

철근 콘크리트 보의 비선형 유한요소 해석

Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams

오 병환*, 이 성토**, 이 형준**, 신 호상**
Oh B.H., Lee S.L., Lee H.J., Shin H.S.

ABSTRACT

The finite element method is applied to analyze the complicated behavior of reinforced concrete beams. The nonlinearity in concrete and reinforcement steel has been considered. The effects of bond-slip and aggregate interlock have been also taken into account. It is found that realistic analysis requires those major nonlinearities to be included in the analysis.

1. 서론

철근 콘크리트 구조물을 해석하는데 있어서 기존의 방법들은 균열 발생이후 철근과 콘크리트사이의 완전 부착을 가정하고, 골재 맞물림 작용에 대한 고려를 하지않고 있다. 그러나 철근콘크리트 구조물이 힘과 전단을 동시에 받을 때에는 이들 두 현상에 대한 구조물의 거동을 고려하여야 정확한 해석이 가능하다. 최근 들어서 국내에서도 철근 콘크리트의 유한요소 해석시에 콘크리트와 철근사이의 부착거동을 고려한 연구가 진행되고 있다.

힘에 대한 거동시 철근 콘크리트의 힘 저항 능력은 콘크리트의 비균열 단면의 압축응력, 철근의 인장응력에 의해 발휘된다. 전단 거동시 철근 콘크리트의 전단 저항능력은 주로 콘크리트의 비균열 단면의 전단 저항 능력, 균열 발생이후의 골재 맞물림 작용, 철근과 콘크리트의 부착에 의한 부착저항 등에 의해 발휘된다고 알려져 있다.

본 논문은 이들 두 가지의 작용에 대한 적절한 모델링을 통하여 보다 합리적인 철근 콘크리트 구조물의 해석을 수행하고자 한다. 골재 맞물림 작용과 부착거동을 동시에 고려한 철근 콘크리트의 거동을 비선형 유한요소 해석법을 이용하여 예측하고 이를 실험결과와 비교하고자 한다.

2. 철근 콘크리트의 비선형거동에 대한 모델

2.1 개요

콘크리트는 최대압축응력의 대략 40%정도 이후부터는 비선형 거동을 보이며, 압축강도에 비해 콘크리트의 인장강도는 현저히 작다. 또한 콘크리트는 낮은 인장강도로 인하여 균열이 발생하게 되는데 이 균열의 발생이 비선형거동에 직접적인 요인이 된다.

* 정회원 서울 대학교 토목공학과 부교수

** 정회원 서울 대학교 대학원 박사과정

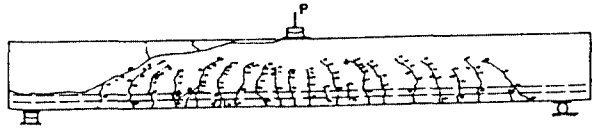


그림 1. 철근 콘크리트 보

이에 반해 철근은 그 자체가 잘 규정된 균질한 물질이므로 비교적 간단한 모델로서 그 거동을 잘 표현할 수 있다.

2.2 콘크리트

Kupfer(1969)등이 행한 실험결과를 분석해보면 2축 응력 상태에서의 콘크리트의 거동은 1축 응력하에서의 거동과 큰 차이를 보인다는 것을 알 수 있다. 위의 그림 2에서 보듯이 최대 압축 강도는 응력비 $\sigma_2/\sigma_1=0.5$ 일때는 일축 압축 강도의 약 25%까지 커짐을 알 수 있다. 2축 압축-인장시 압축 강도는 인장 응력의 증가에 거의 비례하여 감소하며, 2축 인장시 강도는 1축 인장강도와 큰 차이가 없는 것으로 나타나고 있다.

