간다. 따라서 非關聯流動則이 적용된다. 이 가운데 대표적인 것으로서 Lade 모델이 있다.

이 모델은 Fig.4-5(b)에서 보인 바와 같이 3축면에서 剪斷降伏曲面이 단조로운 하중에 의해서도 소성변형이 고려되도록 하고 또 平均主應力에 의해서도 소성체적 변형이 고려될 수 있도록 球形의 體積降伏曲面을 合成한 것이다. 이때 剪斷降伏曲面에서는 非關聯流動則을 체적항복곡면에는 關聯流動則을 적용하고 있다. 이를 응력공간에 나타낸 것이 (a)이고 8面體應力面에서 나타낸 것이 (c)도 이다.

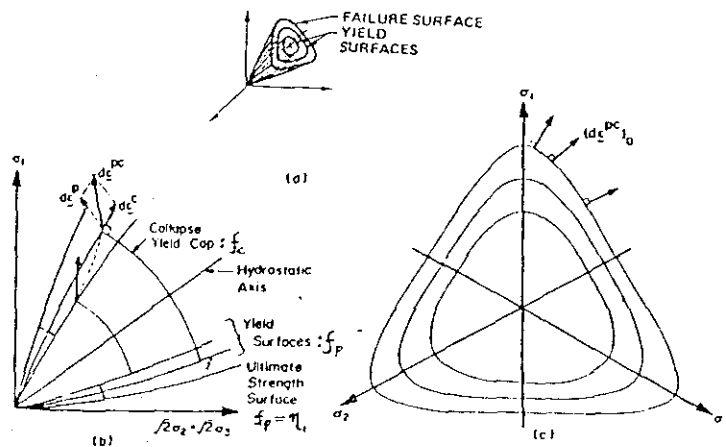


Fig.4-5 Ultimate strength and yield surfaces(Lade's model)

이 모델은 먼저 全變形率增分 $d\epsilon_{ij}$ 를 탄성성분 $d\epsilon^e_{ij}$ 와 塑性破砕成分 (plastic collapse strain) $d\epsilon^c_{ij}$, 그리고 塑性膨脹成分(plastic expansive strain) $d\epsilon^p_{ij}$ 의 합으로 나타내고 이 성분중 $d\epsilon^e_{ij}$ 는 Hook 法則에 의해 계산하고 $d\epsilon^c_{ij}$ 와 $d\epsilon^p_{ij}$ 는 塑性理論을 적용하여 계산한다.

Fig.4-6은 拘束壓이 일정한 3축 D-test에 의한 이들의 관계를 나타내고 있다.

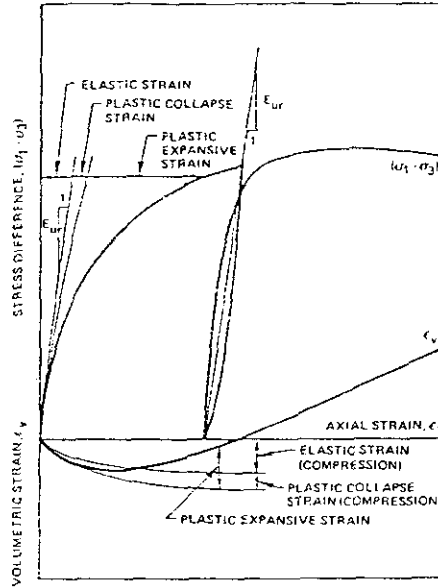


Fig.4-6 Elastic , Plastic collapse, and Plastic expansive strain components in drained triaxial compression test

지금 Fig.4-5에서 剪斷 降伏曲面을 생각해 본다. 이 곡면의 塑性膨脹 降伏面의 방정식은 다음과 같다.

$$f_p = (J_1^3 / J_1 - 27) (J_1 / p_a)^m \text{ ----- (4-9)}$$

$$f_p = \eta_1 \text{ (at failure) ----- (4-10)}$$

η_1 과 m 는 요구되는 密度에 따라 결정되는 土質常數이고 p_a 는 大氣壓으로써 무차원화 하기 위한 상수이다. 이 항복곡면 즉 塑性膨脹 降伏曲面에는 非關聯流動則을 적용하고 있으므로 별도의 potential 함수 g_p 를 가정한다.(Fig.4-7 (a))

$$g_p = J_1^3 - [27 + \eta_2(p_a / J_1)^m] \cdot J_3 \text{ ----- (4-11)}$$

η_2 는 구속압 σ_c 와 f_p 의 주어진 값에 의해 정해지는 土質常數이다. 이 함수 g_p 곡면상에 법선방향으로 塑性變形率 增分이 發生하며 이 增分 $d\epsilon^p_{ij}$ 와 g_p 함수 간에는 언급한 바와 같이 (3-2)식과 같은 소성증분의 構成式이 성립된다.