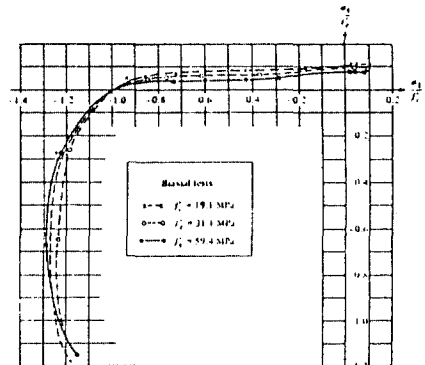


그림 2. 2축 응력상태에서의 콘크리트의 응력-변형도 관계

2축 응력 상태의 콘크리트의 연성을 살펴보면, 2축 압축 응력 상태에서는 변형도와 연성이 1축 압축일 때보다 증가함을 알 수 있다. 압축-인장시에는 최고응력에서의 압축 변형도, 인장 변형도가 인장응력이 증가함에 따라 감소하며, 2축 인장 응력 상태에서는 최대 주인장 변형도가 평균 0.0008 임을 알 수 있다.

위에서 살펴본 결과를 분석해 보면 2축 압축시 최대 압축강도의 증가는 Poisson효과만으로 설명하기에는 그 증가량이 너무 크다. 그 주된 요인은 이축 압축응력의 존재로 인하여 잠재하고 있는 미세균열이 억제되기 때문으로 보인다.

그러므로 2축 응력-변형도 곡선으로부터 Poisson효과를 제거하면 미세균열이 억제되어서 증가되는 강성 E_1, E_2 를 구할 수 있고 이 증가된 강성을 Poisson효과를 고려해 넣은 관계식에 대입하면 2축 압축응력하에서의 콘크리트 거동을 설명할 수 있다.

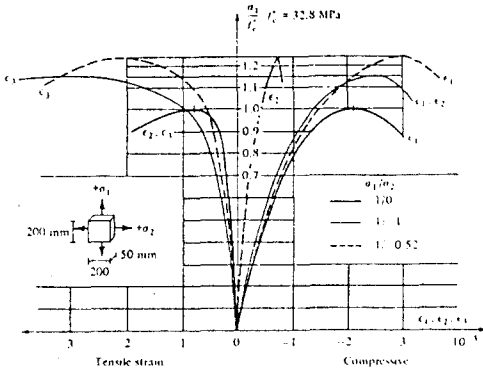


그림 3. 2축 압축하의 콘크리트의 응력-변형도 관계 곡선

본 논문에서 사용한 콘크리트 요소는 평면응력요소이다.

직교하는 두 축 1, 2를 주응력 방향이라 하면, 증분 응력-변형도 관계는 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = 1/\alpha \begin{bmatrix} E_1 & \mu\beta & 0 \\ \mu\beta & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha G' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서 μ : 유효 포아송 비 $\mu^2 = \nu_1\nu_2$
 G' : 평면 응력 상태의 전단계수

$$= (E_1 + E_2 - 2\mu\sqrt{E_1E_2}) / 4(1 - \mu^2)$$

$$\alpha = 1 / (1 - \mu^2)$$

$$\beta = \sqrt{E_1E_2}$$

위의 E_1, E_2 는 직교하는 방향에서의 일축 접선 탄성계수들이나 등가 1축 변형의 개념을 사용하여 제 2축의 구속효과가 포함된 탄성계수를 구할 수 있다. 이를 위해서 등가 1축 응력 관계 개념을 도입한다. 식 (1)은 아래와 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 B_{11} & E_1 B_{12} & 0 \\ E_2 B_{12} & E_2 B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2)$$

이를 다시 쓰면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= E_1 (B_{11}d\epsilon_1 + B_{12}d\epsilon_2) = E_1 d\epsilon_{1u} \\ d\sigma_2 &= E_2 (B_{21}d\epsilon_1 + B_{22}d\epsilon_2) = E_2 d\epsilon_{2u} \\ d\tau_{12} &= G d\gamma_{12} \end{aligned} \quad (3)$$

이식을 이용해서 행렬형태로 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\epsilon_{1u} \\ d\epsilon_{2u} \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (4)$$

따라서 등가 일축변형도 $d\epsilon_{1u}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$d\epsilon_{1u} = d\sigma_1 / E_1 \quad (5)$$

$$\epsilon_{1u} = \int d\sigma_1 / E_1 \quad (6)$$

$d\epsilon_{1u}$ 는 가상의 변위로서 다른 방향의 응력 증가가 없는 상태에서 1방향으로 응력의 증분 $d\sigma_1$ 를 받을 때 나타나게 되는 변위 증가를 뜻한다.