$$d\epsilon_{Pij} = \lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4-12)$$

한편 體積變形率 曲面인 collapse strain 降伏曲面은 다음과 같이 표현된다.

$$f_c = J_1^2 + 2J_2 \quad (4-13)$$

이 곡면에는 關聯流動則이 適用되므로 potential 함수와 (4-12)식은 일치한다. 따라서 이때의 塑性增分 構成式은 다음과 같다.

$$d\epsilon_{c_{ij}} = \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4-14)$$

여기서 λ_p 와 λ_c 를 구하는 과정은 Cam-clay 모델에서와 마찬가지로 g_p , f_c 의 全微分을 취하고 이들을 각각의 塑性增分 구성식에 대입하여 일련의 계산을 한 뒤 두식을 연립해서 푸는 과정을 밟는다. 이 모델에 포함하고 있는 여러 土質常數들은 等方壓縮 상태에서 출발하는 통상의 三軸試驗을 통해서 얻는다. 원래는 直方體의 三軸壓縮試驗(True triaxial test)에서 유도된 것이다.

Fig.4-7(a)에 塑性膨脹降伏面(yield surface)상의 어느 위치에서 塑性膨脹變形率 증분 $d\epsilon_{Pij}$ 의 방향을 정하기 위해서는 이 항복면이 非關聯流動則이 적용되므로 plastic potential 곡면 g_p 를 가정하여 이 항복면에서 90° 外向으로 $d\epsilon_{Pij}$ 가 발생하는 과정을 보이고 있다.

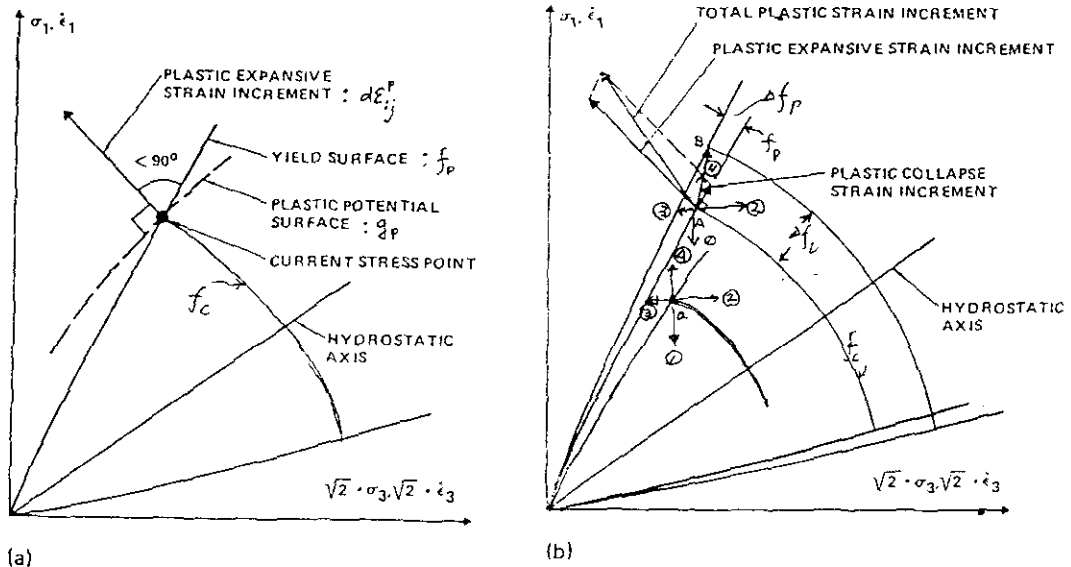


Fig.4-7 Schematic diagrams of: (a) yield and plastic potential surfaces for plastic expansive strains, and (b) yielding process with both yield surfaces activated and combination of plastic strain increments

그림 (b)는 (a)의 경우에다 plastic potential 曲面이 硬化되어 확대되는 과정을 合成하는 것이다. A 점에서 B 점으로의 應力變化는 두개의 항복면의 膨脹을 가져오므로 塑性파쇄 變形率 증분 벡터와 소성팽창 변형률 증분 벡터가 발생된다. 이때 全塑性變形率增分 벡터(total plastic strain increment vector)의 크기는 벡터의 合成에 의한 길이에 의해 나타난다.

A에서 B로의 曲面擴張의 判定을 그림(b)의 a점(두 曲面의 接合點)에서 생각해 본다. 지금 어느 三軸壓縮 상태의 應력수준이 a점이라 할때 다음에 가해지는 應력 변화에 따라 應력증분벡터가 그림에서 처럼 a → ①, ②, ③, ④의 네가지 방향을 생각할 수 있다. 먼저 全變形率 增分 $d\epsilon_{ij}$ 는 설명한 바와 같이 다음과 같다.

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon^e_{ij} + d\epsilon^c_{ij} + d\epsilon^p_{ij} \text{-----} (4-15)$$

여기서 $d\epsilon^e_{ij}$ 값은 Hooke

의 법칙을 이용하여 통상 다음과 같다.

$$\Delta \epsilon_x^e = 1/Eur [\Delta \sigma_x - \nu(\Delta \sigma_y + \Delta \sigma_z)]$$

$$\Delta \epsilon_y^e = 1/Eur [\Delta \sigma_y - \nu(\Delta \sigma_z + \Delta \sigma_x)]$$

$$\Delta \epsilon_z^e = 1/Eur [\Delta \sigma_z - \nu(\Delta \sigma_x + \Delta \sigma_y)]$$

$$\Delta \gamma_{xy}^e = \frac{2(1+\nu)}{Eur} \Delta \tau_{xy}$$

$$\Delta \gamma_{yz}^e = \frac{2(1+\nu)}{Eur} \Delta \tau_{yz}$$

$$\Delta \gamma_{zx}^e = \frac{2(1+\nu)}{Eur} \Delta \tau_{zx}$$

여기서 Eur은 Fig.4-6에서 처럼 실험적으로 구한다. 나머지 $d\epsilon^c_{ij}$ 와 $d\epsilon^p_{ij}$ 는 식(4-12) 및 (4-14) 식에서 구하는데 이들이 塑性硬化 상태일때 前述한 바와 같이 4방향의 應력상태를 고려하여 그림(b)에서 처럼 A점에서 B점으로 확장된다. 즉

○ 應力增分벡터가 a → ①를 향할때

이때는 Δf_c 나 Δf_p 값이 없다. 즉 소성파쇄 항복면이나 塑性膨脹 항복면의 증분이 없으므로 $\Delta \epsilon^c_{ij} = 0$, $\Delta \epsilon^p_{ij} = 0$, 따라서 $d\epsilon_{ij} = d\epsilon^e_{ij}$

○ a → ②를 향할때

$$\Delta f_c \text{만 있으므로 } d\epsilon_{ij} = d\epsilon^e_{ij} + d\epsilon^c_{ij}$$

o a --> ③의 경우

Δf_p 는 있으나 Δf_c 는 없으므로 $d\epsilon^o_{ij} = 0$ 이 때 $d\epsilon^p_{ij}$ 는 (4-12)식 으로 계산되고 塑性膨脹 Potential면 g_p 에 직교한다.

$$\therefore d\epsilon_{ij} = d\epsilon^o_{ij} + d\epsilon^p_{ij}$$

o a --> ④의 경우

이때는 Δf_p 의 증가가 있으므로 Δg_p 의 증가가 있고 따라서 (4-12), (4-14)식이 성립되고 (4-15)식이 구해진다.

이와같은 과정을 數值計算을 통해서 判定하며 Fig.4-7(b)에서 처럼 A 점에서 B점으로 2개의 降伏曲面이 擴大되어 간다.

4 - 3 Desai Model

이 모델은 앞서 논의 된 것처럼 두개의 항복곡면이 서로 交叉되는 점에서는 特異點이 발생하여 塑性 増分벡터의 직교성이 성립되지 않는다. 따라서 이 두개의 특성을 포함하는 單一 降伏面을 가정한 것이다. 이 점은 초기의 Cap 모델과 매우 유사한 발상으로 시작되고 있으나 Desai는 降伏函數를 다음과 같은 응력불변방의 다항식으로 표현하여 이 多項式에서 적절하게 項目을 선택하므로써 어떠한 재료에 대해서도 적용이 가능하며 Tresca, Mises, Mohr-coulomb은 물론이고 Drucker-prager, Critical state theory, Cap 모델, Lade 모델등도 이 다항식의 특별한 경우로 설명할 수 있다고 提案하는 Hierarchical single surface(HISS) model을 발표하였다.