2.3 철근

철근은 재료가 등질이고 철근 콘크리트 구조물내에서 일차원 요소처럼 거동하기 때문에 트리스 요소로 모델링하여도 그 거동을 충분히 설명할 수 있다.

본 논문에서는 철근의 모델을 초기 탄성부분과 변형도 경화부분을 기울기가 서로 다른 두 직선으로 표시하였다.

축 1, 2를 각각 철근의 배근 방향과 그에 수직인 방향으로의 축이라고 한다면 이때의 철근의 증분 응력-변형도 관계는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{sc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\epsilon_{1u} \\ d\epsilon_{2u} \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서 E_{sc} 는 현재의 탄성계수이고 이 식 (7)은 전체 좌표계로 변환해 주어야 한다.

2.4 철근과 콘크리트의 부착요소의 모델링

2.4.1 철근과 콘크리트 사이의 부착거동

철근과 주변 콘크리트는 균열의 발생여부에 관련없이 보통 완전히 부착 되었다고 가정하지

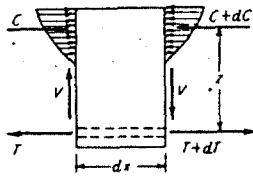
만 실제로는 균열 발생이후에는 완전 부착이 되어 있지 않고 균열에 의해 노출된 철근에 집중된 부착슬립이 발생하게 된다. 이들 부착응력을 적절한 부착응력-변형도 관계를 도출하여 유한 요소 해석시에 적용한 것은 Ngo와 Scordelis에 의해서였다.

그림 (4)는 보의 한단면의 평형조건을 보여주는 것으로써 단위 길이당의 이 부착력이 접촉면에 균일하게 분포된 전단형식의 부착응력

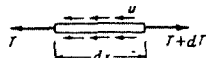
의 합이라면 부착응력 u 는 다음과 같다.

$$u = dT / \int_0^s dx \quad (8)$$

여기서 \int_0^s 는 모든 철근의 주장이다.



(a)



(b)

그림 4. 부착력의 평형 조건

2.4.2 철근과 콘크리트 사이의 부착요소의 모델링

본 논문에서는 철근과 콘크리트사이의 부착 거동을 고려하기 위해 Link Element를 사용하였다.

Link 요소는 그림 (5)에서 보듯이 강도가 각각 K_v, K_h 인 두개의 스프링에 의해 수직과 수평 변위를 묘사할 수 있다.

수직의 변위에 대한 강도 K_v 는 철근 콘크리트 휨 부재에서 철근의 수직변위가 매우 작아 그 영향을 무시할 수 있으므로 수평변위에 대한 강도 K_h 보다 매우 큰 값으로 지정하여 변위를 제어할 수 있다.

수평변위에 대한 강도 K_h 는 부착거동을 서술하고 있는데 부착 슬립-부착 응력 관계식에서 구할 수 있다. 부착응력을 부착슬립의 함수로 나타낼 수 있다면, $u=f(s)$, du/ds 는 중분형의 슬립계수(Slip Modulus)이고 여기에 부착 유효 면적(Tributary Surface Area), A_{tr} 을 곱해서 수평변위에 대한 강도 K_h 를 구할 수 있다.

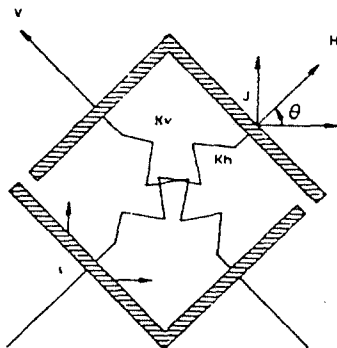


그림 5. 부착 요소

본 논문에서는 실험결과로부터 도출된 부착 응력-부착슬립 관계식인 식(9)를 이용하였다.

$$u = 3.127s - 0.748s^2 + 0.082s^3 - 0.003s^4 \quad (9)$$

여기서 u 는 부착 응력이고 단위는 N/mm^2 이다. s 는 부착 슬립이고 단위는 $1/100$ mm이다. 부착 유효 면적은 $A_{tr} = (\pi n d_b l) / 2b$ 로 표시하며 여기서 n 은 철근의 갯수, d_b 는 철근의 직경, l 은 link요소의 간격, 그리고 b 는 부재의 폭을 나타낸다.