$$\begin{aligned} F(J_1, J_2^{1/2}, J_3^{1/3}) = & \alpha_0 + \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2^{1/2} + \alpha_3 J_3^{1/3} + \alpha_4 J_1^2 \\ & + \alpha_5 J_1 J_2^{1/2} + \alpha_6 (J_2^{1/2})^2 + \alpha_7 J_1^{1/2} J_3^{1/3} + \alpha_8 (J_3^{1/3})^2 \\ & + \alpha_9 J_2^{1/3} J_1 + \alpha_{10} J_1^3 + \alpha_{11} J_1^2 J_2^{1/2} + \alpha_{12} J_1 (J_2^{1/2})^2 \\ & + \alpha_{13} (J_2^{1/2})^3 + \alpha_{14} (J_1^{1/2})^2 J_3^{1/3} + \alpha_{15} J_2^{1/2} (J_3^{1/3})^2 \\ & + \alpha_{16} (J_3^{1/3})^3 + \alpha_{17} J_1 (J_3^{1/3})^2 + \alpha_{18} J_1^2 J_3^{1/3} \\ & + \alpha_{19} J_1 J_2^{1/2} J_3^{1/3} \end{aligned} \quad (4-16)$$

윗식은 다시 다음과 같이 간편하게 표현한다.

$$F = J_{2D} - (-\alpha J_1^n + r J_1^2) (1 - \beta s_r)^m = J_{2D} - F_b F_s = 0 \quad (4-17)$$

J_{2D} 는 軸差應力 Tensor의 2次不變量이고 $\alpha, \beta, \gamma, n, m$ 는 舉動函數(response

function)이고 S_r 은 응력비로서 $J_{3D}^{1/3}/J_{2D}^{1/2}$, J_{3D} 는 Tensor S_{ij} 의 3차 應力不變量이다. 이 가운데 γ , β , m 는 地盤材料에 대한 常數 값이다. α 는 硬化函數로서 소성 변형율의 궤적에 의해 정해진다. 다음 fig.4-9는 모래에 대한 대표적인 항복함수 $F=0$ 의 곡면을 여러가지 座標계에 나타낸 것이다.

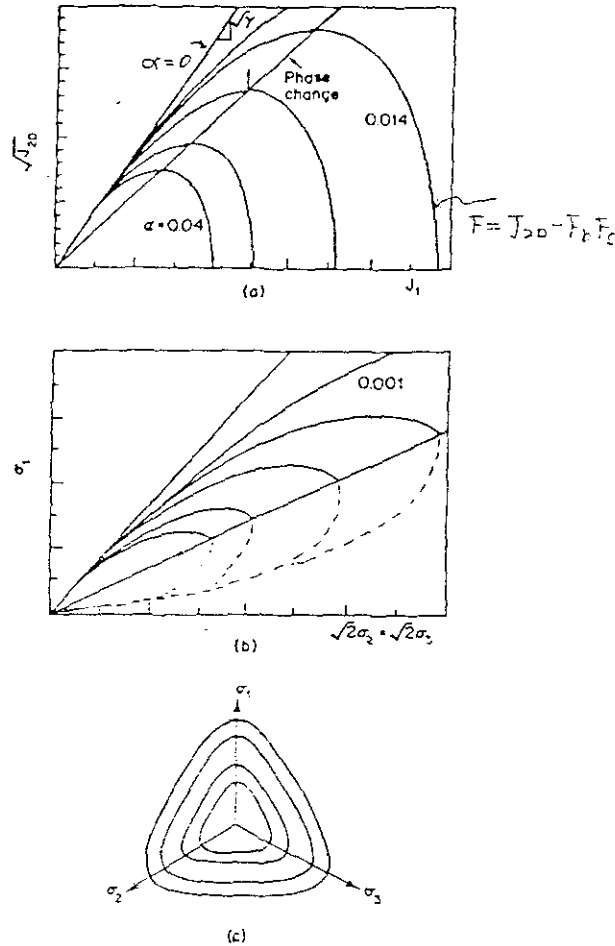


Fig.4-9 Plot of yield function in various stress spaces:

(a) In $J_1 - \sqrt{J_{2D}}$ space; (b) in triaxial space; (c) in deviatoric space

식 (4-14)에서 F_b 는 $J_1 - \sqrt{J_{2D}}$ 좌표에서 곡면의 連續性을 나타내고 있으며 n 값은 곡면의 변환을 정하는 phase change의 값으로 이점에서 $d\epsilon_v \neq 0$ 이다. (그림 a) 또한 F_c 는 形狀函數로서 그림 (c)에서와 같은 모양을 나타내며 β 와 m 값이 그 모양을 정의한다. 이들은 모두 실험에 의해서 결정된다. Desai는 위 항복곡면 F 에 關聯流動則이 적용되는 경우를 δ_0 (Basic 모델, 等方硬化), 比關聯流動則이 적용되는 경우를 δ_1 (non-associative 모델, 等方硬化), 기타 δ_2, δ_{0+r} , (비등방을 고

려한것등)의 4개의 모델로 구분하여 構成式을 제안하고 있다. Fig.4-10(a)는 δ_0 모델인데 이 경우는 관련 流動則이 적용되기 때문에 항복함수는 Potential 함수와 같다. 따라서 前章에서와 마찬가지로 구성식이 정의된다. ($F=Q$). δ_1 모델은 별도의 potential 함수 Q 를 가정, 이 곡면에서의 關聯流動則이 적용되어 (b)그림에서 처럼 그 곡면에서의 塑性變形的 増分 vector를 가정하게 된다.

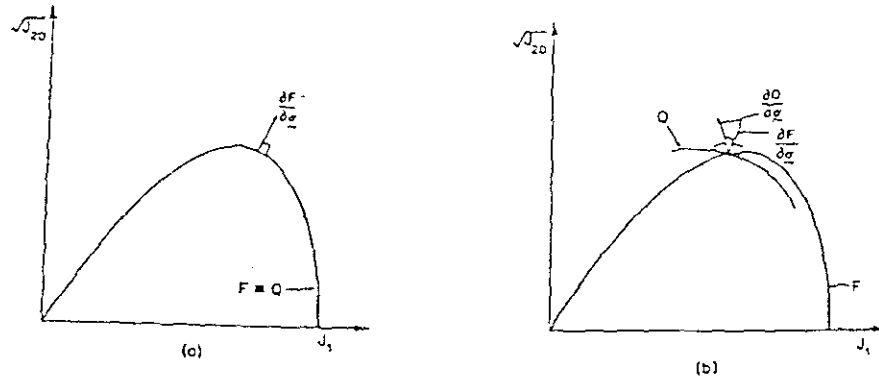


Fig.4-10 Basic δ_0 and non-associative models δ_1 :

(a) model δ_0 ; (b) model δ_1

potential 함수 Q 는 다음과 같다.

$$Q = F + h(J_1, \zeta, \zeta_v), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4-18)$$

$$h = \alpha_0 J_1^n (1 - \beta s_r)^m \quad (\text{correction function})$$

$\zeta = f (d\epsilon_{Pij} d\epsilon_{Pij})^{1/2}$ 로서 塑性變形率이고 이는 다시 volumetric and Deviatoric parts로 나누어 ζ_v, ζ_D 로 표현한다. 따라서 $Q=0$ 곡면에서 적교칙이 성립되고 앞절에서 言及한 바와 같이 全塑性變形率 증분의 구성식은 다음과 같다.

$$d\epsilon_{Pij} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4-19)$$

앞에 나온 硬化函數 α 는 ζ 의 함수로써 가장 간단한 풀은 $\alpha = a_1 / \zeta^{n_1}$ 이다. a_1, n_1 은 塑性硬化에 대한 材料常數로서 응력경로시험으로부터 결정한다. 모래에 대한 potential함수의 한 예를 보이면 다음과 같다.

$$Q = J_{2D} - [\alpha_0 J_1^n + r(J_1)^2] F_s \quad (4-20)$$

$$\alpha_0 = \alpha + K (\alpha_0 - K) (1 - r_v), \quad r_v = \zeta_v / \zeta$$

K : non-associate parameter $\epsilon_1 - \epsilon_v$ plot의 傾斜로부터 구한다.

다음포는 Hierarchical model의 개요를 소개한 것이다.