3. 유한 요소 해석

3.1 유한 요소의 선정

3.2.1 콘크리트 유한요소

본 논문에서는 콘크리트 유한요소를 8 개의 절점으로 구성된 등방형 요소를 사용하였다. 이 요소의 형상 함수는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} h_1 &= 0.25 (1+r)(1+s) - 0.5 h_5 - 0.5 h_8 \\ h_2 &= 0.25 (1-r)(1+s) - 0.5 h_5 - 0.5 h_6 \\ h_3 &= 0.25 (1-r)(1-s) - 0.5 h_6 - 0.5 h_7 \\ h_4 &= 0.25 (1+r)(1-s) - 0.5 h_7 - 0.5 h_8 \\ h_5 &= 0.25 (1-r^2)(1+s) \\ h_6 &= 0.25 (1-r)(1-s^2) \\ h_7 &= 0.25 (1-r^2)(1-s) \\ h_8 &= 0.25 (1+r)(1-s^2) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 s 와 t 는 한 요소내에서 각 변의 중점을 지나는 직선의 좌표계의 각각의 축을 말한다.

이 형상함수를 이용하여 요소의 강도행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K &= \int_V B^T C B t dx dy \\ &= \int_V B^T C B t J dr ds \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 K : 요소의 강도 행렬

B : 변위-변형도 변환 행렬

C : 응력-변형도 변환 행렬

t : 요소의 두께

J : jacobian 행렬의 determinant

본 논문에서는 위의 적분식의 값을 2×2 가우스 적분에 의해 구하였다.

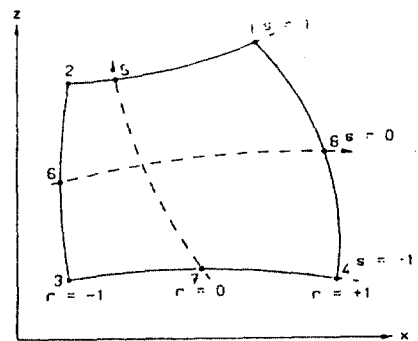


그림 6. 콘크리트의 유한요소

3.2.2 철근 요소

2.3 절에서 실시한 철근의 모델링을 기초로 하여 철근 요소의 강도행렬을 구하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} p_i \\ p_j \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} r_i \\ r_j \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서

$$K = \frac{E_{sc}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

- K : 철근 요소의 강도 행렬
- L : 철근 요소의 길이
- p_i, p_j : 요소의 절점에 작용하는 하중
- r_i, r_j : 절점의 변위
- E_{sc} : 현재의 탄성계수

3.2.3 부착 요소

그림 (5)에서 처럼 Link 요소가 전체 좌표계와 θ 의 각을 이루고 있다면, 전체 좌표계에서의 부재 강도행렬은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_h \\ \sigma_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_h \\ \varepsilon_v \end{bmatrix}, \sigma = E \varepsilon \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_h \\ \varepsilon_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{ib} \\ \delta_{jb} \\ \delta_{iv} \\ \delta_{jv} \end{bmatrix} \quad (15)$$

이들 국부 요소 강도 행렬을 전체 좌표계로 변환하면 아래와 같다.

$$k = A^T E A \quad (16)$$

$$= \begin{bmatrix} k_h C^2 + k_v S^2 & k_h C S - k_v C S & -k_h C^2 - k_v S^2 & -k_h C S + k_v C S \\ k_h C S - k_v C S & k_h S^2 + k_v C^2 & -k_h C S + k_v C S & -k_h S^2 - k_v C^2 \\ \text{Symm.} & & k_h C^2 + k_v S^2 & k_h C S - k_v C S \\ & & -k_h C S + k_v C S & k_h S^2 + k_v C^2 \end{bmatrix}$$

- 여기서 k : 국부 요소 강도 행렬
- A : 변환 행렬
- C : $\cos\theta$
- S : $\sin\theta$

4. 해석 및 결과분석

위에서 제시한 각각의 모델을 이용해서 프로그램을 작성하고 이를 이용하여 예제를 모델링한 후 프로그램을 수행하였다.

각 예제 모델에 대한 재료 특성은 다음 표와 같다.