Table 1. Hierarchical Models for Soils, Rocks, Concrete and Joints/Interfaces

Model	Hardening	Flow Rule	Special Forms	Constants (in addition to 2 elastic constants)	References
δ_0	Iso	A	Straight ultimate envelope	ultimate phase change hardening m, γ, β n a_1, η_1	Desai (1980) Baker and Desai (1982) Desai and Faruque (1984) Scheele, Desai and Muqtadir (1986)
			Curved ultimate envelope ($f(J_1)$)	ultimate phase change hardening $m, \gamma, \beta, \beta_1$ n a_1, η_1	Salam (1985) Desai and Varadarajan (1986)
δ_1	Iso	NA	Straight ultimate envelope and constant κ	ultimate phase change hardening nonassociative m, γ, β n a_1, η_1 κ	Desai and Siriwardane (1980) Frantziskonis, Desai and Somasundaram (1986)
			Straight ultimate envelope, constant κ and split hardening (i.e., $\alpha = f(\xi, \xi_1)$)	ultimate phase change hardening nonassociative m, γ, β n b_1, b_2, b_3, b_4 κ	Hashai (1986)
			Curved ultimate envelope, variable κ	ultimate phase change hardening nonassociative $m, \gamma, \beta, \beta_1$ n a_1, η_1 κ_1, κ_2	Varadarajan and Desai (1986)
δ_2	Aniso	NA	Straight ultimate envelope Plastic unloading and reloading	ultimate phase change hardening (virgin) interpolation translation m, γ, β n a_1, η_1 h_1, h_2 and h_3 h_4	Desai, Somasundaram and Frantziskonis (1986) Somasundaram and Desai (1986) Somasundaram (1986)
δ_{2+p}	Aniso	NA	Same as δ_2 above with modified stress for pore pressure	constants for δ_2 + porosity \bar{n} bulk modulus of water, K_f	Galagoda (1986) Desai, Galagoda and Wathugala (1987)
δ_{1+r}	Same as δ_1	Same as δ_1	$\delta_0 + r$	constants for $\delta_0 +$ damage \bar{Y}_U, R, κ	Frantziskonis and Desai (1986) Frantziskonis (1986)
δ_{1+v}	Same as δ_1	Same as δ_1	$\delta_0 + v$ viscoplastic	constants for $\delta_1 +$ visco \bar{Y}, N	Desai and Zhang (1986)
δ_{1+r}^*	Same as δ_1	Same as δ_1	δ_{1+r}^* for Discontinuities: Joints and Interfaces	ultimate phase change hardening nonassociative γ n a_1, η_1 κ	Fishman and Desai (1987) Fishman (1987)

Note: A = Associative, NA = Nonassociative, Iso = Isotropic hardening, Aniso = Anisotropic Hardening

Basic Models

- δ_0 = isotropic hardening, associative
- δ_1 = isotropic hardening, nonassociative
- δ_2 = anisotropic hardening, nonassociative
- δ_{1+r} = δ_1 model with damage (r) (strain-softening)
- δ_{1+v} = δ_1 model with viscoplastic modifications
- δ_{1+r}^* = models for discontinuities (joints/interfaces)

5. 構成式의 分類 및 대표적 構成式의 要約

지금까지 제안된 構成式의 제안자를 다음 표-2에 나타낸다. 이들은 모두 반복하중이 아닌 단조롭게 增加 또는 減少되는 하중에 適用되는 모델 들이다. 표-3은 대표적 모델의 개요를 요약한 것을 轉載한것이고 다음 Appendix 1은 Desai가 주요한 모델에 대해 요약한 것이다. 특히 8의 Lade and Kim 그리고 참고문헌 9,10,11의 M.K.Kim은 연세대학교 김문겸 교수의 연구를 가르킨다.

표 - 2

형 태	제 안 자
단 일 항 복 면 모 델	Roscoe·Schofield·Thurairajah(1963) Burand 1965, 1968 Christian 1966 Palmer 1967 Schofield·Worth 1968 Hata·Ohta·Yoshitani 1969, 1971 Dimagio·Snadler 1971 Hashiguchi 1972 Khosla·Wu 1976 Sekiguchi·Ohata 1977 Wile 1977 Mitachi·kitago 1979 Matsui·Abe 1981
비 단 일 항 복 면 모 델	Poorooshasb·Holber 1966,1967 Poorooshasb 1971 Pender 1973,1978 Lade·Duncan 1975 Wong·Mitchell 1975 Eekeler·Potis 1978 Nova·Wood 1979 Desai 1979 Lade and Kim 1988
복 수 항 복 면 모 델	Roseoe·Burland 1968 Prevost·Hoeg 1975 Lade 1977 Pender 1977 Nishi·Ezashi 1978 Vermeer 1978 Ohmaki 1979

Table 3 Summary of constitutive models and their capabilities.

Model	Type	No. of Constants	Minimum Number of Tests Needed for Model Constant Description	Are the Constants Easy to Measure?	Do the Constants Have Physical Significance?	Has the Model Been Implemented or Used in Numerical Analysis Schemes?	Does the Model Account for the Variation of the Intermediate Principal Stress?	Does the Model Include Features Related to Strain-Softening Behavior?	What Type of Flow Rule is Used?	Is Pore-Water Pressure an Inherent Component in the Model?	Are "History" Effects Included?
Hyperbolic (Duncan-Chang)	deformation theory	3	3 conventional triaxial compression tests at different σ_1	in general, yes, curve fitting procedures well defined	yes	yes, often quoted in literature	no	no	N.A.*	no	no
Drucker-Prager	plastic-perfectly plastic (isotropic)	4	2 conventional triaxial compression tests at different σ_1	yes	yes	yes	no	no	associated	no	no
Cam-Clay	elastic-hardening plastic (isotropic)	6	1 isotropic consolidation and swelling test, 3 conventional triaxial compression tests	yes, location of CSL is involved	yes	yes	no	yes	associated	no	in general, no
Cap (Weidinger)	elastic-hardening plastic (isotropic)	8	1 isotropic compression test with at least 1 unloading-reloading cycle, 3 conventional triaxial compression tests at different σ_3	in general, no	in general, yes	yes, dynamic shock wave propagation	in general, no	in general, no	associated	no	in general, no
Lade	elastic-hardening plastic (isotropic)	14	3 conventional triaxial compression tests at different σ_1	in general, no, although procedures well defined	yes	yes	yes	yes	associated	no	in general, no, no anisotropic hardening included
Prevoist	elastic-hardening plastic (isotropic)	more than 4	1 triaxial compression and 1 triaxial extension test	yes, hardening function difficult to evaluate	in general, yes	yes	no	yes	nonassociated	no	yes
Endochronic	incremental plasticity without a yield surface	18	requirements go up according to desired accuracy	no	in general, no	in general, yes	in general, no	yes	N.A.	no	yes, anisotropic hardening features partially included

*N.A. = not applicable.

APPENDIX I - REVIEW OF VARIOUS MODELS

Model	Yield Function, F	Potential Function, Q	Number of Constants and Comments
1. Classical Plasticity	$F = F(J_1, J_2, c, \phi)^*$	$Q \equiv F$	Constants: 3 or 4 One failure surface defines plastic behavior.
2. Critical State	$F = F(J_1 \text{ (or } p), J_2 \text{ (or } q), \lambda, k, M, e_0)$	$F_c = F_c(J_1 \text{ (or } p), J_2 \text{ (or } q), M)$ $Q \equiv F$	Constants: 6 F_y (below F_c) defines continuous yielding and F_c defines critical state. Later modifications consider nonassociative behavior.
3. Cap Models	$F_y = F_y(J_1, J_2, H, D, W, Z)$	$F = F(J_1, J_2, \alpha, \beta)$ $Q \equiv F$	Constants: 9 F_y (below F_c) defines continuous yielding and F_c defines failure surface.
4. Hatsuoka and Nakai	$F = \frac{J_1 J_2}{J_3} - \text{constant}$	F is open failure surface.	Constants: 1 F is open (failure) surface.
5. Lade	$F = \frac{J_1 J_2}{J_3} - \text{constant} = 0$ $F_c = \text{spherical cap}$ $Q = J_1^3 - k J_2 J_3$		Constants: 13 F is open (failure) surface.
6. Desai (HSS)	$F = \left(\frac{J_2}{p}\right)^2 - F_b F_s = 0$		Constants: 7 for $\hat{\alpha}$ 8 for $\hat{\alpha}_0$ Single surface F for continuous yielding and ultimate, including failure, peak and critical state.
7. Schreyer	$F = \gamma \frac{J_1}{J_2} - L - c_s = 0$		Constants: 10 Single surface F defines continuous yielding approaching the failure or stationary state.
R. Lade and Kim	$F = f_1 \cdot f_2 = 0$ $f_1 = \left(\psi_1 \frac{J_1}{J_3} - \frac{J_1}{J_2}\right)$ $f_2 = \left(\frac{J_1}{p}\right)^{1/n} - c_q$ $Q = q_1 \cdot q_2$ $q_1 = \left(\psi_1 \frac{J_1}{J_3} - \frac{J_1}{J_2} + c_2\right)$ $q_2 = \left(\frac{J_1}{p}\right)^{1/n}$		Constants: 11 Single surface F defines continuous yielding. Failure is defined by a separate function.