표 (1) 보의 치수 (cm)

부재	길이	유효깊이	폭	높이
OA-1	182.88	55.626	30.988	55.626
OA-2	457.20	46.609	30.480	56.134
OA-3	640.08	46.152	30.734	55.626

표 (2) 실험결과

부재	최대하중 (t)	최대 변위 (cm)
OA-1	34.02	0.6604
OA-2	36.288	1.1684
OA-3	38.556	2.7940

해석 결과와 실험치의 하중-변위 관계곡선은 아래와 같다.

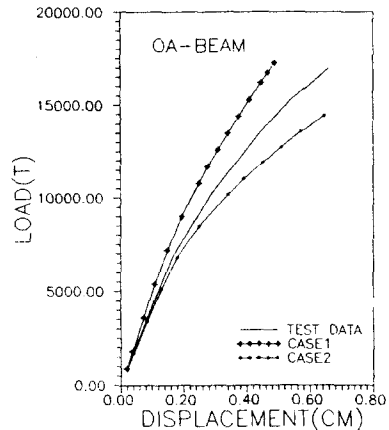


그림 7. OA-1 보의 하중-변위 관계곡선

상기에서 본바와 같이 아무런 부착요소를 고려하지 않았을 경우에는 파괴하중은 예측가능하나 실제 발생변위와는 많은 차이를 보인다. 철근과 콘크리트 사이의 부착거동을 고려하였을 경우에는 실험결과에서 측정된 변위는 거의 일치하나 최대 파괴 하중을 정확히 예측하지 못한다. 따라서 균열면에서의 골재 맞물림 작용에 대한 강성 변화를 고려하여야 할 것으로 사료된다.

5. 결론

본 논문에서는 힘을 받는 철근 콘크리트 보의 역학적 거동을 정확히 해석하기 위하여 콘크리트와 철근 등의 비선형 거동을 모델링하여 유한 요소해석을 수행하였다. 특히, 철근과 콘크리트 사이의 부착거동과 균열면에서의 골재 맞물림 작용에 대한 모델을 통하여 실제적인 비선형 해석을 가능케 하고자 하였다.

6. 참고 문헌

- 1) 백 인열, "평면응력 상태에 있는 철근 콘크리트 구조물의 비선형 유한 요소 해석," 서울대학교 토목 공학과 석사 학위 논문, 1986
- 2) 방 기성, "철근 콘크리트 구조 부재의 부착 거동에 관한 연구," 서울대학교 토목공학과 석사 학위 논문, 1986
- 3) Bathe, K. J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis," prentice Hall, New Jersey, 1982
- 4) Bazant, Z. P., and Gambarova, P., "Rough Cracks in Reinforced Concrete," Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 106, No. ST4, April, 1980
- 5) Bergan, P. G., and Holand, I., "Nonlinear Finite Analysis of Concrete Structures," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 17/18, 1979, pp. 443-467
- 6) Bresler, B., and Scordelis, A. C., "Shear Strength of Reinforced Concrete Beams," ACI Journal, Proceeding V. 60. No. 1, Jan. 1963, pp 51-74
- 7) Chen, W. F., "Plasticity in Reinforced Concrete," McGraw-Hill, New York, 1982
- 8) Chen, W. F., and Sleeb, A. F., "Constitutive Equations for Engineering Materials," Vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 1982
- 9) Desai, C. S., Abel, J. F., "Introduction to the Finite Element Methods," Van Nostrand-Reinhold, 1972
- 10) 장 승규, "철근 콘크리트 부재의 인발 부착 특성연구," 서울대학교 토목공학과 석사학위 논문, 1988
- 11) Kupfer, H. B., and Gerstle, K. H., "Behavior of Concrete under Biaxial Stresses," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 99, August, 1973

- 12) Nilson, H., "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete," American Society of Civil Engineers Report
- 13) Nilson, H., "Design of Concrete Structures," Tenth Edition, McGraw Hill, New York, 1986
- 14) Ngo, D., and Scordelis, A. C., "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beam s," ACI Journal, March, 1967
- 15) Paulay, T., and Loebar, P. J., "Shear Transfer By aggregate Interlock," ACI, sp 42-1.
- 16) Taylor, H. P. J., "The Fundamental Behavior of Reinforced Concrete Beams in Bending and Shear," ACI, sp 42-3.