* Definition of symbols not defined in text:

- λ, k = slopes of consolidation and swelling curves
- H = slope of critical state line in the p - q space
- p = mean pressure
- q = shear stress
- R, D, W, Z = parameters associated with F and hardening
- α, γ, β = parameters associated with F
- k = parameter in potential function
- γ = material parameter
- L = $\{(\sigma_1 - \sigma_3) (\sigma_2 - \sigma_3) + \sigma_3^2\}^{1/3}$
- c_s = shift stress

参 考 文 献

Cam-clay model

1. Roscoe, K.H., Schofield, A.N. and Thurairajah, A. : Yielding of clays in states watter than critical, Geotechnique, 13, pp.211-240. 1963.
2. Schofield, A.N.and Wroth, C.P. : Critical state soil mechanics, McGraw-Hill, 1968.
3. Atkinson, J.H.and Bransby, P.L : The mechanics of soils(An introduction to critical state soil mechanics, McGraw-Hill, 1978.
4. Britto, A.M. and Gunn, M.J. : Critical state soil mechanics via finite element, Wiley-Interscience, 1987.

Lade Model

5. Lade, P.V. : Three-Dimensional behavior and prameter evaluation of an elastoplastic soil model. Geomechanical modeling in engineering practice.
pp.297-311.
6. Lade, P.v. and Duncan, J.M. : Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil. J. Geotech. Eng.Div.(ASCE) 101 (GT 10) : 1037-1053. 1975.
7. Lade, P.V. : Stress-strain theory for normally consolidated clay. Proc.of 3rd Int. conference on Numerical method in Geomechanics. 4 : 1325-1337. 1979.
8. Lade, P.V. : Model and parameters for the elastic behavior of soils. Numerical method in Geomechanics. 1988 Balkema, Rotterdam.
9. Kim, M.K.and Lade, P.V. : Single hardening constitutive model for frictional materials. (I. plastic potential function)
Computers and Geotechnics 5 (1988) pp.307-324.

10. Kim, M.K. and Lade, P.V. : Single hardening constitutive model for frictional materials. (II. Yield criterion and plastic work contours) Computers and Geotechnics 6 (1988) pp 13-29.
11. Kim, M.K. and Lade, P.V. : Single hardening constitutive model for frictional materials (III. Comparison with experimental data). Computers and Geotechnics 6 (1988) pp 31-47.

Desai Model

12. Desai, C.S. and Somasundaram, S. and Frantziskonis, G. : A hierarchical approach for constitutive modeling of geologic materials. Int. Jour. for numerical and analytical method in geomchanics, Vol.10 pp 225-257. 1986.
13. Desai, C.S. : A general basic for yield, failure and potential function in plasticity. Int. Jour. for numerical and analytical method in geomechanis. Vol.4. pp 361-375. 1980.
14. Desai, C.S. et al. : Procedure, Selection and application of plasticity models for a soil. Int. Jour. for numerical and analytical method in geomechanics. Vol.5. pp 295-311. 1981.
15. Farugue, M.O. and Desai, C.S. : Implementation of a general constitutive model for geological materials. Int. Jour. for numreical and analytical method in geomechanics. Vol. 9. pp 415-436. 1985.
16. Desai, C.S. et al. : Constitutive modeling for geological materials. 5th Int. conference on numerical method in geomechanics, Nagoya, pp.19-34. 1985.
17. Desai, C.S. : Discussion; Single surface yield and potential function plasticity models (to Lade). Computers and Geotechnics 7 (1989) pp. 319-335.
18. Desai, C.S. and Siriwardane, H.J. : Constitutive laws for engineering materials. prentice-Hall, 1984.

기타

19. 정진섭 : 포화점토의 응력-변형률에 관한 연구. 공학박사 학위논문. 전남대.
1983.
20. 정진섭 : 다차원 압밀 해석을 위한 한계상태 이론의 적용. 대한토질 공학
회지. 3권 4호, pp. 7-20. 1987.
21. Ko, H.Y.and Sture, S.: State of the art : Data reduction and application
for analytical modeling. laboratory shear strength of soil. ASTM. pp.
329-386. 1981.